Klausur 14.7.2023

1. Sei Ω eine nicht-leere Menge, $\mathfrak{A} \subset 2^\Omega$ ein Mengensystem von Teilmengen von Ω und $\emptyset \neq B \subset \Omega$ eine beliebige Teilmenge von Ω. Wir definieren

$$\mathfrak{A}|_B := \{A \cap B : A \in \mathfrak{A}\}\ , \qquad \sigma(\mathfrak{A})|_B := \{A \cap B : A \in \sigma(\mathfrak{A})\}\ .$$

Wir betrachten $\sigma(\mathfrak{A})|_B \subset 2^B$ als σ-Algebra auf der Menge B. Zeigen Sie:

a) (4 P) $\sigma(\mathfrak{A})|_B \subset 2^B$ ist eine σ-Algebra auf der Menge B.

b) (4 P) $\mathfrak{B} = \{A \in \sigma(\mathfrak{A}) : A \cap B \in \sigma(\mathfrak{A}|_B)\}$ ist eine σ-Algebra auf Ω.

c) (4 P) $\sigma(\mathfrak{A}|_B) = \sigma(\mathfrak{A})|_B$.

2. Eine Firma macht im Jahre n den Gewinn $Y_n \geq 0$ und zahlt jeweils den α-ten Teil des Vermögens als Dividende aus, wobei $\alpha \in (0,1)$. Wir nehmen an, dass die $\{Y_n\}$ iid und integrierbar sind. Damit ergibt sich der vor-Dividenden Prozess mit Startwert $S_0 = y \geq 0$ aus der Formel $S_{n+1} = (1-\alpha)S_n + Y_{n+1}$ und der Wert der zukünftigen Dividenden ist $\mathbb{E}[\sum_{k=0}^\infty \alpha S_k r^k]$ für eine Diskontierungsrate $r \in (0,1)$. Sei weiter $f : [0,\infty) \to [0,\infty)$ eine messbare Funktion die die Gleichung

$$r\mathbb{E}[f((1-\alpha)x + Y)] - f(x) + \alpha x = 0$$

erfüllt und die Eigenschaft $f(x) \leq x + \kappa$ für ein $\kappa > 0$ hat.

a) (2 P) Zeigen Sie, $\sup_n \mathbb{E}[|S_n|] < \infty$.

b) (6 P) Zeigen Sie, $M_n = f(S_n)r^n + \sum_{k=0}^{n-1} \alpha S_k r^k$ ist ein Martingal bezüglich der Filtration $\{\mathcal{F}_n\}$ erzeugt durch $\{Y_n\}$.

c) (4 P) Zeigen Sie, $f(y) = \mathbb{E}[\sum_{k=0}^\infty \alpha S_k r^k]$ ist der Wert der Dividenden.

3. In einer Forschungsstation in den Alpen hat eine Komponente einer Apparatur eine Lebenszeit mit einer stetigen Verteilungsfunktion $F(t)$ mit Mittelwert μ. Fällt die Komponente aus wird sie sofort ersetzt. Die Kosten der Auswechslung hängen von der Jahreszeit ab und sind $2 + \cos(2\pi T_k)$, wenn die Komponente zur Zeit T_k ausfällt. Wir interessieren uns für die jährlichen erwarteten Kosten

$$Z(t) = \mathbb{E}\Big[\sum_{k=N_t+1}^{N_{t+1}} 2 + \cos(2\pi T_k) \Big] \, ,$$

wobei N_t die Anzahl der bis zur Zeit t ersetzten Komponenten bezeichnet.

a) (2 P) Begründen Sie, wieso man nicht erwarten kann, dass $Z(t)$ eine Erneuerungsgleichung erfüllt.

b) (6 P) Begründen Sie, dass $Z(t) = \int_t^{t+1} \{2 + \cos(2\pi s)\} \, \mathrm{d}U(s)$, wobei $U(t)$ das Erneuerungsmass ist.
Hinweis: $T_k \in (t, t+1]$ genau dann, wenn $\mathbb{1}_{(t,t+1]}(T_k) = 1$.

c) (4 P) Berechnen Sie $\lim_{t \to \infty} Z(t)$.