Lösung der Klausur

1. **a)** Wir bemerken zuerst, dass auf der Menge B, das Komplement von $A \subset B$ identisch ist mit $B \setminus A$.

i) Wir haben $\emptyset \in \sigma(\mathfrak{A})$ und daher $\emptyset = \emptyset \cap B \in \sigma(\mathfrak{A})|_B$.

ii) Ist $A \in \sigma(\mathfrak{A})|_B$, so existiert $\tilde{A} \in \sigma(\mathfrak{A})$, so dass $A = \tilde{A} \cap B$. Somit ist $\tilde{A}^c \in \sigma(\mathfrak{A})$. Also ist $B \setminus A = A^c \cap B = (\tilde{A} \cap B)^c \cap B = \tilde{A}^c \cap B \in \sigma(\mathfrak{A})|_B$.

iii) Sind $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ Mengen aus $\sigma(\mathfrak{A})|_B$ und $A = \cup_n A_n$, so gibt es Mengen $\tilde{A}_n \in \sigma(\mathfrak{A})$ mit $A_n = \tilde{A}_n \cap B$. Insbesondere ist $\tilde{A} = \cup_n \tilde{A}_n \in \sigma(\mathfrak{A})$ und $A = \cup_n(\tilde{A}_n \cap B) = (\cup_n \tilde{A}_n) \cap B = \tilde{A} \cap B \in \sigma(\mathfrak{A})|_B$.

Also ist $\in \sigma(\mathfrak{A})|_B$ eine σ-Algebra.

b) **i)** Da $\emptyset \cap B = \emptyset \in \sigma(\mathfrak{A}|_B)$, ist $\emptyset \in \mathfrak{B}$.

ii) Ist $A \in \mathfrak{B}$ und damit $A \cap B \in \sigma(\mathfrak{A}|_B)$, so ist $A^c \cap B = B \setminus (A \cap B) \in \sigma(\mathfrak{A}|_B)$ und damit $A^c \in \mathfrak{B}$.

iii) Sind $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ Mengen aus $\mathfrak{B}$ und $A = \cup_n A_n$, so ist $A_n \cap B \in \sigma(\mathfrak{A}|_B)$. Somit ist auch $A \cap B = (\cup_n A_n) \cap B = \cup_n(A_n \cap B) \in \sigma(\mathfrak{A}|_B)$ und damit $A \in \mathfrak{B}$.

Also ist $\mathfrak{B}$ eine σ-Algebra.

c) Für $A \in \mathfrak{A}$ ist $A \in \sigma(\mathfrak{A})$ und damit $A \cap B \in \sigma(\mathfrak{A})|_B$. Da $\sigma(\mathfrak{A})|_B$ eine σ-Algebra ist, muss $\sigma(\mathfrak{A}|_B) \subset \sigma(\mathfrak{A})|_B$ gelten.

Wir haben für $A \in \mathfrak{A}$, dass $A \cap B \in \mathfrak{A}|_B$. Somit ist auch $A \in \mathfrak{B}$. Somit ist $\mathfrak{B} \subset \sigma(\mathfrak{A})$ eine σ-Algebra, die $\mathfrak{A}$ enthält. Also ist $\sigma(\mathfrak{A}) = \mathfrak{B}$ und damit, nach Definition von $\mathfrak{B}$, $\sigma(\mathfrak{A})|_B \subset \sigma(\mathfrak{A}|_B)$.

2. **a)** S_0 ist integrierbar und $S_n \ge 0$. Mit Induktion folgt,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[|S_{n+1}|] &= (1-\alpha)\mathbb{E}[S_n] + \mathbb{E}[Y_{n+1}] \\
&= \sum_{k=0}^{n} (1-\alpha)^k \mathbb{E}[Y_{n+1-k}] + (1-\alpha)^{n+1} y \\
&= (1-\alpha)^{n+1} y + \alpha^{-1}(1-(1-\alpha)^{n+1})\mathbb{E}[Y_1] \\
&\le y + \alpha^{-1}\mathbb{E}[Y_1]\,.
\end{aligned}$$

Dies beweist die obere Grenze.

b) Da alle S_k integrierbar sind und $0 \le f(S_n) \le S_n + \kappa$ ebenfalls integrierbar ist, ist M_n integrierbar. Aus der Konstruktion folgt, dass $\{S_n\}$ adaptiert ist. Wir haben

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[M_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] &= \mathbb{E}\Big[f(S_{n+1})r^{n+1} + \sum_{k=0}^{n} \alpha S_k r^k \;\Big|\; \mathcal{F}_n\Big] \\
&= \mathbb{E}[rf((1-\alpha)S_n + Y_{n+1}) \mid \mathcal{F}_n]r^n + \sum_{k=0}^{n} \alpha S_k r^k \\
&= (f(S_n) - \alpha S_n)r^n + \sum_{k=0}^{n} \alpha S_k r^k = f(S_n)r^n + \sum_{k=0}^{n-1} \alpha S_k r^k \\
&= M_n \;,
\end{aligned}$$

wobei wir verwendet haben, dass $S_0, \ldots, S_n$ und $f(S_n)$ $\mathcal{F}_n$-messbar sind und dass f die angegebene Gleichung mit $x = S_n$ erfüllt.

c) Aus der Martingaleigenschaft folgt

$$f(y) = \mathbb{E}[M_n] = \mathbb{E}[f(S_n)]r^n + \mathbb{E}\Big[\sum_{k=0}^{n-1} \alpha S_k r^k\Big] \;.$$

Wir haben $S_{n+1} \le S_n + Y_{n+1} \le y + \sum_{k=1}^{n+1} Y_k$ und daher

$$\mathbb{E}[f(S_n)] \le \mathbb{E}[S_n + \kappa] \le y + n\mathbb{E}[Y] + \kappa \;.$$

Somit konvergiert $\mathbb{E}[f(S_n)]r^n$ nach Null. Der zweite Erwartungswert konvergiert aufgrund von monotoner Konvergenz nach $\mathbb{E}[\sum_{k=0}^{\infty} \alpha S_k r^k]$.

3. a) Hat z.B. $F(t)$ eine Verteilung, die mit sehr hoher Wahrscheinlichkeit nahe bei 1 liegt, dann wäre $Z(3)$ auf $\{T_1 \approx 1\}$ ungefähr $Z(2) \approx 3$, aber auf $\{T_1 \approx \frac{1}{2}\}$ wäre der bedingte Wert von $Z(3) \approx Z(2.5) \approx 1$ und nicht ≈ 3. Somit hängt der zukünftige Wert der Funktion von T_1 und nicht nur von $3 - T_1$ ab.

b) Es gilt

$$\begin{aligned}
Z(t) &= \mathbb{E}\Big[\sum_{n=1}^{\infty} \{2 + \cos(2\pi T_k)\} \mathbb{1}_{t < T_n \le t+1}\Big] \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \int_t^{t+1} \{2 + \cos(2\pi s)\} \,\mathrm{d}F^{*n}(s) = \int_t^{t+1} \{2 + \cos(2\pi s)\} \,\mathrm{d}\Big(\sum_{n=1}^{\infty} F^{*n}(s)\Big) \\
&= \int_t^{t+1} \{2 + \cos(2\pi s)\} \,\mathrm{d}U(s) \;.
\end{aligned}$$

c) Nach dem Blackwell'schen Erneuerungstheorem konvergiert $U(t+s)-U(t)$ nach λs, also $\mathrm{d}U(t)$ nach $\lambda\ \mathrm{d}t$, wobei $\lambda = 1/\mu$. Also konvergiert $Z(t)$ nach

$$\lim_{t\to\infty} \int_t^{t+1} \{2+\cos(2\pi s)\}\lambda\ \mathrm{d}s = 2\lambda\ .$$

Letztere Aussage könnte man auch mittels partieller Integration (bzw. Fubini) erhalten

$$\begin{aligned}\int_t^{t+1} \{\cos(2\pi s)-\cos(2\pi t)\}\ \mathrm{d}U(s) &= -2\pi \int_t^{t+1} \int_t^s \sin(2\pi v)\ \mathrm{d}v\ \mathrm{d}U(s)\\ &= -2\pi \int_t^{t+1} \sin(2\pi v)(U(t+1)-U(v))\ \mathrm{d}v\ .\end{aligned}$$

Dies konvergiert nach

$$-2\pi\lambda \int_t^{t+1} \sin(2\pi v) \int_v^{t+1}\ \mathrm{d}s\ \mathrm{d}v = \lambda \int_t^{t+1} \{\cos(2\pi s)-\cos(2\pi t)\}\ \mathrm{d}s\ .$$

Dies zeigt, dass der obige Grenzwert korrekt ist.