Nachklausur 13.09.2023

1. **a)** (7 P) Sei $p^{-1} = q^{-1} + r^{-1}$ für $q, r > 0$ und $X \in \mathcal{L}^q$ und $Y \in \mathcal{L}^r$. Zeigen Sie, $XY \in \mathcal{L}^p$ und $\|XY\|_p \le \|X\|_q \|Y\|_r$.

b) (5 P) Sei für $0 < q \le r$ und $\theta \in (0,1)$

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{q} + \frac{\theta}{r}$$

und $X \in \mathcal{L}^r$. Zeigen Sie, $X \in \mathcal{L}^p$ und

$$\|X\|_p \le (\|X\|_q)^{1-\theta} (\|X\|_r)^{\theta} \ .$$

2. Sei $\{Y_i\}$ iid mit $\mathbb{P}[Y_i = 1] = 1 - \mathbb{P}[Y_i = -1] = p \in (0,1)$ und $S_n = \sum_{k=1}^n Y_k$ die zugehörige Irrfahrt. Mit $\mathcal{F}_n$ bezeichnen wir die natürliche Filtration erzeugt durch die $\{Y_k\}$. Wir definieren $T_c = \inf\{n > 0 : S_n = c\} \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ für ein $c \ne 0$ die Erstbesuchszeit von c. Sei $\alpha > 0$.

a) (3 P) Bestimmen Sie β, so dass $L_n = \alpha^{S_n} \beta^n$ ein Martingal ist.

b) (4 P) Zeigen Sie, dass unter dem Mass $\mathbb{P}^*[A] = \mathbb{E}[L_n; A]$ für $A \in \mathcal{F}_n$ der Prozess ebenfalls eine Irrfahrt ist und bestimmen Sie das zugehörige p^*.

c) (2 P) Wie muss α gewählt werden, damit $p^* = \frac{1}{2}$ und bestimmen Sie das zugehörige β.

d) (3 P) Ist $p^* = \frac{1}{2}$, so gilt $\mathbb{P}^*[T_c = n] = \frac{|c|}{n} \mathbb{P}^*[S_n = c]$ (müssen Sie nicht zeigen). Zeigen Sie, $\mathbb{P}[T_c = n] = \frac{|c|}{n} \mathbb{P}[S_n = c]$ auch für $p \ne \frac{1}{2}$.

3. Seien $\{X_k\}$ iid absolutstetig verteilt mit der Dichte $f(x) = \frac{1}{2}|x|\mathrm{e}^{-|x|}$ (also $\mathbb{P}[X_k > x] = \frac{1}{2}(1+x)\mathrm{e}^{-x}$ für $x \ge 0$) und $\{S_n\}$ die zugehörige Irrfahrt.

a) (4 P) Begründen Sie, dass $\mathbb{P}[\mathcal{H}_1^+ > x] = (1 + \beta x)\mathrm{e}^{-x}$ für $x \ge 0$ und für ein $\beta \in (0,1)$, das Sie hier noch nicht berechnen müssen.
Hinweis: Berechnen Sie $\mathbb{P}[X_k > x + c \mid X_k > c]$ und bedingen Sie dann auf $S_{\tau_1^+ - 1}$.

b) (2 P) Begründen Sie, $\mathbb{P}[\mathcal{H}_1^- \le x] = (1 - \beta x)\mathrm{e}^{x}$ für $x \le 0$.

c) (6 P) Bestimmen Sie β.