4. Erneuerungsprozesse

Definition 4.1. *Ein* **Punktprozess** $\{N_t\}$ *ist ein wachsender stochastischer Prozess in stetiger Zeit mit* $N_t \in \mathbb{N}$ *für alle* t *und* $N_0 = 0$. *Ein Punktprozess heisst* **einfach**, *falls* $\Delta N_t := N_t - N_{t-} \in \{0, 1\}$ *für alle* t.

Definition 4.2. *Ein stochastischer Prozess* $\{X_t\}$ *hat* **unabhängige Zuwächse**, *falls für alle* $n \in \mathbb{N}$, $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n$ *und* $x_1, \ldots, x_n$,

$$\mathbb{P}[X_{t_k} - X_{t_{k-1}} \le x_k, 1 \le k \le n] = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}[X_{t_k} - X_{t_{k-1}} \le x_k]\ .$$

Ein stochastischer Prozess $\{X_t\}$ *hat* **stationäre Zuwächse**, *falls für alle* $n \in \mathbb{N}$ *und* $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n$, $x_1, \ldots, x_n$ *und* $h > 0$,

$$\mathbb{P}[X_{t_k} - X_{t_{k-1}} \le x_k, 1 \le k \le n] = \mathbb{P}[X_{t_k+h} - X_{t_{k-1}+h} \le x_k, 1 \le k \le n]\ .$$

Bemerkung. Hat ein Prozess unabhängige Zuwächse und gilt $\mathbb{P}[X_{t+h} - X_h \le x] = \mathbb{P}[X_t - X_0 \le x]$ für alle $h \ge 0$, dann hat X auch stationäre Zuwächse. ■

4.1. Poisson-Prozesse

Seien $\{Y_i\}$ unabhängige exponential verteilte Zufallsvariablen mit Parameter λ. Wir definieren $T_0 = 0$ und $T_n = T_{n-1} + Y_n$. Wir interpretieren $\{T_k\}$ als die Zeitpunkte, an denen ein bestimmtes Ereignis auftritt. Sei nun

$$N_t = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{1}_{T_k \le t} = \sup\{n : T_n \le t\}$$

die Anzahl Ereignisse bis zum Zeitpunkt t. Dies ist ein einfacher Punktprozess und hat den Namen **Poisson-Prozess mit Rate** λ.

Bevor wir das nächste Resultat formulieren, benötigen wir noch folgende Notation. Wir sagen $f(h) = o(g(h))$ (für $h \to 0$), falls $\lim_{h\to 0} f(h)/g(h) = 0$. Wir sagen $f(h) = O(g(h)$, falls $|f(h)/g(h)|$ für $|h| \le 1$ beschränkt ist. Sind $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ Zufallsvariablen, so nennen wir die geordneten Variablen $Y_{1:n} \le Y_{2:n} \le \cdots \le Y_{n:n}$ die **Ordnungsstatistik** der Variablen $\{Y_i : 1 \le i \le n\}$.

Wir können den Poisson-Prozess alternativ auch folgendermassen definieren.

Hilfssatz 4.3. *Sei $\{N_t\}$ ein Punktprozess. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

i) *$\{N_t\}$ ist ein Poisson-Prozess mit Rate λ.*

ii) *$\{N_t\}$ hat unabhängige und stationäre Zuwächse und*

$$\mathbb{P}[N_h = 0] = 1 - \lambda h + o(h) \;, \qquad \mathbb{P}[N_h = 1] = \lambda h + o(h) \;.$$

iii) *$\{N_t\}$ hat unabhängige und stationäre Zuwächse, $\mathbb{P}[N_h \ge 2] = o(h)$ und $\mathbb{E}[N_1] = \lambda$.*

iv) *$\{N_t\}$ hat unabhängige Zuwächse und $N_t \sim \mathrm{Pois}(\lambda t)$ für jedes $t > 0$.*

v) *Für jedes $t \ge 0$, $N_t \sim \mathrm{Pois}(\lambda t)$ und, gegeben $\{N_t = n\}$, haben die Punkte $T_1, T_2, \ldots, T_n$ die selbe Verteilung wie die Ordnungsstatistik von n unabhängigen auf $(0, t)$ gleichverteilten Punkten.*

vi) *$\{N_t\}$ hat unabhängige Zuwächse, $\mathbb{E}[N_1] = \lambda$ und, gegeben $\{N_t = n\}$, haben die Punkte $T_1, T_2, \ldots, T_n$ die selbe Verteilung wie die Ordnungsstatistik von n unabhängigen auf $(0, t)$ gleichverteilten Punkten.*

Beweis. “ii) $\Longrightarrow$ iv)” Sei $p_n(t) = \mathbb{P}[N_t = n]$. Wir haben dann

$$p_0(t+h) = \mathbb{P}[N_{t+h} - N_t = 0, N_t = 0] = \mathbb{P}[N_h = 0] p_0(t) = (1 - \lambda h) p_0(t) + o(h) \;.$$

Also ist $p_0(t)$ rechtsstetig und

$$\frac{p_0(t+h) - p_0(t)}{h} = -\lambda p_0(t) + o(1) \;.$$

Somit existiert die Ableitung von rechts und ist $-\lambda p_0(t)$. Ersetzen wir t durch $t-h$, erhalten wir

$$p_0(t) = (1 - \lambda h) p_0(t-h) + o(h) \;.$$

Somit ist $p_0(t)$ stetig und es folgt wie oben, dass $p_0(t)$ differenzierbar ist und die Gleichung $p_0'(t) = -\lambda p_0(t)$ erfüllt. Da $p_0(0) = 1$, erhalten wir die Lösung $p_0(t) = \mathrm{e}^{-\lambda t}$.

Sei nun $n \ge 1$ und nehmen wir $p_{n-1}(t) = (\lambda t)^{n-1} \mathrm{e}^{-\lambda t}/(n-1)!$ an. Wie oben erhalten wir

$$p_n(t+h) = (1 - \lambda h) p_n(t) + \lambda h p_{n-1}(t) + o(h) \;.$$

Also ist $p_n(t)$ rechtstetig. Da

$$\frac{p_n(t+h)-p_n(t)}{h} = -\lambda p_n(t) + \lambda p_{n-1}(t) + o(1)\ ,$$

ist $p_n(t)$ differenzierbar mit der Ableitung $-\lambda p_n(t) + \lambda p_{n-1}(t)$. Die Differenzierbarkeit von links folgt analog. Die Lösung der Differentialgleichung $p_n'(t) = -\lambda p_n(t) + \lambda p_{n-1}(t)$ mit $p_n(0) = 0$ ist $p_n(t) = (\lambda t)^n \mathrm{e}^{-\lambda t}/n!$. Somit ist N_t Poisson verteilt.
"iv) $\Longrightarrow$ i)" Wir zeigen zuerst, dass N stationäre Zuwächse hat. Wir haben

$$\mathbb{E}[s^{N_{t+h}-N_t}]\mathrm{e}^{-\lambda t(1-s)} = \mathbb{E}[s^{N_{t+h}-N_t}]\mathbb{E}[s^{N_t}] = \mathbb{E}[s^{N_{t+h}}] = \mathrm{e}^{-\lambda(t+h)(1-s)}\ .$$

Somit ist $\mathbb{E}[s^{N_{t+h}-N_t}] = \mathrm{e}^{-\lambda h(1-s)} = \mathbb{E}[s^{N_h}]$. Also hat N stationäre Zuwächse.

Sei $t_0 = 0 \le s_1 < t_1 \le s_2 < t_2 \le \cdots \le s_n < t_n$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}[s_k < T_k \le t_k, 1 \le k \le n] \\
&\quad = \mathbb{P}[N_{s_k} - N_{t_{k-1}} = 0, N_{t_k} - N_{s_k} = 1,\ 1 \le k \le n-1, \\
&\qquad\qquad N_{s_n} - N_{t_{n-1}} = 0, N_{t_n} - N_{s_n} \ge 1] \\
&\quad = \mathrm{e}^{-\lambda(s_n - t_{n-1})}(1 - \mathrm{e}^{-\lambda(t_n - s_n)}) \prod_{k=1}^{n-1} \mathrm{e}^{-\lambda(s_k - t_{k-1})}\lambda(t_k - s_k)\mathrm{e}^{-\lambda(t_k - s_k)} \\
&\quad = (\mathrm{e}^{-\lambda s_n} - \mathrm{e}^{-\lambda t_n})\lambda^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1}(t_k - s_k) \\
&\quad = \int_{s_1}^{t_1} \cdots \int_{s_n}^{t_n} \lambda^n \mathrm{e}^{-\lambda y_n}\ \mathrm{d}y_n \cdots \mathrm{d}y_1 \\
&\quad = \int_{s_1}^{t_1} \int_{s_2 - z_1}^{t_2 - z_1} \cdots \int_{s_n - z_1 - \cdots - z_{n-1}}^{t_n - z_1 - \cdots - z_{n-1}} \lambda^n \mathrm{e}^{-\lambda(z_1 + \cdots + z_n)}\ \mathrm{d}z_n \cdots \mathrm{d}z_1\ .
\end{aligned}$$

Durch Transformation der Variablen erhalten wir, dass $T_1, T_2 - T_1, \ldots, T_n - T_{n-1}$ die Dichte

$$\lambda^n \mathrm{e}^{-\lambda(z_1 + \cdots + z_n)}$$

hat. Somit sind die Variablen unabhängig und exponential verteilt.
"i) $\Longrightarrow$ v)" Die Verteilung von T_n ist $\Gamma(n, \lambda)$. Also haben wir $\mathbb{P}[N_t = 0] = \mathbb{P}[T_1 > t] = \mathrm{e}^{-\lambda t}$. Für $n \ge 1$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[N_t = n] &= \mathbb{P}[N_t \ge n] - \mathbb{P}[N_t \ge n+1] \\
&= \mathbb{P}[T_n \le t] - \mathbb{P}[T_{n+1} \le t] \\
&= \int_0^t \frac{\lambda^n s^{n-1}}{(n-1)!}\mathrm{e}^{-\lambda s}\ \mathrm{d}s - \int_0^t \frac{\lambda^{n+1} s^n}{n!}\mathrm{e}^{-\lambda s}\ \mathrm{d}s \\
&= \int_0^t \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\Bigl[\frac{(\lambda s)^n}{n!}\mathrm{e}^{-\lambda s}\Bigr]\ \mathrm{d}s = \frac{(\lambda t)^n}{n!}\mathrm{e}^{-\lambda t}\ .
\end{aligned}$$

Also ist N_t Poi(λt) verteilt. Die gemeinsame Dichte von $T_1, \ldots, T_{n+1}$ ist für $t_0 = 0$

$$\prod_{k=1}^{n+1} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda(t_k - t_{k-1})} = \lambda^{n+1} \mathrm{e}^{-\lambda t_{n+1}} .$$

Gegeben $\{N_t = n\}$, ist die bedingte Dichte von $T_1, \ldots, T_n$

$$\frac{\int_t^\infty \lambda^{n+1} \mathrm{e}^{-\lambda t_{n+1}} \,\mathrm{d}t_{n+1}}{\int_0^t \int_{t_1}^t \cdots \int_{t_{n-1}}^t \int_t^\infty \lambda^{n+1} \mathrm{e}^{-\lambda t_{n+1}} \,\mathrm{d}t_{n+1} \cdots \mathrm{d}t_1} = \frac{n!}{t^n} .$$

Dies ist die Verteilung der Ordnungsstatistik von n auf $(0, t)$ gleichverteilten Variablen.

"v) $\Longrightarrow$ vi)" $\mathbb{E}[N_1] = \lambda$ ist klar. Wir müssen noch zeigen, dass N unabhängige Zuwächse hat. Sei $x_k \in \mathbb{N}$ und $t_0 = 0 < t_1 < \cdots < t_n$. Dann gilt für $x = x_1 + \cdots + x_n$

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}[N_{t_k} - N_{t_{k-1}} = x_k, 1 \le k \le n] \\ &\qquad = \mathbb{P}[N_{t_k} - N_{t_{k-1}} = x_k, 1 \le k \le n \mid N_{t_n} = x] \mathbb{P}[N_{t_n} = x] \\ &\qquad = \frac{(\lambda t_n)^x}{x!} \mathrm{e}^{-\lambda t_n} \frac{x!}{x_1! \cdots x_n!} \prod_{k=1}^n \Bigl(\frac{t_k - t_{k-1}}{t_n} \Bigr)^{x_k} = \prod_{k=1}^n \frac{(\lambda(t_k - t_{k-1}))^{x_k}}{x_k!} \mathrm{e}^{-\lambda(t_k - t_{k-1})} . \end{aligned}$$

Also hat N unabhängige Zuwächse.

"vi) $\Longrightarrow$ ii)" Für $x_k \in \mathbb{N}$, $t_0 = 0 < t_1 < \cdots < t_n$ und $h > 0$ gilt

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}[N_{t_k + h} - N_{t_{k-1} + h} = x_k, 1 \le k \le n \mid N_{t_n + h}] \\ &\qquad = \mathbb{P}[N_{t_k} - N_{t_{k-1}} = x_k, 1 \le k \le n \mid N_{t_n + h}] . \end{aligned}$$

Integration über $N_{t_n + h}$ zeigt, dass N stationäre Zuwächse hat.

Wir haben mit monotoner Konvergenz

$$\begin{aligned} \lim_{h \downarrow 0} \frac{1 - \mathbb{P}[N_h = 0]}{h} &= \lim_{h \downarrow 0} \frac{1 - \sum_{k=0}^\infty \mathbb{P}[N_1 = k](1-h)^k}{h} \\ &= \lim_{h \downarrow 0} \sum_{k=0}^\infty \mathbb{P}[N_1 = k] \frac{1 - (1-h)^k}{h} = \sum_{k=0}^\infty \mathbb{P}[N_1 = k] k = \mathbb{E}[N_1] = \lambda . \end{aligned}$$

Weiter gilt

$$\lim_{h \downarrow 0} \frac{\mathbb{P}[N_h = 1]}{h} = \lim_{h \downarrow 0} \sum_{k=1}^\infty \mathbb{P}[N_1 = k] \frac{kh(1-h)^{k-1}}{h} = \sum_{k=1}^\infty \mathbb{P}[N_1 = k] k = \mathbb{E}[N_1] = \lambda .$$

Dies beweist die Aussage.

"ii) $\Longrightarrow$ iii)" Folgt sofort aus ii) und vi).

"iii) $\Longrightarrow$ ii)" Für $\mathbb{P}[N_t = 0]$ erhalten wir

$$\mathbb{P}[N_{t+s} = 0] = \mathbb{P}[N_{t+s} - N_s = 0, N_s = 0] = \mathbb{P}[N_t = 0] \mathbb{P}[N_s = 0] .$$

Da die Funktion fallend ist, folgt einfach, dass $\mathbb{P}[N_t = 0] = (\mathbb{P}[N_1 = 0])^t$. Sei $\lambda_0 := -\log \mathbb{P}[N_1 = 0]$. Dann haben wir $\mathbb{P}[N_t = 0] = \mathrm{e}^{-\lambda_0 t} = 1 - \lambda_0 t + o(t)$. Weiter ist $\mathbb{P}[N_h = 1] = 1 - \mathbb{P}[N_h = 0] - \mathbb{P}[N_h \ge 2] = \lambda_0 h + o(h)$. Also ist N ein Poisson-Prozess with rate λ_0. Aus "ii) $\iff$ vi)" schliessen wir, dass $\lambda_0 = \mathbb{E}[N_1] = \lambda$. □

Dass $\mathbb{E}[N_1] = \lambda$ in iii) und vi) benötigen wir nur, um die Rate zu bestimmen. Aus dem Beweis schliessen wir, dass $\mathbb{E}[N_t] < \infty$ und somit, dass N ein Poisson-Prozess ist. Hier erlauben wir, dass $\lambda = 0$, das heisst $N_t = 0$ und damit N degeneriert ist.

Der Poisson-Prozess hat folgende Eigenschaften.

Hilfssatz 4.4. *Seien $\{N_t\}$ and $\{\tilde{N}_t\}$ zwei unabhängige Poisson-Prozesse mit Raten λ und $\tilde{\lambda}$. Sei $\{I_i : i \in \mathbb{N}\}$ eine iid Folge von Zufallsvariablen unabhängig von $\{N_t\}$ mit $\mathbb{P}[I_i = 1] = 1 - \mathbb{P}[I_i = 0] = q$ für ein $q \in (0,1)$. Sei weiter $a > 0$ eine reelle Zahl. Dann gilt*

i) $\{N_t + \tilde{N}_t\}$ *ist ein Poisson-Prozess mit Rate* $\lambda + \tilde{\lambda}$.

ii) $\Big\{\sum_{i=1}^{N_t} I_i\Big\}$ *und* $\Big\{\sum_{i=1}^{N_t} (1 - I_i)\Big\}$ *sind unabhängige Poisson-Prozesse mit Raten* λq *und* $\lambda(1-q)$.

iii) $\{N_{at}\}$ *ist ein Poisson-Prozess mit Rate* λa.

Beweis. Übung. □

Definition 4.5. *Sei $\Lambda(t)$ eine wachsende rechtsstetige Funktion auf $[0,\infty)$ mit $\Lambda(0) = 0$. Ein Punkt-Prozess $\{N_t\}$ auf $[0,\infty)$ heisst* **inhomogener Poisson-Prozess** *mit* **Intensitätsmass** *$\Lambda(t)$ falls*

i) $\{N_t\}$ *hat unabhängige Zuwächse,*

ii) $N_t - N_s \sim \mathrm{Pois}(\Lambda(t) - \Lambda(s))$.

Falls es eine messbare Funktion $\lambda(t)$ gibt, so dass $\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(s)\,\mathrm{d}s$, dann heisst $\lambda(t)$ **Intensität** *oder* **Rate** *des inhomogenen Poisson-Prozesses.*

Wir setzen $\Lambda^{-1}(x) = \sup\{t \ge 0 : \Lambda(t) \le x\}$ die inverse Funktion von $\Lambda(t)$. Folgendes Resultat zeigt, dass der inhomogene Poisson-Prozess existiert.

Proposition 4.6. *Sei $\{\tilde{N}_t\}$ ein homogener Poisson-Prozess mit Rate* 1*. Setzen wir $N_t = \tilde{N}_{\Lambda(t)}$. Dann ist $\{N_t\}$ ein inhomogener Poisson-Prozess mit Intensitätsmass $\Lambda(t)$. Umgekehrt, sei $\{N_t\}$ ein inhomogener Poisson-Prozess mit Intensitätsmass $\Lambda(t)$. Wir setzen $\tilde{N}_t = N_{\Lambda^{-1}(t)}$ an allen Stellen, an denen $\Lambda(\Lambda^{-1}(t)) = t$. Auf den Intervallen $(\Lambda(\Lambda^{-1}(t)-), \Lambda(\Lambda^{-1}(t)))$ mit $\Lambda(\Lambda^{-1}(t)) \neq t$, konstruieren wir $N_{\Lambda^{-1}(t)} - N_{(\Lambda^{-1}(t)-)}$ Ereigniszeiten auf dem Intervall $(\Lambda(\Lambda^{-1}(t)-), \Lambda(\Lambda^{-1}(t)))$ gleichverteilt, unabhängig von $\{N_t\}$. Dann ist $\{\tilde{N}_t\}$ ein homogener Poisson-Prozess mit Rate* 1*.*

Beweis. Der Prozess N hat unabhängige Zuwächse. Da $\tilde{N}_{\Lambda(t)} - \tilde{N}_{\Lambda(s)}$ Poissonverteilt ist, mit Mittelwert $\Lambda(t) - \Lambda(s)$ folgt die erste Aussage. Sei nun N ein inhomogener Poisson-Prozess mit Intensitätsmass $\Lambda(t)$. Es ist klar, dass $\{\tilde{N}_t\}$ unabhängige Zuwächse hat. Sei $\Lambda(\Lambda^{-1}(t)) = t$. Dann ist $\tilde{N}_t$ Poissonverteilt mit Parameter $\Lambda(\Lambda^{-1}(t)) = t$. Wir müssen noch die Verteilung auf $(\Lambda(\Lambda^{-1}(t)-), \Lambda(\Lambda^{-1}(t)))$ zeigen. Wir haben $\tilde{N}_{\Lambda(\Lambda^{-1}(t)-)}$ ist Poisson verteilt mit Parameter $\Lambda(\Lambda^{-1}(t)-)$. $\tilde{N}$ ist ein Poisson-Prozess mit Rate 1 auf $(\Lambda(\Lambda^{-1}(t)-), \Lambda(\Lambda^{-1}(t)))$. Somit ist $\tilde{N}_t - \tilde{N}_{\Lambda(\Lambda^{-1}(t)-)}$ Poissonverteilt mit Parameter $t - \Lambda(\Lambda^{-1}(t)-)$. Da die beiden Verteilungen unabhängig sind, ist $\tilde{N}_t$ Poissonverteilt mit Parameter t. Also ist $\tilde{N}$ ein Poisson-Prozess mit Rate 1. □

Aus der Eigenschaft der unabhängigen Zuwächse erhalten wir folgendes Resultat. Wir können das Resultat in diskreter Zeit mit $I = \{t_0, t_1, \ldots\}$ auffassen oder als Resultat in stetiger Zeit (siehe Definiton 6.1).

Hilfssatz 4.7. *Sei $r \in \mathbb{R}$. Folgende Prozesse sind Martingale:*

i) $$\{N_t - \Lambda(t)\}\;.$$

ii) $$\{(N_t - \Lambda(t))^2 - \Lambda(t)\}\;.$$

iii) $$\{\exp\{rN_t - \Lambda(t)(\mathrm{e}^r - 1)\}\}\;.$$

Beweis. Übung. □

Betrachten wir das diskrete Martingal $\{N_n - \Lambda(n) : n \in \mathbb{N}\}$, so erhalten wir den Varianz-Prozess $V_n = \Lambda(n)$. Ist nun $\{\Lambda(\infty) = \infty\}$, so finden wir dann also

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{N_n - \Lambda(n)}{\sqrt{2\Lambda(n)\log\log\Lambda(n)}} = 1\;, \qquad \varliminf_{n\to\infty} \frac{N_n - \Lambda(n)}{\sqrt{2\Lambda(n)\log\log\Lambda(n)}} = -1\;.$$

4.2. Erneuerungsprozesse

Wir verallgemeinern nun die Poisson-Prozesse. Seien $\{Y_i\}$ unabhängige Zufallsvariablen, wobei $\{Y_i : i \geq 2\}$ die gleiche Verteilung $F(y)$ haben und Y_1 die Verteilung $F_1(y)$ hat. Es gelte $F(0) = F_1(0) = 0$. Wir setzen $T_1 = Y_1$ und $T_n = T_{n-1} + Y_n$ für alle $n \geq 2$. Die Variable $N_t = \sup\{n : T_n \leq t\}$ zählt die Anzahl Erneuerungen bis zum Zeitpunkt t.

Definition 4.8. *Der Punktprozess $\{N_t\}$ heisst* **Erneuerungsprozess***. Ist $F_1 = F$, so heisst der Erneuerungsprozess* **gewöhnlich***, sonst* **verzögert***. Ist $\mathbb{E}[Y_2] < \infty$ und*

$$F_1(y) = \frac{1}{\mathbb{E}[Y_2]} \int_0^y (1 - F(x)) \,\mathrm{d}x \,,$$

so heisst der Erneuerungsprozess **stationär***. Die Funktion $U(t) = 1\!\!1_{\{t \geq 0\}} + \mathbb{E}[N_t]$ heisst* **Erneuerungsmass***.*

Ein Spezialfall eines Erneuerungsprozesses ist der Poisson-Prozess. Dieser ist sowohl gewöhnlich als auch stationär. Das Erneuerungsmass wird $1\!\!1_{\{t\geq 0\}}(1 + \lambda t)$.

Wir setzen nun $\lambda = \mathbb{E}[Y_2]^{-1}$ mit der Interpretation 0, falls $\mathbb{E}[Y_2] = \infty$. Für den Moment betrachten wir nur gewöhnliche Erneuerungsprozesse. Wir definieren $F^{*0}(t) = 1\!\!1_{\{t\geq 0\}}$ und $F^{*(n+1)}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F^{*n}(t-y) \,\mathrm{d}F(y)$. Für positive Variablen lässt sich dies schreiben als $F^{*(n+1)}(t) = \int_0^t F^{*n}(t-y) \,\mathrm{d}F(y)$. Dann ist $F^{*n}(t)$ die Verteilungsfunktion von $\sum_{k=1}^n Y_k$ (im gewöhnlichen Fall). Dann können wir das Erneuerungsmass folgendermassen ausdrücken.

Hilfssatz 4.9. *Wir haben*

$$U(t) = \sum_{n=0}^{\infty} F^{*n}(t)\,.$$

Insbesondere ist der Wert $U(t)$ endlich für alle t.

Beweis. Wir haben

$$\mathbb{E}[N_t] = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}[N_t \geq n] = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}[T_n \leq t] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{*n}(t)\,.$$

Es gibt ein n_0, so dass $F^{*n_0}(t) < 1$, da $F^{*n_0}(t) \leq 1-(1-F(t/n_0))^{n_0}$ und $F(t/n_0) < 1$ für n_0 gross genug. Dann ist $F^{*n}(t) \leq (F^{*n_0}(t))^{\lfloor n/n_0 \rfloor}$ und

$$U(t) = \sum_{n=0}^{\infty} F^{*n}(t) \leq n_0 \sum_{k=0}^{\infty} (F^{*n_0}(t))^k = \frac{n_0}{1 - F^{*n_0}(t)} < \infty\,.$$

□

Oft muss man eine Gleichung der Form

$$Z(x) = z(x) + \int_0^x Z(x-y)\,\mathrm{d}F(y) \qquad (x \ge 0) \tag{4.1}$$

lösen, wobei $z(x)$ bekannt ist und $Z(x)$ gesucht wird. Wir nehmen an, dass $z(x)$ beschränkt ist auf beschränkten Intervallen. Diese Gleichung heisst **Erneuerungsgleichung**. Die Lösung ist einfach.

Proposition 4.10. *Die Funktion $Z(x) = \int_{0-}^x z(x-y)\,\mathrm{d}U(y) = z * U(x)$ ist die einzige Lösung von (4.1), die beschränkt ist auf beschränkten Intervallen.*

Beweis. Da sich die Erneuerungsgleichung als $Z = z * F^{*0} + Z * F$ schreiben lässt, folgt durch Einsetzen, dass Z eine Lösung ist. Nehmen wir nun an, dass Z_1 eine Lösung ist, die auf beschränkten Intervallen beschränkt ist. Dann erfüllt $Z_1 - Z$ die Gleichung (4.1) mit $z(x) = 0$. Insbesondere haben wir

$$\begin{aligned} |Z_1(x) - Z(x)| &\le \int_0^x |Z_1(x-y) - Z(x-y)|\,\mathrm{d}F(y) \\ &\le \int_0^x |Z_1(x-y) - Z(x-y)|\,\mathrm{d}F^{*2}(y) \\ &\le \cdots \le \int_0^x |Z_1(x-y) - Z(x-y)|\,\mathrm{d}F^{*n}(y)\;. \end{aligned}$$

Lassen wir $n \to \infty$, dann konvergiert die rechte Seite gegen Null. Also ist $Z_1(x) = Z(x)$. □

Das Resultat zeigt uns insbesondere, dass U die Erneuerungsgleichung

$$U(x) = 1\!\!\mathrm{I}_{x \ge 0} + \int_0^x U(x-y)\,\mathrm{d}F(y) \tag{4.2}$$

erfüllt. Das hätten wir auch folgendermassen erhalten können. Sei $x \ge 0$. Mit Wahrscheinlichkeit $1 - F(x)$ gibt es kein Ereignis im Intervall $(0, x]$. Dann ist der gesuchte Wert $1 + N_x$ gleich 1. Das erste Ereignis hat die Verteilungsfunktion $F(y)$. Tritt das Ereignis im Zeitpunkt $y \le x$ ein, dann startet im Zeitpunkt y ein neuer Erneuerungsprozess $\tilde{N}_{t-y}$. Wir sind dann an $2 + \tilde{N}_{x-y}$ interessiert. Der bedingte Erwartungswert wird dann $\mathbb{E}[2 + \tilde{N}_{x-y} \mid T_1 = y] = 1 + U(x-y)$. Also erfüllt $U(x)$

$$U(x) = 1 - F(x) + \int_0^x (1 + U(x-y))\,\mathrm{d}F(y) = 1 + \int_0^x U(x-y)\,\mathrm{d}F(y)\;.$$

Bevor wir zum Hauptresultat der Erneuerungstheorie kommen, benötigen wir ein paar technische Werkzeuge.

Hilfssatz 4.11. *Seien $\{u_n\}$ reelle Funktionen und $\{a_k : k \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$. Dann gibt es eine Teilfolge $\{u_{n_k}\}$, so dass für alle m, $\{u_{n_k}(a_m)\}$ in $[-\infty, \infty]$ konvergiert.*

Beweis. Es gibt eine Teilfolge $\{u_{n_{1,k}}\}$, so dass $\{u_{n_{1,k}}(a_1)\}$ konvergiert. Davon gibt es eine Teilfolge $\{u_{n_{2,k}}\}$, so dass $\{u_{n_{2,k}}(a_2)\}$ konvergiert. Analog konstruieren wir $\{n_{\ell,k}\}$. Setzen wir $n_k = n_{k,k}$, folgt die Aussage. □

Proposition 4.12. *Seien $\{\mu_n\}$ Masse auf $\mathbb{R}$, so dass für jedes x $\mu_n((-x, x))$ beschränkt ist. Dann gibt es eine Teilfolge $\{n_k\}$ und ein Mass μ, so dass $\{\mu_{n_k}\}$ schwach gegen μ konvergiert. Ist $\mu_n(\mathbb{R})$ beschränkt, so ist $\mu(\mathbb{R}) \le \overline{\lim}\, \mu_{n_k}(\mathbb{R})$.*

Beweis. Sei $\{a_k : k \in \mathbb{N}\} = \mathbb{Q}$ und $u_n(x) = \mu_n((0, x])$, falls $x > 0$, $u_n(x) = -\mu_n((x, 0])$, falls $x < 0$ und $u_n(0) = 0$. Dann gibt es infolge des Hilfssatzes 4.11 eine Funktion $u(x)$ und eine Folge $\{n_k\}$, so dass $u_{n_k}(x) \to u(x)$ für $x \in \mathbb{Q}$. Wir haben dann $u(x)$ ist endlich und wachsend mit $u(0) = 0$. Setzen wir $\mu((0, x]) = u(x+)$ für $x > 0$ und $\mu((x, 0]) = -u(x+)$ für $x < 0$. Dies definiert ein Mass auf $\mathbb{R}$. Seien nun $a < b$ mit $\mu(\{a, b\}) = 0$. Dann konvergiert $\mu_{n_k}((a, b])$ nach $\mu((a, b])$. Insbesondere ist $\overline{\lim}\, \mu_{n_k}((a, b)) \le \mu((a, b]) = \mu((a, b))$. Wir wählen $\varepsilon > 0$. Es gibt $x, y \in \mathbb{Q}$ mit $a < y < x < b$, so dass $\mu((y, x]) > \mu((a, b)) - \varepsilon$. Da $\mu_{n_k}((y, x])$ gegen $\mu((y, x])$ konvergiert, haben wir $\underline{\lim}\, \mu_{n_k}((a, b)) \ge \underline{\lim}\, \mu_{n_k}((y, x]) = \mu((y, x]) > \mu((a, b)) - \varepsilon$. Da ε beliebig war, folgt die schwache Konvergenz des Masses. □

Wir sagen eine Verteilungsfunktion $F(x)$ auf $[0, \infty)$ ist **arithmetisch**, falls es ein $\gamma > 0$ gibt, so dass $\sum_{k=0}^{\infty} F(\gamma k) - F(\gamma k-) = 1$, also $\mathbb{P}[Y/\gamma \in \mathbb{N}] = 1$. Die grösste solche Zahl γ nennen wir **Spannweite**.

Satz 4.13. (Blackwells Erneuerungstheorem) *Ist $F(x)$ nicht arithmetisch, dann haben wir*

$$\lim_{x \to \infty} U(x) - U(x - y) = \lambda y$$

für alle $y \in \mathbb{R}$. Ist $F(x)$ arithmetisch mit Spannweite γ, dann haben wir

$$\lim_{x \to \infty} U(x) - U(x - \gamma) = \lambda \gamma \,.$$

Beweis. Beginnen wir mit dem arithmetischen Fall. Wir können $\gamma = 1$ und $x \in \mathbb{N}$ annehmen. Setzen wir $u_0 = 1$ und $u_n = U(n) - U(n-1)$ und $f_k = \mathbb{P}[Y = k]$, so erfüllt $\{u_n\}$

$$u_n = \sum_{k=1}^{n-1} u_{n-k} f_k + u_0 f_n = \sum_{k=1}^{n} u_{n-k} f_k \,. \tag{4.3}$$

Wir erhalten dann durch Induktion $u_n \in [0,1]$. Es gibt eine Teilfolge $\{u_{n_k}\}$, so dass $u_{n_k} \to \eta = \overline{\lim}_{n\to\infty} u_n$. Sein nun $u_n = 0$ für $n < 0$. Wir definieren für $\ell \in \mathbb{Z}$ die Folge $u_\ell^{(k)} = u_{n_k+\ell}$. Es gibt nun wie in Hilfssatz 4.11 eine Folge $\{k_m\}$, so dass $\{u_\ell^{(k_m)}\}$ für jedes ℓ konvergiert. Nennen wir den Grenzwert w_ℓ. Wir haben dann $w_0 = \eta$. Wir haben weiter

$$u_\ell^{(k)} = \sum_{m=1}^\infty u_{\ell-m}^{(k)} f_m \;,$$

und im Grenzwert

$$w_\ell = \sum_{m=1}^\infty w_{\ell-m} f_m \;.$$

Da

$$\eta = w_0 = \sum_{m=1}^\infty w_{-m} f_m \le \sum_{m=1}^\infty \eta f_m = \eta \;,$$

folgern wir, dass $w_{-m} = \eta$ für alle m, so dass $f_m \neq 0$. Das Argument funktioniert dann auch für w_{-m} und $w_{-m-n} = \eta$, falls $f_n \neq 0$. Somit erhalten wir $w_{-m} = \eta$, falls $m = p_1 a_1 + \ldots + p_r a_r$ für alle a_i mit $f_i \neq 0$. Es gibt $r \in \mathbb{N}$, ganze Zahlen c_i und natürliche Zahlen a_i, so dass $\sum_{k=1}^r c_k a_k = 1$. Sei $s = \sum_{k=1}^r a_k$. Jede Zahl lässt sich als $n = xs + y$ darstellen, wobei $0 \le y < s$. Ist $x \ge s|c_i|$ und $n = \sum_{k=1}^r (x + yc_k) a_k$, so schliessen wir, dass $w_{-n} = \eta$ für $n \ge x$. Einsetzen ergibt, dass $w_{-x+1} = \eta$ und durch Induktion, $w_n = \eta$ für alle n. Sei nun $\rho_n = \mathbb{P}[Y > n]$. Aus der Gleichung (4.3) erhalten wir

$$\sum_{n=1}^N u_n = \sum_{n=1}^N \sum_{k=0}^{n-1} f_{n-k} u_k = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{n=k+1}^{N} f_{n-k} u_k = \sum_{k=0}^{N-1} (1 - \rho_{N-k}) u_k = \sum_{k=0}^{N} (1 - \rho_{N-k}) u_k \;.$$

Wir erhalten also

$$\sum_{k=0}^N \rho_k u_{N-k} = \sum_{k=0}^N \rho_{N-k} u_k = u_0 = 1 \;.$$

Da $\{u_{n_k - m}\}$ gegen η konvergiert, schliessen wir im Fall $\mathbb{E}[Y] = \sum_{k=0}^\infty \rho_k = \infty$, dass $\eta = 0$ und damit $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$. Ist $\mathbb{E}[Y] < \infty$, folgern wir durch Grenzwertbildung, dass $\eta = \lambda$. Somit gibt es ein n_0, so dass $u_n < \lambda + \varepsilon$ und $\sum_{k=n_0+1}^\infty \rho_k < \varepsilon$ für $n \ge n_0$ gilt. Dann haben wir für $n > 2n_0$

$$1 \le u_n + \sum_{k=1}^{n_0} \rho_k (\lambda + \varepsilon) + \sum_{k=n_0+1}^\infty \rho_k < u_n + (\mathbb{E}[Y] - 1)(\lambda + \varepsilon) + \varepsilon = u_n + 1 - \lambda + \mathbb{E}[Y]\varepsilon \;.$$

Also ist $u_n > \lambda - \mathbb{E}[Y]\varepsilon$ und $\{u_n\}$ konvergiert gegen λ.

Sei nun $F(x)$ nicht arithmetisch. Wir setzen $U_n(x) = \sum_{k=0}^n F^{*k}(x)$. Dann können wir

$$1 - F^{*(n+1)}(x) = \int_0^x (1 - F(x-y)) \,\mathrm{d}U_n(y)$$

schreiben. Wählen wir nun echt positive Zahlen η und τ, so dass $1-F(\tau) > \eta$. Dann erhalten wir

$$\eta[U_n(x) - U_n(x-\tau)] \le \int_{x-\tau}^x (1 - F(x-y)) \,\mathrm{d}U_n(y) \le 1 - F^{*(n+1)}(x) \le 1 \;.$$

Lassen wir $n \to \infty$, erhalten wir $U(x)-U(x-a) \le \eta^{-1}$ für jedes $a \le \tau$. Insbesondere ist $U(x)-U(x-a) \le (a+\tau)/(\tau\eta) = C_a$ für jedes a, da es maximal $(1+a/\tau)$ Intervalle der Länge τ braucht, um ein Intervall der Länge a zu überdecken. Sei $I = [\alpha, \beta]$ ein Intervall und $I + t = [\alpha + t, \beta + t]$ das verschobene Intervall. $U(I + t)$ ist dann beschränkt für alle endlichen Intervalle I. Es gibt daher eine Folge $\{t_n\}$, die nach Unendlich konvergiert, so dass $\lim_{n\to\infty} U(I+t_n) = V(I)$ für ein Mass V. Sei nun $z(x)$ eine stetig differenzierbare Funktion auf $\mathbb{R}$, die ausserhalb von $(0, h)$ verschwindet. Sei $Z(x)$ die Lösung der Erneuerungsgleichung (4.1). $z(x + \delta) - z(x)$ verschwindet ausserhalb von $(-\delta, h)$. Aus

$$Z(x+\delta) - Z(x) = \int_0^{x+\delta} (z(x+\delta-y) - z(x-y)) \,\mathrm{d}U(y)$$

schliessen wir, dass $|Z(x + \delta) - Z(x)| \le C_{\delta+2h} \max_y |z(y + \delta) - z(y)|$. Da $z(x)$ gleichmässig stetig ist, folgt dass $Z(x)$ gleichmässig stetig ist. Wir schliessen, dass $Z(x)$ differenzierbar ist, und dass $Z'(x) = z'(x) + \int_0^x Z'(x-y) \,\mathrm{d}F(y)$. Somit ist $Z'(x) = z' * U(x)$ beschränkt und nach dem obigen Beweis gleichmässig stetig. Wir wählen nun eine Folge s_k, die nach Unendlich konvergiert, so dass $Z'(s_k) \to \overline{\lim}_x Z'(x) = \xi$. Die Familie $\zeta_n(x) = Z'(s_n + x)$ ist dann gleichmässig stetig und erfüllt

$$\zeta_n(x) = z'(x+s_n) + \int_0^{x+s_n} \zeta_n(x-y) \,\mathrm{d}F(y) \;.$$

Es gibt dann eine konvergente Teilfolge, die gegen einen Grenzwert $\zeta(x)$ konvergiert. Die Grenzfunktion erfüllt

$$\zeta(x) = \int_0^\infty \zeta(x-y) \,\mathrm{d}F(y) \;.$$

Durch Induktion erhalten wir

$$\zeta(x) = \int_0^\infty \zeta(x-y) \,\mathrm{d}F^{*n}(y) \;.$$

Wir haben weiter $\zeta(x) \le \xi = \zeta(0)$. Also folgt, dass $\zeta(-x) = \zeta(0)$ an allen Punkten, an denen F^{*n} wächst. Da F nicht arithmetisch ist, muss $\zeta(-x)$ gegen ξ konvergieren, da die Menge der Punkte, an denen $F^{*n}(x)$ für ein n wächst, asymptotisch dicht ist. Insbesondere gilt für jedes x, dass $\zeta(x) = \lim_{n\to\infty} \int \zeta(x-y)\, \mathrm{d}F^{*n}(y) = \xi$. Somit konvergiert $Z'(s_{n_k}+x)$ gegen ξ, also $Z(s_{n_k}+a) - Z(s_{n_k}) \to \xi a$. Da dies für alle a gilt und $Z(t)$ beschränkt ist, muss $\xi = 0$ gelten. Das gleiche Argument funktioniert für den $\underline{\lim}$. Somit konvergiert $Z'(t)$ gegen Null. Wir haben dann, dass der Grenzwert

$$Z(t_k + x) = \int_0^h z(h-y) U(t_k + x - h + \mathrm{d}y) \to \int_0^h z(h-y) V(x - h + \mathrm{d}y)\,.$$

Wir schliessen daraus, dass $V(x+\mathrm{d}y)$ nicht von x abhängt. Also ist V proportional zum Lebesgue-Mass. Wir erhalten damit, dass $U(t_k) - U(t_k - h) \to \gamma h$ für ein $\gamma \ge 0$. Aus dem Beweis von Satz 4.16 unten können wir schliessen, dass für jedes direkt Riemann integrierbare $z(x)$ folgt, dass $Z(x) \to \gamma \int_0^\infty z(y)\, \mathrm{d}y$. Nehmen wir nun an, dass $\lambda > 0$. Wir haben die Erneuerungsgleichung

$$1 = (1 - F(t)) + \int_0^t 1 \,\mathrm{d}F(y)\,.$$

Wir schliessen, dass $1 = \gamma \int_0^\infty (1 - F(y))\, \mathrm{d}y = \gamma/\lambda$. Somit ist $\gamma = \lambda$. Da der Grenzwert nicht vom gewählten Grenzmass V abhängt, ist die Aussage bewiesen. Ist $\mathbb{E}[Y] = \infty$, so folgt $1 \ge \gamma \int_0^n (1 - F(x))\, \mathrm{d}x$. Dies ist nur möglich für $\gamma = 0$. $\square$

Sei $z(x)$ eine beschränkte Funktion und $h > 0$. Wir definieren die Riemann-Summen

$$\overline{m}_k(h) = \sup\{z(t) : (k-1)h \le t < kh\}, \qquad \underline{m}_k(h) = \inf\{z(t) : (k-1)h \le t < kh\}$$

und

$$\bar{\sigma}(h) = h \sum_{k=1}^\infty \overline{m}_k(h), \qquad \underline{\sigma}(h) = h \sum_{k=1}^\infty \underline{m}_k(h).$$

Definition 4.14. *Eine Funktion $z(x)$ heisst* **direkt Riemann integrierbar**, *falls*

$$-\infty < \varliminf_{h\downarrow 0} \underline{\sigma}(h) = \varlimsup_{h\downarrow 0} \bar{\sigma}(h) < \infty\,.$$

Dies ist ein bisschen stärker als Riemann integrierbar. Sei $z_n(x) = (1 - n^2|x-n|)^+$ und $z(x) = \sum_{n=1}^\infty z_n(x)$. Dann ist $z(x)$ Riemann integrierbar, aber nicht direkt Riemann integrierbar.

Folgende Kriterien implizieren direkte Riemann Integrierbarkeit.

Hilfssatz 4.15.

i) *Der Raum der direkt Riemann integrierbaren Funktionen ist linear.*

ii) *Ist $z(t)$ monoton und $\int\limits_0^\infty |z(t)|\,\mathrm{d}t < \infty$, dann ist $z(t)$ direkt Riemann integrierbar.*

iii) *Sind $a(t)$ und $b(t)$ direkt Riemann integrierbar und $z(t)$ ist Lebesgue fast überall stetig, so dass $a(t) \le z(t) \le b(t)$, dann ist $z(t)$ direkt Riemann integrierbar.*

iv) *Ist $z(t) \ge 0$, $z(t)$ Lebesgue fast überall stetig und $\bar\sigma(h) < \infty$ für ein $h > 0$, dann ist $z(t)$ direkt Riemann integrierbar.*

Beweis. i) Dies folgt sofort aus

$$\sup\{z_1(t) + z_2(t)\} \le \sup\{z_1(t)\} + \sup\{z_2(t)\}\ ,$$

$$\inf\{z_1(t) + z_2(t)\} \ge \inf\{z_1(t)\} + \inf\{z_2(t)\}\ ,$$

$$\sup\{az(t)\} = a\sup\{z(t)\}\ , \qquad \inf\{az(t)\} = a\inf\{z(t)\}$$

für $a \ge 0$ und

$$\sup\{-z(t)\} = -\inf\{z(t)\}\ , \qquad \inf\{-z(t)\} = -\sup\{z(t)\}\ .$$

ii) Da $z(t)$ für $t \to \infty$ konvergiert und integrierbar ist, konvergiert $z(t)$ gegen Null. Wir können dann annehmen, dass $z(t) \ge 0$. Dann ist $\overline{m}_k(h) = z((k-1)h)$ und $\underline{m}_k(h) = z(kh)$. Wir haben dann die Abschätzung

$$\int_0^\infty z(y)\,\mathrm{d}y \le \bar\sigma(h) = z(0)h + \underline{\sigma}(h) \le z(0)h + \int_0^\infty z(y)\,\mathrm{d}y\ .$$

Für $h \to 0$ konvergieren also $\bar\sigma(h)$ und $\underline{\sigma}(h)$ nach $\int_0^\infty z(y)\,\mathrm{d}y$.
iv) Sei h_0 so gewählt, dass $\bar\sigma(h_0) < \infty$. Sei $\varepsilon > 0$. Es gibt ein n_0, so dass

$$h_0 \sum_{k=n_0}^\infty \overline{m}_k(h_0) < \frac{\varepsilon}{2}\ .$$

Dann gilt für jedes $h < h_0$, dass

$$h \sum_{k=\lfloor n_0 h_0/h\rfloor}^\infty \overline{m}_k(h) < \varepsilon\ ,$$

da $\sum_{k=1}^{\infty} \overline{m}_k(h_0) \mathbb{1}_{[(k-1)h_0, kh_0)}$ eine obere Grenze für $z(t)$ darstellt und für ein $h > 0$, jedes $m_k(h_0)$ höchstens $2h_0/h$ Mal in der Obersumme auftreten kann. Aus der klassischen Theorie der Riemann-Integrale weiss man, dass

$$\lim_{h \downarrow 0} h \sum_{k=1}^{\lfloor n_0 h_0 / h \rfloor} \overline{m}_k(h) = \lim_{h \downarrow 0} h \sum_{k=1}^{\lfloor n_0 h_0 / h \rfloor} \underline{m}_k(h) = \int_0^{n_0 h_0} z(x) \, \mathrm{d}x \, .$$

In der Tat gilt die Konvergenz auf den Teilen, auf denen die Funktion $z(x)$ stetig ist und das Mass der Intervalle der Länge h, die eine Unstetigkeit enthalten, konvergiert nach 0. Somit gilt

$$\overline{\lim_{h \downarrow 0}} \, \overline{\sigma}(h) \leq \int_0^{n_0 h_0} z(x) \, \mathrm{d}x + \varepsilon \leq \int_0^{\infty} z(x) \, \mathrm{d}x + \varepsilon \, .$$

Da die Obersumme eine obere Grenze für das Integral ist, haben wir auch, dass $\int_{n_0 h_0}^{\infty} z(x) \, \mathrm{d}x < \varepsilon/2 < \varepsilon$. Also

$$\underline{\lim}_{h \downarrow 0} \underline{\sigma}(h) \geq \int_0^{n_0 h_0} z(x) \, \mathrm{d}x \geq \int_0^{\infty} z(x) \, \mathrm{d}x - \varepsilon \, .$$

Da ε beliebig war, ist $z(x)$ direkt Riemann integrierbar.

iii) Da der Raum der direkt Riemann integrierbaren Funktionen linear ist, können wir $a(t) = 0$ annehmen, da $0 \leq z^+(t) \leq b^+(t)$, und $0 \leq z^-(t) \leq a^-(t)$. Da $b(t)$ direkt Riemann integrierbar ist, ist $\overline{\sigma}(h) < \infty$ für h klein genug, da die Obersumme durch die entsprechende Obersumme von $b(t)$ beschränkt ist. Die Aussage folgt nun aus iv). □

Satz 4.16. (Erneuerungstheorem) *Sei $z(x)$ eine direkt Riemann integrierbare Funktion. Dann erfüllt die Lösung $Z(x)$ der Erneuerungsgleichung (4.1)*

$$\lim_{t \to \infty} Z(t) = \lambda \int_0^{\infty} z(y) \, \mathrm{d}y \, ,$$

falls $F(y)$ nicht arithmetisch ist und

$$\lim_{n \to \infty} Z(t + n\gamma) = \gamma \lambda \sum_{j=0}^{\infty} z(t + j\gamma)$$

für $0 \leq t < \gamma$, falls $F(y)$ arithmetisch ist mit Spannweite γ.

Beweis. Wir beweisen nur den nicht-arithmetischen Fall. Der arithmetische Fall lässt sich analog beweisen.

Wir können annehmen, dass $z(x) \geq 0$. Dann ist $Z(x) \geq 0$. Sei h fest und $z_k(x) = \mathbb{1}_{[(k-1)h,kh)}$. Mit Z_k bezeichnen wir die zu z_k gehörige Erneuerungsfunktion, also

$$Z_k(x) = \int_{x-kh}^{x-(k-1)h} \mathrm{d}Z(y) = Z(x-(k-1)h) - Z(x-kh) \;.$$

Wir setzen $\bar{z} = \sum_k \overline{m}_k(h) z_k$ und $\underline{z} = \sum_k \underline{m}_k(h) z_k$. Dann haben wir $\underline{z} \leq z \leq \bar{z}$. Analog, für $\overline{Z} = \sum_k \overline{m}_k(h) Z_k$ und $\underline{Z} = \sum_k \underline{m}_k(h) Z_k$ haben wir $\underline{Z} \leq Z \leq \overline{Z}$. Die Z_k sind beschränkt und konvergieren nach λh (Satz 4.13). Wir schliessen daraus, dass $\underline{Z}(x) \to \lambda \underline{\sigma}(h)$ und $\overline{Z}(x) \to \lambda \bar{\sigma}(h)$. Da $z(x)$ direkt Riemann integrierbar ist, folgt die Aussage. □

Beispiel 4.17. Nehmen wir an, $F(x)$ sei nicht arithmetisch und $\mathbb{E}[Y] < \infty$. Sei $A(t) = t - T_{N_t}$ die Zeit seit dem letzten Ereignis und $B(t) = T_{N_t+1} - t$ die Zeit bis zum nächsten Ereignis. Wir wollen nun $F_A(t;x) = \mathbb{P}[A(t) \leq x]$, $\overline{F}_B(t;x) = \mathbb{P}[B(t) > x]$, $m_A(t) = \mathbb{E}[A(t)]$ und $m_B(t) = \mathbb{E}[B(t)]$ bestimmen. Kennen wir T_1, so wissen wir, dass $A(t) = t$, falls $T_1 \geq t$, und $A(t)$ hat die selbe Verteilung wie $A(t - T_1)$, falls $t \geq T_1$. Also erhalten wir die Erneuerungsgleichung

$$F_A(t;x) = \mathbb{1}_{t \leq x}(1 - F(t)) + \int_0^t F_A(t-y;x)\,\mathrm{d}F(y) \;.$$

Die Funktion $(1 - F(t))\mathbb{1}_{t \leq x}$ ist monoton und

$$\int_0^\infty \mathbb{1}_{t \leq x}(1 - F(t))\,\mathrm{d}t = \int_0^x (1 - F(t))\,\mathrm{d}t$$

zeigt, dass sie auch integrierbar ist. Also konvergiert $F_A(t;x)$ nach $\lambda \int_0^x (1 - F(t))\,\mathrm{d}t$. $A(t)$ konvergiert also schwach gegen die Verteilung $\lambda \int_0^x (1 - F(t))\,\mathrm{d}t$. Analog erhalten wir

$$\overline{F}_B(t;x) = 1 - F(t+x) + \int_0^t \overline{F}_B(t-y;x)\,\mathrm{d}F(y) \;.$$

Auch $1 - F(t+x)$ ist direkt Riemann integrierbar. Somit konvergiert $F_B(t;x)$ nach $\lambda \int_0^\infty (1 - F(t+x))\,\mathrm{d}t = \lambda \int_x^\infty (1 - F(y))\,\mathrm{d}y$. Also konvergiert $B(t)$ schwach gegen die selbe Verteilung wie $A(t)$. Dies ist genau die Verteilung für T_1, die den Prozess stationär macht.

Nehmen wir nun an, dass $\mathbb{E}[Y^2] < \infty$. Die Funktion $m_A(t) = \mathbb{E}[A_t]$ erfüllt dann die Erneuerungsgleichung

$$m_A(t) = \int_t^\infty t \,\mathrm{d}F(y) + \int_0^t m_A(t-y) \,\mathrm{d}F(y) \;.$$

Auch $t(1-F(t))$ ist direkt Riemann integrierbar und

$$\lim_{t\to\infty} m_A(t) = \lambda \int_0^\infty y \int_y^\infty \,\mathrm{d}F(x) \,\mathrm{d}y = \lambda \int_0^\infty \int_0^x y \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}F(x) = \frac{\lambda}{2}\mathbb{E}[Y^2] \;.$$

Setzen wir $m_B(t) = \mathbb{E}[B_t]$, erhalten wir

$$m_B(t) = \int_t^\infty (y-t) \,\mathrm{d}F(y) + \int_0^t m_B(t-y) \,\mathrm{d}F(y) \;.$$

Es folgt einfach, dass auch $\int_t^\infty (y-t) \,\mathrm{d}F(y) = \int_t^\infty (1-F(z)) \,\mathrm{d}z$ direkt Riemann integrierbar ist. Somit folgt

$$\lim_{t\to\infty} m_B(t) = \lambda \int_0^\infty \int_t^\infty (y-t) \,\mathrm{d}F(y) \,\mathrm{d}t = \lambda \int_0^\infty \int_0^y (y-t) \,\mathrm{d}t \,\mathrm{d}F(y) = \frac{\lambda}{2}\mathbb{E}[Y^2] \;.$$

Im Zeitpunkt t ist also die erwartete Länge zwischen zwei Ereignissen $\mathbb{E}[A_t + B_t] \to \lambda\mathbb{E}[T^2] > \mathbb{E}[T]$. Wir warten also im Schnitt länger als die Zeit zwischen zwei Ereignissen. Dies scheint paradox zu sein. Wenn wir nun aber zu einem zufälligen grossen Zeitpunkt die Wartezeit betrachten, dann ist es wahrscheinlicher, auf ein langes Intervall zu treffen, als auf ein kurzes. Daher muss man im Schnitt länger warten. ■

Wir haben für $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{1}{n}U(n) = \frac{1}{n}\Big(1 + \sum_{k=1}^n U(k) - U(k-1)\Big) \to \lambda \;,$$

und da $U(\lfloor t \rfloor) \le U(t) \le U(\lfloor t+1 \rfloor)$, gilt $t^{-1}U(t) \to \lambda$. Wir können das Resultat verfeinern.

Satz 4.18. *Ist F nicht arithmetisch mit zweitem Moment $\mu_2 = \mathbb{E}[Y^2]$, so gilt*

$$0 \le U(t) - \lambda t \to \tfrac{1}{2}\lambda^2\mu_2 \;.$$

Beweis. Sei $Z(t) = U(t) - \lambda t$. Die Funktion λt erfüllt dann die Gleichung

$$\begin{aligned}
\lambda t &= \lambda t(1 - F(t)) + \int_0^t (\lambda(t-y) + \lambda y) \,\mathrm{d}F(y) \\
&= \lambda t(1 - F(t)) + \lambda \int_0^t y \,\mathrm{d}F(y) + \int_0^t \lambda(t-y) \,\mathrm{d}F(y) \\
&= \lambda t(1 - F(t)) + \lambda \int_0^t \int_0^y \mathrm{d}x \,\mathrm{d}F(y) + \int_0^t \lambda(t-y) \,\mathrm{d}F(y) \\
&= \lambda t(1 - F(t)) + \lambda \int_0^t \{F(t) - F(x)\} \,\mathrm{d}x + \int_0^t \lambda(t-y) \,\mathrm{d}F(y) \\
&= \lambda \int_0^t (1 - F(x)) \,\mathrm{d}x + \int_0^t \lambda(t-y) \,\mathrm{d}F(y)\ .
\end{aligned}$$

Da $U(t)$ die Erneuerungsgleichung (4.2) erfüllt, erhalten wir, dass $Z(t)$ der Erneuerungsgleichung mit

$$z(t) = 1 - \lambda \int_0^t (1 - F(y)) \,\mathrm{d}y = \lambda \int_t^\infty (1 - F(y)) \,\mathrm{d}y$$

genügt. Die Funktion ist positiv, fallend und direkt Riemann integrierbar, also folgt der Grenzwert aus dem Erneuerungssatz. □

Betrachten wir nun noch den Fall, wo der Erneuerungsprozess verzögert ist. Sei Z die Lösung der gewönlichen Erneuerungsgleichung. Die gesuchte Funktion $\tilde{Z}(t)$ erfülle die Gleichung

$$\tilde{Z}(t) = \tilde{z}(t) + \int_0^t Z(t-y) \,\mathrm{d}F_1(y)\ .$$

Wir nehmen an, dass $\tilde{z}(t)$ und $Z(t)$ konvergieren, wenn t gegen Unendlich geht. Dann ist $Z(t)$ beschränkt, da es auf endlichen Intervallen beschränkt ist und konvergiert. Also kann man Grenzwert und Erwartungswert vertauschen. Wir erhalten dann, dass $\tilde{Z}(t)$ gegen $\lim_{t\to\infty} \tilde{z}(t) + Z(t)$ konvergiert.

Wollen wir zum Beispiel den Grenzwert von $\tilde{F}_A(t;x)$ bestimmen, so erhalten wir die Gleichung

$$\tilde{F}_A(t;x) = 1\!\!1_{t \le x}(1 - F_1(t)) + \int_0^t F_A(t-y;x) \,\mathrm{d}F_1(y)\ .$$

Somit erhalten wir den selben Grenzwert $\lambda \int_0^x (1 - F(y)) \,\mathrm{d}y$.

Oder bezeichnen wir mit $\tilde{U}(t)$ das Erneuerungsmass im verzögerten Fall. Dann erfüllt $\tilde{U}(t)$ die Gleichung

$$\tilde{U}(t) = 1 + \int_0^t U(t-y) \,\mathrm{d}F_1(y)\ .$$

Wir erhalten dann für $\tilde{Z}(t) = \tilde{U}(t) - \lambda t$

$$\tilde{Z}(t) = \lambda \int_t^\infty (1 - F_1(y))\,\mathrm{d}y + \int_0^t Z(t-y)\,\mathrm{d}F_1(y)\;.$$

Somit hat $\tilde{Z}(t)$ auch den Grenzwert $\frac{1}{2}\lambda^2\mu_2$ wie im nicht-verzögerten Fall.

Wir betrachten nun noch Erneuerungsprozesse die enden. Sei nun Y eine Variable, die den Wert Unendlich annehmen kann. Das heisst, wir haben $F(\infty) < 1$. Das Erneuerungsmass ist dann endlich, $U(\infty) = 1/(1 - F(\infty))$. Sei $M = \sup\{T_n : T_n < \infty\}$. Dann erhalten wir

$$\mathbb{P}[M \le x] = \sum_{n=0}^\infty (1 - F(\infty))F^{*n}(x) = (1 - F(\infty))U(x)\;.$$

Die Erneuerungsgleichung ist dann

$$Z(t) = z(t) + \int_0^t Z(t-y)\,\mathrm{d}F(y)\;.$$

Wir nennen diese Erneuerungsgleichung entartet, da $\int_0^\infty \,\mathrm{d}F(y) < 1$. Es folgt dann, dass $Z(t) = z * U(t)$. Konvergiert die Funktion $z(x)$, so gilt für den Grenzwert $\lim_t Z(t) = z(\infty)U(\infty)$.

Meistens erhält man aus dem obigen Grenzwert keine nützliche Information, da $z(\infty) = 0$. Nehmen wir an, es gibt eine Lösung R der Gleichung $\int_0^\infty \mathrm{e}^{Rx}\,\mathrm{d}F(x) = 1$. Falls die Lösung existiert, dann ist sie eindeutig. Betrachten wir nun die Funktion $f(x) = Z(x)\mathrm{e}^{Rx}$, so erfüllt die Funktion $f(x)$ die Gleichung

$$f(x) = Z(x)\mathrm{e}^{Rx} = z(x)\mathrm{e}^{Rx} + \int_0^x f(x-y)\mathrm{e}^{Ry}\,\mathrm{d}F(y)\;.$$

Dies ist nun eine nicht-entartete Erneuerungsgleichung. Ist die Funktion $z(x)\mathrm{e}^{Rx}$ direkt Riemann integrierbar, erhalten wir,

$$\tilde{Z}_\infty = \lim_{x\to\infty} f(x) = \frac{\int_0^\infty z(y)\mathrm{e}^{Ry}\,\mathrm{d}y}{\int_0^\infty y\mathrm{e}^{Ry}\,\mathrm{d}F(y)}\;,$$

Somit erhalten wir die Asymptotik $Z(t) \sim \tilde{Z}_\infty \mathrm{e}^{-Rt}$.

Beispiel 4.19. In der Risikotheorie betrachtet man den Prozess

$$X_t = u + ct - \sum_{i=1}^{N_t} Y_i\;,$$

wobei $\{N_t\}$ ein Poisson-Prozess mit Rate λ bezeichet, $\{Y_i\}$ iid und unabhängig von $\{N_t\}$ sind, $c > 0$ die Prämienrate und $u \ge 0$ das Anfangskapital bezeichnet. Wir bezeichnen die Verteilungsfunktion von Y_i mit $G(y)$ und nehmen $G(0) = 0$ an. Man interessiert sich dann für die Ruinwahrscheinlichkeit

$$\psi(u) = \mathbb{P}\Big[\inf_{t\ge 0} X_t < 0 \;\Big|\; X_0 = u\Big] \;.$$

Aus der Theorie der Irrfahrten weiss man, dass $\psi(u) = 1$, falls $c \le \lambda\mathbb{E}[Y_i]$, siehe Korollar 5.2. Wir nehmen daher $c > \lambda\mathbb{E}[Y_i]$ an.

Es lässt sich zeigen, dass $\psi(u)$ folgende Gleichung erfüllt

$$\psi(u) = \frac{\lambda}{c}\int_0^u \psi(u-x)(1-G(x))\,\mathrm{d}x + \frac{\lambda}{c}\int_u^\infty (1-G(x))\,\mathrm{d}x \;.$$

Dies sieht wie eine Erneuerungsgleichung aus. Da aber

$$\int_0^\infty \frac{\lambda}{c}(1-G(x))\,\mathrm{d}x = \frac{\lambda\mathbb{E}[Y_i]}{c} < 1 \;,$$

ist die Erneuerungsgleichung entartet. Somit ist der zugehörige Erneuerungsprozess abbrechend. Um obige Methode anzuwenden, muss ein R existieren, so dass

$$\int_0^\infty \frac{\lambda}{c}(1-G(x))\mathrm{e}^{Rx}\,\mathrm{d}x = 1 \;.$$

Aus

$$\int_0^\infty (1-G(x))\mathrm{e}^{Rx}\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty\int_x^\infty \mathrm{d}G(y)\mathrm{e}^{Rx}\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{Ry}-1}{R}\,\mathrm{d}G(y) = \frac{\mathbb{E}[\mathrm{e}^{RY_i}]-1}{R} \;,$$

sehen wir, dass die Gleichung äquivalent ist zu

$$\theta(R) = \lambda\mathbb{E}[\mathrm{e}^{RY_i}-1] - cR = 0 \;.$$

Die Funktion $\theta(r)$ ist konvex, $\theta(0) = 0$ und $\theta'(0) = \lambda\mathbb{E}[Y_i] - c < 0$. Somit gibt es höchstens eine Lösung $R \neq 0$ der Gleichung $\theta(r) = 0$ und $R > 0$, falls R existiert. Nehmen wir nun an, dass R existiere. Man kann leicht zeigen, dass $\mathrm{e}^{Ru}\lambda\int_u^\infty(1-G(x))\,\mathrm{d}x/c$ direkt Riemann integrierbar ist. Es folgt somit, dass

$$\lim_{u\to\infty}\psi(u)\mathrm{e}^{Ru} = \frac{\int_0^\infty \mathrm{e}^{Ru}\int_u^\infty(1-G(x))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}u}{\int_0^\infty u\mathrm{e}^{Ru}(1-G(u))\,\mathrm{d}u} = \frac{c-\lambda\mathbb{E}[Y_i]}{\lambda\int_0^\infty x\mathrm{e}^{Rx}\,\mathrm{d}G(x) - c} \;.$$

Wir erhalten damit die Cramér–Lundberg Approximation

$$\psi(u) \approx \frac{c-\lambda\mathbb{E}[Y_i]}{\lambda\int_0^\infty x\mathrm{e}^{Rx}\,\mathrm{d}G(x) - c}\,\mathrm{e}^{-Ru} \;.$$

■