Lösung der Klausur

1. a) Wir haben (für $n \geq t$)

$$\{\tau + t = n\} = \{\tau = n - t\} \in \mathcal{F}_{n-t} \subset \mathcal{F}_n .$$

Somit ist $\tau + t$ eine Stoppzeit.

- b) Sei $A \in \mathcal{G}_t = \mathcal{F}_{\tau+t}$. Dann ist für $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq t + 1$,

$$A \cap \{\tau + t + 1 = n\} = A \cap \{\tau + t = n - 1\} \in \mathcal{F}_{n-1} \subset \mathcal{F}_n ,$$

da $A \in \mathcal{F}_{\tau+t}$. Somit ist $A \in \mathcal{F}_{\tau+t+1} = \mathcal{G}_{t+1}$ und damit $\mathcal{G}_t \subset \mathcal{G}_{t+1}$, also eine Filtration.

- c) Sei A eine Borel-messbare Menge. Dann müssen wir $\{Y_t \in A\} = \{X_{\tau+t} \in A\} \in \mathcal{G}_t = \mathcal{F}_{\tau+t}$ zeigen. Sei $n \geq t$. Wir haben

$$\{X_{\tau+t} \in A\} \cap \{\tau + t = n\} = \{X_n \in A\} \cap \{\tau + t = n\} \in \mathcal{F}_n ,$$

da beide Mengen in $\mathcal{F}_n$ sind. Somit ist $\{Y_t \in A\} = \{X_{\tau+t} \in A\} \in \mathcal{F}_{\tau+t} = \mathcal{G}_t$.

- d) Sei $t \in \mathbb{N}$. Wir müssen $\{\sigma - \tau = t\} \in \mathcal{G}_t = \mathcal{F}_{\tau+t}$ zeigen. Wir haben für $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq t$

$$\{\sigma - \tau = t\} \cap \{\tau + t = n\} = \{\sigma = n\} \cap \{\tau + t = n\} \in \mathcal{F}_n ,$$

da σ eine Stoppzeit ist und $\{\tau + t = n\} \in \mathcal{F}_{n-t} \subset \mathcal{F}_n$. Somit ist $\{\sigma - \tau = t\} \in \mathcal{F}_{\tau+t} = \mathcal{G}_t$. Also ist $\sigma - \tau$ eine $\{\mathcal{G}_t\}$ -Stoppzeit.

2. a) Auf $\{\tau \leq n\}$ gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[e^{-\delta(\tau \wedge (n+1))} f(x + S_{\tau \wedge (n+1)}) \mid \mathcal{F}_n] &= \mathbb{E}[e^{-\delta\tau} f(x + S_\tau) \mid \mathcal{F}_n] \\ &= e^{-\delta\tau} f(x + S_\tau) = e^{-\delta(\tau \wedge n)} f(x + S_{\tau \wedge n}) . \end{aligned}$$

Auf $\{\tau > n\}$ haben wir

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[e^{-\delta(\tau \wedge (n+1))} f(x + S_{\tau \wedge (n+1)}) \mid \mathcal{F}_n] &= \mathbb{E}[e^{-\delta(n+1)} f(x + S_{n+1}) \mid \mathcal{F}_n] \\ &= e^{-\delta(n+1)} \mathbb{E}[f(x + S_n + Y_{n+1}) \mid \mathcal{F}_n] \\ &= e^{-\delta(n+1)} \left[\sum_{k=-x-S_n}^{\infty} p_k f(x + S_n + k) + \sum_{k=-\infty}^{-x-S_n-1} p_k f_0(x + S_n + k) \right] \\ &= e^{-\delta n} f(x + S_n) = e^{-\delta(\tau \wedge n)} f(x + S_{\tau \wedge n}) , \end{aligned}$$

wobei wir in der zweitletzten Gleichung die Definition von f an der Stelle $x + S_n$ verwendet haben. Somit ist der gesuchte Prozess ein Martingal.

b) Nach dem Stoppsatz gilt

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{-\delta(\tau \wedge 0)} f(x + S_{\tau \wedge 0}) = \mathbb{E}[e^{-\delta(\tau \wedge n)} f(x + S_{\tau \wedge n})] \\ &= \mathbb{E}[e^{-\delta\tau} f(x + S_\tau) \mathbf{1}_{\tau \leq n}] + e^{-\delta n} \mathbb{E}[f(x + S_n) \mathbf{1}_{\tau > n}]. \end{aligned}$$

Der zweite Erwartungswert ist beschränkt. Somit konvergiert für $n \rightarrow \infty$ der zweite Term nach Null. Der erste Term ist beschränkt und monoton. Somit dürfen wir Erwartungswert und Grenzwert vertauschen und erhalten

$$f(x) = \mathbb{E}[e^{-\delta\tau} f(x + S_\tau) \mathbf{1}_{\tau < \infty}] = \mathbb{E}[e^{-\delta\tau} f_0(x + S_\tau) \mathbf{1}_{\tau < \infty}],$$

da $x + S_\tau < 0$.

3. a) Ist $T_k + Y_k \in (t, t + x]$, so ist $k \leq \tilde{N}_{t+x}$. Bedingen wir auf $\tilde{N}_{t+x}$, ($\mathbb{P}[\tilde{N}_{t+x} = k] = (\lambda(t+x))^k \exp\{-\lambda(t+x)\}/k!$), so sind die Ereigniszeiten $T_1, \dots, T_{\tilde{N}_{t+x}}$ wie die Ordnungsstatistik von unabhängigen auf $(0, t+x]$ gleichverteilten Variablen verteilt (Dichte $1/(t+x)$). Ist $T_k = s$, so darf Y_k nicht in $(t-s, t+x-s]$ liegen, was mit Wahrscheinlichkeit $G(t-s) + (1-G(t+x-s))$ der Fall ist. Diese Wahrscheinlichkeit wird $\tilde{N}_{t+x}$ mal miteinander multipliziert. Dies erklärt die Formel.

b) Summieren ergibt die Formel

$$\begin{aligned} Z(t) &= \exp\left\{\lambda \int_0^{t+x} (G(t-s) + 1 - G(t+x-s)) ds - \lambda(x+t)\right\} \\ &= \exp\left\{\lambda \int_0^t G(t-s) ds - \lambda \int_0^{t+x} G(t+x-s) ds\right\} \\ &= \exp\left\{\lambda \int_0^t G(v) dv - \lambda \int_0^{t+x} G(v) dv\right\} = \exp\left\{-\lambda \int_t^{t+x} G(v) dv\right\}. \end{aligned}$$

Lassen wir $t \rightarrow \infty$, konvergiert dies nach $e^{-\lambda x}$.