Nachklausur 23.09.2020

1. Sei $\{a_n\} \subset (0, \infty)$ eine Folge von echt positiven Zahlen und $\{Y_n : k \in \mathbb{N}\}$ seien iid Zufallsvariablen mit $\operatorname{Var}[Y_k] \in (0, \infty)$. Setzen wir $U_n = \sum_{k=1}^n a_k Y_k$. Zeigen Sie: U_n konvergiert genau dann in $\mathcal{L}^2$, falls mindestens eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist

a) $\mathbb{E}[Y_k] = 0$ und $\sum_{k=1}^\infty a_k^2 < \infty$,

b) $\mathbb{E}[Y_k] \neq 0$ und $\sum_{k=1}^\infty a_k < \infty$.

2. Seien $\{Y_\ell\}$ unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen mit Werten in $\mathbb{Z}$, so dass $\mathbb{P}[Y_\ell \le 1] = 1$. Wir setzen $p_n = \mathbb{P}[Y_\ell = n]$. Mit $S_n = \sum_{\ell=1}^n Y_\ell$ bezeichnen wir die Summe. Sei weiter $f_0(x) : (-\infty, -1] \cap \mathbb{Z} \to [0, \infty)$ eine beschränkte Funktion. Sei $f(x)$, $x \in \mathbb{N}_0$, eine (evtl. unbeschränkte) Lösung der Gleichung

$$f(x) = \mathrm{e}^{-\delta}\Bigl[\sum_{n=-x}^{1} p_n f(x+n) + \sum_{n=-\infty}^{-x-1} p_n f_0(x+n)\Bigr] ,$$

wobei $\delta > 0$ eine Konstante ist. Wir setzen $f(x) = f_0(x)$ für $x < 0$. Sei $\tau_0 = \inf\{n \ge 0 : x + S_n < 0\}$ der erste Besuch des Prozesses $\{x + S_n\}$ in den negativen Zahlen, $\tau^a = \inf\{n \ge 0 : x + S_n \ge a\}$ (Stoppzeiten) und $\tau_0^a = \tau_0 \wedge \tau^a$ für natürliche Zahlen $0 \le x \le a$. Dann folgt wie in der Klausur, dass $\{M_n = \mathrm{e}^{-\delta(\tau_0^a \wedge n)} f(x + S_{\tau_0^a \wedge n})\}$ ein Martingal ist. Sei weiter $\vartheta > 0$ die eindeutige Lösung der Gleichung $\mathbb{E}[\mathrm{e}^{\vartheta Y_\ell}] = \mathrm{e}^\delta$ und $L_n = \mathrm{e}^{\vartheta S_n - \delta n}$. Wir definieren das Mass $\mathbb{P}^*[A] = \mathbb{E}[L_n \mathbb{1}_A]$ für $A \in \mathcal{F}_n$, wobei $\{\mathcal{F}_n\}$ die natürliche Filtration ist. Wir wissen aus der Vorlesung, dass $\{S_n\}$ auch unter $\mathbb{P}^*$ eine Irrfahrt ist.

a) (1 Punkt) Begründen Sie, wieso $\mathbb{P}[\tau_0^a < \infty] = 1$ gilt.

b) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass $\mathbb{E}^*[Y_\ell] > 0$ und damit $\mathbb{P}^*[\tau^a < \infty] = 1$ und $\mathbb{P}^*[\tau^0 < \infty] < 1$.
Hinweis: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\mathbb{E}[\mathrm{e}^{\theta Y_\ell}] = \mathbb{E}[Y_\ell \mathrm{e}^{\theta Y_\ell}]$ und $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\theta^2}\mathbb{E}[\mathrm{e}^{\theta Y_\ell}] = \mathbb{E}[Y_\ell^2 \mathrm{e}^{\theta Y_\ell}]$. Machen Sie eine Skizze des Graphen.

c) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass $\mathbb{E}[\mathrm{e}^{-\delta \tau_0^a} \mathbb{1}_{\tau_0^a = \tau^a}] = \mathrm{e}^{-\vartheta(a-x)} \mathbb{P}^*[\tau_0^a = \tau^a]$.

d) (7 Punkte) Zeigen Sie, dass $\overline{\lim}_{a\to\infty} f(a)\mathrm{e}^{-\vartheta a} < \infty$.
Hinweis: Verwenden Sie das Martingal $\{M_n\}$.

3. Sei $\{S_n\}$ eine Irrfahrt mit Zuwächsen $\{X_k\}$ mit Verteilung

$$F(x) = \begin{cases} \frac{p}{3}(2\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{3x}) \,, & \text{falls } x \le 0, \\ 1 - \frac{1-p}{2}(\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{-2x}) \,, & \text{falls } x \ge 0. \end{cases}$$

Intuitiv: Mit Wahrscheinlichkeit p ist der Sprung negativ, mit $1-p$ positiv. Ist er positiv, so ist der Sprung mit Wahrscheinlichkeit von je $\frac{1}{2}$ exponential verteilt mit Parameter 1, bzw. 2, und analog für negative Sprünge.

a) (2 Punkte) Begründen Sie, wieso die Leiterhöhenverteilungen von der Form

$$H_+(x) = q_1(1-\mathrm{e}^{-x})^+ + q_2(1-\mathrm{e}^{-2x})^+ \text{ und } H_-(x) = q_3 \min\{\mathrm{e}^{x}, 1\} + q_4 \min\{\mathrm{e}^{3x}, 1\}$$

sein müssen.

b) (10 Punkte) Bestimmen Sie Gleichungen für q_1, q_2, q_3, q_4, aus denen die Leiterhöhenverteilungen H_+ und H_- (eindeutig) bestimmt werden können. Integrale müssen expizit berechnet werden.