Klausur 23.7.2020

1. Sei $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in\mathbb{N}}$ eine Filtration und $\{X_t\}_{t\in\mathbb{N}}$ ein adaptierter reellwertiger stochastischer Prozess. Sei weiter τ eine endliche $\{\mathcal{F}_t\}$-Stoppzeit.

a) (3 Punkte) Zeigen Sie, dass $\tau + t$ für alle $t \in \mathbb{N}$ ein Stoppzeit ist.

Wir setzen $\mathcal{G}_t = \mathcal{F}_{\tau+t}$ und $Y_t = X_{\tau+t}$. Sei weiter $\sigma \geq \tau$ eine $\{\mathcal{F}_t\}$-Stoppzeit. Zeigen Sie,

b) (3 Punkte) dass $\{\mathcal{G}_t\}$ eine Filtration ist.

c) (3 Punkte) dass $\{Y_t\}$ an $\{\mathcal{G}_t\}$ adaptiert ist.

d) (3 Punkte) dass $\sigma - \tau$ eine $\{\mathcal{G}_t\}$-Stoppzeit ist.

2. Seien $\{Y_\ell\}$ unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen mit Werten in $\mathbb{Z}$. Wir setzen $p_n = \mathbb{P}[Y_\ell = n]$. Mit $S_n = \sum_{\ell=1}^n Y_\ell$ bezeichnen wir die Summe. Sei weiter $f_0(x) : (-\infty, -1] \cap \mathbb{Z} \to [0, \infty)$ eine beschränkte Funktion. Sei $f(x)$, $x \in \mathbb{N}_0$, eine beschränkte Lösung der Gleichung

$$f(x) = \mathrm{e}^{-\delta}\Big[\sum_{n=-x}^{\infty} p_n f(x+n) + \sum_{n=-\infty}^{-x-1} p_n f_0(x+n)\Big] ,$$

wobei $\delta > 0$ eine Konstante ist. Wir setzen $f(x) = f_0(x)$ für $x < 0$. Sei $\tau = \inf\{n \geq 0 : x + S_n < 0\}$ (Stoppzeit) der erste Besuch des Prozesses $\{x + S_n\}$ in den negativen Zahlen.

a) (5 Punkte) Zeigen Sie, dass $\{\mathrm{e}^{-\delta(\tau\wedge n)} f(x + S_{\tau\wedge n})\}$ ein Martingal ist.

b) (7 Punkte) Zeigen Sie, dass $f(x) = \mathbb{E}[\mathrm{e}^{-\delta\tau} f_0(x + S_\tau)\mathbb{1}_{\tau<\infty}]$.

3. Sei $\{\tilde{N}_t\}$ ein homogener Poisson-Prozess mit Rate λ. Die Ereigniszeiten bezeichnen wir mit $0 < T_1 < T_2 < \cdots$. Seien $\{Y_k\}$ positive, unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen, unabhängig von $\{\tilde{N}_t\}$, mit Verteilung $G(x)$. Wir definieren den Punktprozess

$$N_t = \sum_{k=1}^{\tilde{N}_t} \mathbb{I}_{T_k + Y_k \le t} \; ;$$

also die Anzahl Punkte $T_k + Y_k$ im Intervall $(0, t]$. Sei $Z(t) = \mathbb{P}[N_{t+x} - N_t = 0]$, also die Wahrscheinlichkeit, dass $\{N_t\}$ im Intervall $(t, t+x]$ kein Ereignis hat.

a) (8 Punkte) Begründen Sie die Gleichung

$$Z(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda(t+x))^k}{k!} \mathrm{e}^{-\lambda(x+t)} \Big[\frac{\int_0^{t+x} (G(t-s) + 1 - G(t+x-s)) \,\mathrm{d}s}{t+x} \Big]^k \, .$$

b) (4 Punkte) Bestimmen Sie $\lim_{t\to\infty} Z(t)$.