

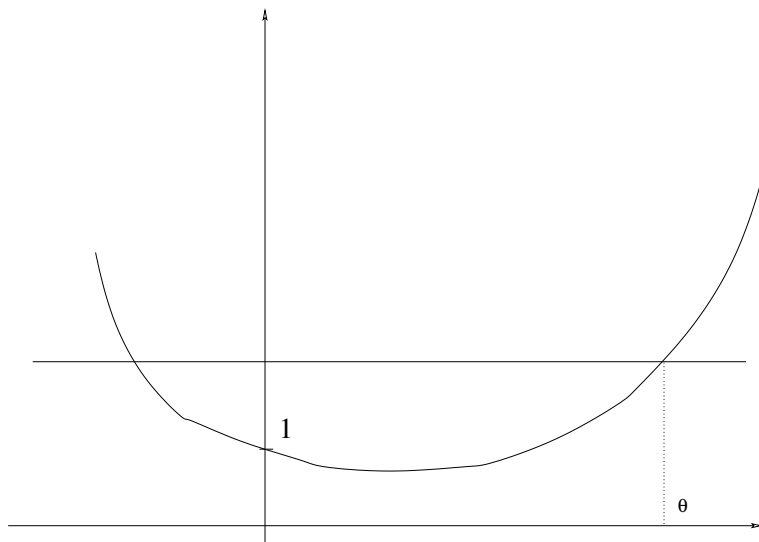


Abbildung 1: Funktion  $\theta \mapsto \mathbb{E}[e^{\theta Y_\ell}]$

H. Schmidli

Wahrscheinlichkeitstheorie I

SS 20

## Lösung der Nachklausur

1. Sei  $\mu = \mathbb{E}[Y_k]$  und  $\sigma^2 = \text{Var}[Y_k]$ .  $U_n$  konvergiert genau dann in  $\mathcal{L}^2$ , falls es eine Cauchy-Folge ist. Somit muss für jedes  $\varepsilon > 0$  ein  $n_0$  geben, so dass für  $n_0 \leq m < n$  gilt

$$\begin{aligned} \varepsilon &> \mathbb{E}\left[\left(\sum_{k=m+1}^n a_k Y_k\right)^2\right] = \sum_{k=m+1}^n a_k^2 \mathbb{E}[Y_k^2] + 2 \sum_{k=m+2}^n \sum_{\ell=m+1}^{k-1} a_k a_\ell \mathbb{E}[Y_k Y_\ell] \\ &= \sum_{k=m+1}^n a_k^2 (\sigma^2 + \mu^2) + 2 \sum_{k=m+2}^n \sum_{\ell=m+1}^{k-1} a_k a_\ell \mu^2 = \sum_{k=m+1}^n a_k^2 \sigma^2 + \left(\sum_{k=m+1}^n a_k\right)^2 \mu^2. \end{aligned}$$

Ist  $\mu \neq 0$ , so ist die Bedingung genau dann erfüllt, wenn  $\sum_{k=1}^n a_k$  und  $\sum_{k=1}^n a_k^2$  für  $n \rightarrow \infty$  konvergieren. Falls die erste Summe konvergiert, so konvergiert auch die zweite. Ist  $\mu = 0$ , so ist die Bedingung erfüllt, genau dann, wenn  $\sum_{k=1}^n a_k^2$  konvergiert.

2. a) Die Irrfahrt ist entweder transient oder oszillierend. Somit muss das Intervall  $[0, \infty]$  irgendwann verlassen werden.

b) Es gilt

$$\mathbb{E}^*[Y_\ell] = \mathbb{E}[Y_\ell e^{\vartheta S_\ell} e^{-\delta \ell}] = \mathbb{E}[Y_\ell e^{\vartheta Y_\ell - \delta}].$$

Da  $\frac{d^2}{d\theta^2} \mathbb{E}[e^{\theta Y_\ell}] = \mathbb{E}[Y_\ell^2 e^{\theta Y_\ell}] > 0$ , ist die Funktion  $\theta \mapsto \mathbb{E}[e^{\theta Y_\ell}]$  konvex, siehe Abbildung 1. Aus  $\mathbb{E}[e^{0Y_\ell}] = 1$  und  $\mathbb{E}[e^{\vartheta Y_\ell}] = e^\delta > 1$  folgt, dass die Steigung  $\mathbb{E}[Y_\ell e^{\vartheta Y_\ell}]$  strikt positiv ist. Somit hat die Irrfahrt unter  $\mathbb{P}^*$  eine positive Drift und konvergiert daher nach Unendlich. Dies beweist den Rest der Behauptung.

c) Mit der Änderung des Masses ergibt sich

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[e^{-\delta\tau_0^a} \mathbb{1}_{\tau_0^a=\tau^a}] &= \mathbb{E}[e^{-\vartheta S_{\tau_0^a}} \mathbb{1}_{\tau_0^a=\tau^a} L_{\tau_0^a}] = \mathbb{E}^*[e^{-\vartheta S_{\tau_0^a}} \mathbb{1}_{\tau_0^a=\tau^a}] \\ &= e^{-\vartheta(a-x)} \mathbb{P}[\tau_0^a = \tau^a] , \end{aligned}$$

da  $S_{\tau^a} = a - x$ .

d) Nach dem Stoppsatz gilt

$$\begin{aligned} f(x) &= \mathbb{E}[e^{-\delta(\tau_0^a \wedge t)} f(x + S_{\tau_0^a \wedge t})] \\ &= \mathbb{E}[e^{-\delta\tau_0} f_0(x + S_{\tau_0}) \mathbb{1}_{\tau_0^a=\tau_0 \leq t}] + \mathbb{E}[e^{-\delta\tau^a} f(a) \mathbb{1}_{\tau_0^a=\tau^a \leq t}] \\ &\quad + \mathbb{E}[e^{-\delta t} f(x + S_t) \mathbb{1}_{\tau_0^a > t}] . \end{aligned}$$

Lassen wir  $t \rightarrow \infty$  so folgt mit beschränkter Konvergenz

$$\begin{aligned} f(x) &= \mathbb{E}[e^{-\delta\tau_0} f_0(x + S_{\tau_0}) \mathbb{1}_{\tau_0^a=\tau_0}] + f(a) \mathbb{E}[e^{-\delta\tau^a} \mathbb{1}_{\tau_0^a=\tau^a}] \\ &= \mathbb{E}[e^{-\delta\tau_0} f_0(x + S_{\tau_0}) \mathbb{1}_{\tau_0^a=\tau_0}] + f(a) e^{-\vartheta(a-x)} \mathbb{P}^*[\tau_0^a = \tau^a] . \end{aligned}$$

Also,

$$f(a) e^{-\vartheta a} \mathbb{P}^*[\tau_0^a = \tau^a] = e^{-\vartheta x} \{f(x) - \mathbb{E}[e^{-\delta\tau_0} f_0(x + S_{\tau_0}) \mathbb{1}_{\tau_0^a=\tau_0}]\} .$$

Lassen wir  $a \rightarrow \infty$ , so konvergiert  $\mathbb{P}^*[\tau_0^a = \tau^a]$  nach  $\mathbb{P}^*[\tau_0 = \infty] > 0$  und  $\mathbb{E}[e^{-\delta\tau_0} f_0(x + S_{\tau_0}) \mathbb{1}_{\tau_0^a=\tau_0}]$  nach  $\mathbb{E}[e^{-\delta\tau_0} f_0(x + S_{\tau_0}) \mathbb{1}_{\tau_0 < \infty}]$ , was beschränkt ist. Somit muss die linke Seite auch beschränkt bleiben, was wegen  $\mathbb{P}^*[\tau_0 = \infty] > 0$  nur möglich ist, wenn  $f(a) e^{-\vartheta a}$  beschränkt bleibt.

3. a) Wenn ein Sprung nach oben passiert, ist er mit Wahrscheinlichkeit je  $\frac{1}{2}$  exponentialverteilt mit Parameter 1 bzw. Parameter 2. Wenn 0 überschritten wird, haben wir einen dieser Fälle. Wegen der Gedächtnislosigkeit der Exponentialverteilung ist dann also  $\mathcal{H}_1^+$  entweder exponentialverteilt mit Parameter 1 oder Parameter 2.  $q_1, q_2$  sind dann die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten. Die analoge Begründung gilt für die Sprünge nach unten.

b) Wir haben dann für  $x \leq 0$

$$\begin{aligned} H_- * H_+(x) &= \int_0^\infty H_-(x-y) dH_+(y) \\ &= \int_0^\infty (q_3 e^{x-y} + q_4 e^{3(x-y)})(q_1 e^{-y} + 2q_2 e^{-2y}) dy \\ &= q_3(\frac{1}{2}q_1 + \frac{2}{3}q_2)e^x + q_4(\frac{1}{4}q_1 + \frac{2}{5}q_2)e^{3x} . \end{aligned}$$

Für  $x \geq 0$ , gilt

$$\begin{aligned}
(q_1 + q_2)(q_3 + q_4) - H_- * H_+(x) &= \int_{-\infty}^0 (q_1 + q_2 - H_+(x - y)) \, dH_-(y) \\
&= \int_{-\infty}^0 (q_1 e^{-(x-y)} + q_2 e^{-2(x-y)})(q_3 e^y + 3q_4 e^{3y}) \, dy \\
&= q_1 \left(\frac{1}{2}q_3 + \frac{3}{4}q_4\right) e^{-x} + q_2 \left(\frac{1}{3}q_3 + \frac{3}{5}q_4\right) e^{-2x}
\end{aligned}$$

Aus der Wiener-Hopf-Zerlegung finden wir für  $x \leq 0$

$$\frac{p}{3}(2e^x + e^{3x}) = q_3 e^x + q_4 e^{3x} + 0 - q_3 \left(\frac{1}{2}q_1 + \frac{2}{3}q_2\right) e^x - q_4 \left(\frac{1}{4}q_1 + \frac{2}{5}q_2\right) e^{3x}$$

und für  $x \geq 0$ ,

$$\begin{aligned}
1 - \frac{1-p}{2}(e^{-x} + e^{-2x}) &= (q_3 + q_4) + q_1(1 - e^{-x}) + q_2(1 - e^{-2x}) \\
&\quad - [(q_1 + q_2)(q_3 + q_4) - q_1 \left(\frac{1}{2}q_3 + \frac{3}{4}q_4\right) e^{-x} - q_2 \left(\frac{1}{3}q_3 + \frac{3}{5}q_4\right) e^{-2x}] .
\end{aligned}$$

Wir bemerken, dass  $q_1 + q_2 = 1$  oder  $q_3 + q_4 = 1$ , da mindestens einer der Leiterpochenprozesse nicht abbricht. Somit erhalten wir die Gleichungen

$$\begin{aligned}
\frac{2p}{3} &= q_3 \left(1 - \frac{1}{2}q_1 - \frac{2}{3}q_2\right) , & \frac{p}{3} &= q_4 \left(1 - \frac{1}{4}q_1 - \frac{2}{5}q_2\right) , \\
\frac{1-p}{2} &= q_1 \left(1 - \frac{1}{2}q_3 - \frac{3}{4}q_4\right) , & \frac{1-p}{2} &= q_2 \left(1 - \frac{1}{3}q_3 - \frac{3}{5}q_4\right) .
\end{aligned}$$