Lösung der Nachklausur

1. **a)** Ist $X \in \mathcal{L}^q$, dann ist $X^p \in \mathcal{L}^{q/p}$. Analog folgt $Y^p \in \mathcal{L}^{r/p}$. Aus $(q/p)^{-1} + (r/p)^{-1} = 1$, folgt aus der Hölder-Ungleichung, dass $(XY)^p \in \mathcal{L}^1$ und

$$\begin{aligned}\|XY\|_p &= \mathbb{E}[|X|^p|Y|^p]^{1/p} \le (\||X|^p\|_{q/p}\||Y|^p\|_{r/p})^{1/p} \\ &= (\mathbb{E}[(|X|^p)^{q/p}]^{p/q})^{1/p}(\mathbb{E}[(|Y|^p)^{r/p}]^{p/r})^{1/p} = \|X\|_q\|Y\|_r \;.\end{aligned}$$

b) Wir haben $X \in \mathcal{L}^q$, da $q \le r$, $|X|^{1-\theta} \in \mathcal{L}_{q/(1-\theta)}$ und $|X|^\theta \in \mathcal{L}_{r/\theta}$. Somit gilt nach a)

$$\begin{aligned}\|X\|_p &= \||X|^{1-\theta}|X|^\theta\|_p \le \mathbb{E}[(|X|^{1-\theta})^{q/(1-\theta)}]^{(1-\theta)/q}\mathbb{E}[(|X|^\theta)^{r/\theta}]^{\theta/r} \\ &= (\|X\|_q)^{1-\theta}(\|X\|_r)^\theta \;.\end{aligned}$$

2. **a)** L_n ist F_n-messbar, beschränkt und daher integrierbar. Wir haben

$$\beta^n\alpha^{S_n} = \beta^{n+1}\mathbb{E}[\alpha^{S_{n+1}} \mid \mathcal{F}_n] = \beta^{n+1}\alpha^{S_n}\mathbb{E}[\alpha^{Y_{n+1}}] = \beta^{n+1}\alpha^{S_n}(\alpha p+\alpha^{-1}(1-p) \;.$$

Somit muss

$$\beta = \frac{\alpha}{\alpha^2 p + 1 - p}$$

gelten.

b) Wir haben

$$\begin{aligned}\mathbb{P}^*[Y_1 = y_1, \dots, Y_n = y_n] &= \mathbb{E}[\beta^n\alpha^{S_n}; Y_1 = y_1, \dots, Y_n = y_n] \\ &= \prod_{k=1}^n \mathbb{E}[\beta\alpha^{Y_k}; Y_k = y_k] \\ &= \prod_{k=1}^n \mathbb{E}[\beta^n\alpha^{S_n}; Y_k = y_k] = \prod_{k=1}^n \mathbb{P}^*[Y_k = y_k] \;.\end{aligned}$$

Somit sind die $\{Y_k\}$ iid und

$$p^* = \mathbb{P}^*[Y_k = 1] = \alpha\beta p = \frac{\alpha^2 p}{\alpha^2 p + 1 - p} \;.$$

c) Die Gleichung $\alpha^2 p/(\alpha^2 p + 1 - p) = \frac{1}{2}$ hat die Lösung $\alpha = \sqrt{(1-p)/p}$. Damit wird $\beta = \frac{1}{2}(p(1-p))^{-\frac{1}{2}}$.

d) Wir haben

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[T_c = n] &= \mathbb{E}^*[L_n^{-1}; T_c = n] = \frac{1}{\alpha^c \beta^n} \mathbb{P}^*[T_c = n] = \frac{1}{\alpha^c \beta^n} \frac{|c|}{n} \mathbb{P}^*[S_n = c] \\ &= \frac{|c|}{n} \mathbb{E}^*[L_n^{-1}; S_n = c] = \frac{|c|}{n} \mathbb{P}[S_n = c] \; .\end{aligned}$$

3. Da die Verteilung symmetrisch ist, ist die Irrfahrt oszillierend.

a) Wir haben

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[X_k > x + c \mid X_k > c] &= \frac{\mathbb{P}[X_k > x + c]}{\mathbb{P}[X_k > c]} = \frac{\frac{1}{2}(1 + c + x)}{\frac{1}{2}(1+c)} \mathrm{e}^{-x} \\ &= \Big(1 + \frac{x}{1+c}\Big) \mathrm{e}^{-x} \; .\end{aligned}$$

Wenn wir also auf $S_{\tau_1^+ - 1}$ bedingen, erhalten wir

$$\mathbb{P}[\mathcal{H}_1^+ > x] = \mathbb{E}[\mathbb{P}[\mathcal{H}_1^+ > x \mid S_{\tau_1^+ - 1}]] = \mathbb{E}\Big[1 + \frac{x}{1 - S_{\tau_1^+ - 1}}\Big] \mathrm{e}^{-x} \; ,$$

was von der behaupteten Form ist.

b) Die Verteilung der X_k ist symmetrisch. Somit hat $-\mathcal{H}_1^-$ die selbe Verteilung wie $\mathcal{H}_1^+$, also für $x \le 0$,

$$\mathbb{P}[\mathcal{H}_1^- \le x] = \mathbb{P}[-\mathcal{H}_1^- \ge -x] = (1 - \beta x)\mathrm{e}^x \; .$$

c) Die Dichte von $\mathcal{H}_1^+$ ist $(1 - \beta + \beta x)\mathrm{e}^{-x}$, die Dichte von $\mathcal{H}_1^-$ ist $(1 - \beta - \beta x)\mathrm{e}^x$. Die Dichte von $H_+ * H_-$ wird somit für $x \le 0$

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty (1 - \beta - \beta(x - z))\mathrm{e}^{x-z}(1 - \beta + \beta z)\mathrm{e}^{-z} \,\mathrm{d}z \\ &\quad = \int_0^\infty \{(1 - \beta - \beta x)(1 - \beta) + \beta(2 - 2\beta - \beta x)z + \beta^2 z^2\}\mathrm{e}^{-2z} \,\mathrm{d}z \; \mathrm{e}^x \\ &\quad = \Big(\frac{(1 - \beta - \beta x)(1 - \beta)}{2} + \frac{\beta(2 - 2\beta - \beta x)}{4} + \frac{\beta^2}{4}\Big)\mathrm{e}^x \\ &\quad = \frac{\beta(\beta - 2)x + \beta^2 - 2\beta + 2}{4} \mathrm{e}^x \; .\end{aligned}$$

Schreiben wir die Wiener–Hopf Zerlegung mit Dichten, so wird die rechte Seite für $x \le 0$

$$\Big(1 - \beta - \beta x - \frac{\beta(\beta - 2)x + \beta^2 - 2\beta + 2}{4}\Big)\mathrm{e}^x = -\Big(\frac{\beta^2 + 2\beta}{4} x + \frac{\beta^2 + 2\beta - 2}{4}\Big)\mathrm{e}^x \; .$$

Da dies $-\frac{1}{2} x \mathrm{e}^x$ sein muss, gilt $\beta^2 + 2\beta - 2 = 0$. Da $\beta \in (0, 1)$ ist die Lösung $\beta = \sqrt{3} - 1$.