3. Martingale

3.1. Bedingte Erwartungswerte

Definition 3.1. (Kolmogorov, 1933) *Sei $X \ge 0$ eine Zufallsvariable auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ und $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ eine σ-Algebra. Eine Zufallsvariable X_0 heisst* **bedingte Erwartung** *von X bezüglich $\mathcal{G}$, falls*

i) *X_0 ist $\mathcal{G}$-messbar,*

ii) *für alle $Y \ge 0$, die $\mathcal{G}$-messbar sind, gilt $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X_0 Y]$.*

Wir schreiben $X_0 = \mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}]$. Sind X und Z Zufallsvariablen, dann schreiben wir $\mathbb{E}[X \mid Z] = \mathbb{E}[X \mid \sigma(Z)]$. Ist $X = 1\!\!1_A$ für ein $A \in \mathcal{F}$, so schreiben wir $\mathbb{P}[A \mid \mathcal{G}] = \mathbb{E}[1\!\!1_A \mid \mathcal{G}]$. Für beliebige Zufallsvariablen definieren wir $\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}] = \mathbb{E}[X^+ \mid \mathcal{G}] - \mathbb{E}[X^- \mid \mathcal{G}]$, sofern die rechte Seite wohldefiniert und endlich ist.

Wir zeigen nun, dass die bedingte Erwartung wohldefiniert ist.

Hilfssatz 3.2. *Sei $X \ge 0$. Es gibt eine Zufallsvariable X_0, so dass $X_0 = \mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}]$. Sind X_0 und X_1 bedingte Erwartungswerte von X bezüglich $\mathcal{G}$, dann ist $\mathbb{P}[X_0 = X_1] = 1$.*

Beweis. Sei $\mathbb{Q}[A] := \mathbb{E}[X; A] := \mathbb{E}[X 1\!\!1_A]$ für $A \in \mathcal{G}$. Wir zeigen, dass $\mathbb{Q}$ ein Mass auf $(\Omega, \mathcal{G})$ ist. Sei $A = \cup_{i=1}^\infty A_i$, wobei $A_i \cap A_j = \emptyset$ für $i \ne j$. Dann ist

$$\mathbb{Q}[A] = \mathbb{E}[X 1\!\!1_A] = \mathbb{E}\Big[X \sum_{i=1}^\infty 1\!\!1_{A_i}\Big] = \sum_{i=1}^\infty \mathbb{E}[X 1\!\!1_{A_i}] = \sum_{i=1}^\infty \mathbb{Q}[A_i]\;.$$

Das Mass $\mathbb{Q}$ ist absolutstetig bezüglich $\mathbb{P}$ auf $(\Omega, \mathcal{G})$. Somit gibt es nach dem Satz von Radon–Nikodym (Korollar 1.44) ein X_0, so dass $\mathbb{Q}[A] = \int_A X_0 \,\mathrm{d}\mathbb{P}$. Wir müssen noch die zweite Eigenschaft der bedingten Erwartung zeigen. Sei $\mathcal{H}$ die Menge der beschränkten $\mathcal{G}$-messbaren Funktionen Y, für die $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X_0 Y]$. Der Raum ist linear und enthält nach Konstruktion die Indikatorfunktionen, insbesondere die Konstanten. Sei $\{f_n\} \subset \mathcal{H}$ eine wachsende Folge mit $f_n \le c$ und $f = \lim_n f_n$. Dann gilt wegen der monotonen Konvergenz

$$\mathbb{E}[Xf] = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[X f_n] = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[X_0 f_n] = \mathbb{E}[X_0 f]\;.$$

Somit enthält nach Satz 1.21 $\mathcal{H}$ alle $\mathcal{G}$-messbaren Funktionen. Also ist X_0 eine bedingte Erwartung.

Nehmen wir nun an, $X_1 = \mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}]$. Da $0 \ge \mathbb{E}[X_1 \mathbb{1}_{X_1<0}] = \mathbb{E}[X \mathbb{1}_{X_1<0}] \ge 0$, folgt dass $\mathbb{P}[X_1 < 0] = 0$. Wir haben dann $A_n = \{X_0 < X_1 \le n\} \in \mathcal{G}$. Also ist

$$0 \le \int_{A_n} (X_1 - X_0) \, \mathrm{d}\mathbb{P} = \int_{A_n} X_1 \, \mathrm{d}\mathbb{P} - \int_{A_n} X_0 \, \mathrm{d}\mathbb{P} = \int_{A_n} X \, \mathrm{d}\mathbb{P} - \int_{A_n} X \, \mathrm{d}\mathbb{P} = 0 \; .$$

Da $X_1 > X_0$ auf A_n, muss $\mathbb{P}[A_n] = 0$ gelten. Aus der monotonen Konvergenz folgt $\mathbb{P}[X_1 > X_0] = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}[X_0 < X_1 \le n] = 0$. Die andere Richtung folgt analog. □

Seien $\{X_i\}$ unabhängig und identisch verteilt, so dass $\mathbb{E}[|X_1|] < \infty$. Wir setzen $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$. Dann ist $\mathbb{E}[X_1 \mid S_n] = S_n/n$. Es ist klar, dass S_n/n $\sigma(S_n)$-messbar ist. Es folgt, dass

$$\mathbb{E}[X_1 f(S_n)] = \int_{\mathbb{R}^n} x_1 f(x_1 + \cdots + x_n) \, \mathrm{d}F(x_1) \cdots \, \mathrm{d}F(x_n)$$

invariant ist unter Permutationen. Insbesondere

$$\mathbb{E}[X_1 f(S_n)] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[X_i f(S_n)] = \mathbb{E}\Big[\frac{S_n}{n} f(S_n)\Big] \; .$$

Hilfssatz 3.3. *Sei $X \ge 0$ eine integrierbare Zufallsvariable und X_0 $\mathcal{G}$-messbar. Sei $\mathcal{A} \subset \mathcal{F}$ durchschnittsabgeschlossen, so dass $\mathcal{G} = \sigma(\mathcal{A})$ und $\Omega \in \mathcal{A}$. Gilt $\mathbb{E}[X \mathbb{1}_A] = \mathbb{E}[X_0 \mathbb{1}_A]$ für alle $A \in \mathcal{A}$, dann ist $X_0 = \mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}]$.*

Beweis. Sei $\mathcal{H}$ die Menge der beschränkten $\mathcal{G}$-messbaren Funktionen f, so dass $\mathbb{E}[Xf] = \mathbb{E}[X_0 f]$. Dies ist ein linearer Raum, der die konstanten Funktionen und $\mathbb{1}_A$ für $A \in \mathcal{A}$ enthält. Mit beschränkter Konvergenz folgt, dass mit einer monotonen Folge $\{f_n\}$ aus $\mathcal{H}$, auch $f = \lim_n f_n$ in $\mathcal{H}$ ist, falls f beschränkt ist. Somit enthält $\mathcal{H}$ alle $\mathcal{G}$-messbaren beschränkten Funktionen, insbesondere die Indikatorfunktionen.

Für $A = \{X_0 < 0\} \in \mathcal{G}$ gilt

$$0 \ge \mathbb{E}[\mathbb{1}_A X_0] = \mathbb{E}[\mathbb{1}_A X] \ge 0 \; .$$

Wir schliessen daher, dass $\mathbb{P}[X_0 < 0] = 0$, also $X_0 \ge 0$ (f.s.). Ist nun $Y \ge 0$ $\mathcal{G}$-messbar, dann ist

$$\mathbb{E}[XY] = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[X(Y \wedge n)] = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[X_0(Y \wedge n)] = \mathbb{E}[X_0 Y] \; .$$

Somit ist $X_0 = \mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}]$. □

Hilfssatz 3.4. *Seien F_1 die Verteilung von X_1 und $K(x_1, A_2)$ ein stochastischer Kern, so dass die gemeinsame Verteilung von X_1 und X_2 wie in Satz 1.39 definiert ist. Ist f messbar, dann gilt*

$$\mathbb{E}[f(X_1, X_2) \mid X_1] = \int f(X_1, x_2) K(X_1, \mathrm{d}x_2) \; .$$

Beweis. Die rechte Seite ist $\sigma(X_1)$-messbar. Sei g eine messbare Funktion. Dann haben wir

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[g(X_1) f(X_1, X_2)] &= \iint g(x_1) f(x_1, x_2) K(x_1, \mathrm{d}x_2) \; \mathrm{d}F_1(x_1) \\ &= \int g(x_1) \int f(x_1, x_2) K(x_1, \mathrm{d}x_2) \; \mathrm{d}F_1(x_1) \\ &= \mathbb{E}\Big[g(X_1) \int f(X_1, x_2) K(X_1, \mathrm{d}x_2)\Big] \; .\end{aligned}$$

Nach dem Faktorisierungslemma Korollar 1.23 ist jede $\sigma(X_1)$-messbare Funktion von der Form $g(X_1)$. $\square$

Sind X_1 und X_2 unabhängig, dann ist $K(x, B) = F_2(B)$. Also erhalten wir

$$\mathbb{E}[f(X_1, X_2) \mid X_1] = \int f(X_1, x_2) K(X_1, \mathrm{d}x_2) = \int f(X_1, x_2) \; \mathrm{d}F_2(x_2) \; .$$

Beispiel 3.5. Sei $X \in [0, 1]$ eine Variable mit Verteilung $F(x)$ und $\mathbb{P}_p[X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n] = p^k (1-p)^{n-k}$, wobei $p \in [0, 1]$, $x_i \in \{0, 1\}$ und $k = \sum_{i=1}^n x_i$. Wir nehmen den Kern $K(p, \cdot) = \mathbb{P}_p[\cdot]$. Dies sind $\{0, 1\}$-Experimente mit stochastischen Erfolgsparameter X mit Verteilung $F(x)$. Wir setzen $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$. Nach dem starken Gesetz der grossen Zahl haben wir

$$\mathbb{P}[S_n/n \to X] = \int_0^1 \mathbb{P}_p[S_n/n \to p] \; \mathrm{d}F(p) = \int_0^1 1 \; \mathrm{d}F(p) = 1 \; .$$

Also konvergiert S_n/n fast sicher nach X. Wir haben dann

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X f(X_1, \ldots, X_n)] &= \int_0^1 \mathbb{E}_p[p f(X_1, \ldots, X_n)] \; \mathrm{d}F(p) \\ &= \int_0^1 \mathbb{E}_p[f(X_1, \ldots, X_n)] \mathbb{E}_p[X_{n+1}] \; \mathrm{d}F(p) \\ &= \int_0^1 \mathbb{E}_p[X_{n+1} f(X_1, \ldots, X_n)] \; \mathrm{d}F(p) = \mathbb{E}[X_{n+1} f(X_1, \ldots, X_n)] \; .\end{aligned}$$

Also $\mathbb{E}[X \mid X_1, \dots, X_n] = \mathbb{E}[X_{n+1} \mid X_1, \dots, X_n]$. Somit erhalten wir

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X \mid X_1, \dots, X_n] &= \mathbb{E}[X_{n+1} \mid X_1, \dots, X_n] = \mathbb{P}[X_{n+1} = 1 \mid X_1, \dots, X_n] \\ &= \frac{\int_0^1 p^{k+1}(1-p)^{n-k} \,\mathrm{d}F(p)}{\int_0^1 p^k(1-p)^{n-k} \,\mathrm{d}F(p)} \,.\end{aligned}$$

Ist X gleichverteilt auf $[0,1]$, dann erhalten wir $\mathbb{E}[X \mid X_1, \dots, X_n] = (k+1)/(n+1) = (S_n + 1)/(n+1)$. ■

Proposition 3.6. *Die Variable $\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}]$ ist die beste Prognose von X auf $\mathcal{G}$, das heisst, ist $\mathbb{E}[X^2] < \infty$ und Y $\mathcal{G}$-messbar, dann ist*

$$\mathbb{E}[(X-Y)^2] \ge \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}])^2] \,.$$

Beweis. Übung. □

Hilfssatz 3.7. *Seien $X, X_1, X_2, \dots$ Zufallsvariablen. Die bedingte Erwartung hat folgende Eigenschaften:*

i) *Ist $\mathbb{E}[|X|] < \infty$, so ist $\mathbb{E}[|\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}]|] < \infty$ und $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}]] = \mathbb{E}[X]$.*

ii) $\mathbb{E}[\alpha X_1 + \beta X_2 \mid \mathcal{G}] = \alpha \mathbb{E}[X_1 \mid \mathcal{G}] + \beta \mathbb{E}[X_2 \mid \mathcal{G}]$.

iii) *Ist Y $\mathcal{G}$-messbar, dann ist $\mathbb{E}[XY \mid \mathcal{G}] = Y\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}]$.*

iv) *Ist $X_1 \le X_2$ (f.s), dann ist $\mathbb{E}[X_1 \mid \mathcal{G}] \le \mathbb{E}[X_2 \mid \mathcal{G}]$ (f.s). Insbesondere gilt Jensens Ungleichung, $\mathbb{E}[u(X) \mid \mathcal{G}] \ge u(\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}])$ für alle konvexen Funktionen $u(x)$.*

v) *Ist $0 \le X_1 \le X_2 \le \cdots$ und $X = \lim_n X_n$, dann ist $\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}] = \lim_n \mathbb{E}[X_n \mid \mathcal{G}]$. Insbesondere gilt das Lemma von Fatou und der Satz zur beschränkten Konvergenz.*

Beweis. i) Die erste Aussage folgt aus Jensens Ungleichung in iv). Wir haben $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}]] = \mathbb{E}[1\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}]] = \mathbb{E}[1X] = \mathbb{E}[X]$, da 1 $\mathcal{G}$-messbar ist.
ii) Folgt aus der Linearität des Erwartungswertes und der Definition der bedingten Erwartung.
iii) Ist Z $\mathcal{G}$-messbar, dann ist YZ $\mathcal{G}$-messbar. Also

$$\mathbb{E}[Z(YX)] = \mathbb{E}[(ZY)X] = \mathbb{E}[ZY\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}]] \,.$$

iv) Sei $A = \{\mathbb{E}[X_1 \mid \mathcal{G}] > \mathbb{E}[X_2 \mid \mathcal{G}]\}$. Dann ist

$$0 \geq \mathbb{E}[\mathbb{1}_A \mathbb{E}[X_2 - X_1 \mid \mathcal{G}]] = \mathbb{E}[\mathbb{1}_A (X_2 - X_1)] \geq 0 \,.$$

Also ist $\mathbb{P}[A] = 0$. Jensens Ungleichung lässt sich nun wie im unbedingten Fall zeigen.

v) Sei $Y \geq 0$ $\mathcal{G}$-messbar. Dann ist

$$\mathbb{E}[Y \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[X_n \mid \mathcal{G}]] = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[Y \mathbb{E}[X_n \mid \mathcal{G}]] = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[Y X_n] = \mathbb{E}[YX] \,.$$

Die restlichen Aussagen folgen nun wie im Beweis von Hilfssatz 1.27. □

Korollar 3.8. *Sei $p \geq 1$ und $\mathbb{E}[|X|^p] < \infty$. Dann ist $\mathbb{E}[|\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}]|^p] < \infty$ und*

$$\mathbb{E}[|\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}]|^p]^{1/p} \leq \mathbb{E}[|X|^p]^{1/p} \,.$$

Beweis. Die Funktion $|x|^p$ ist konvex. Also folgt die Aussage aus Jensens Ungleichung. □

Die bedingte Erwartung ist projektiv.

Hilfssatz 3.9. *Sei $\mathcal{G}_1 \subset \mathcal{G}_2 \subset \mathcal{F}$. Dann gilt*

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}_2] \mid \mathcal{G}_1] = \mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}_1] \,.$$

Beweis. Sei Y $\mathcal{G}_1$-messbar. Dann ist Y auch $\mathcal{G}_2$-messbar und

$$\mathbb{E}[Y \mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}_2]] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[XY \mid \mathcal{G}_2]] = \mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[Y \mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}_1]] \,.$$

Dies beweist die Aussage, weil $\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}_1]$ nach Definition $\mathcal{G}_1$-messbar ist. □

3.2. Gleichmässige Integrierbarkeit

Oft hat man Variablen $\{X_n\}$, die gegen X konvergieren, so dass alle Variablen integrierbar sind. Man möchte dann gerne wissen, wann $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[X_n] = \mathbb{E}[X]$ gilt. Wir haben schon gesehen, dass falls $\sup_n |X_n|$ integrierbar ist, dann gilt obige Eigenschaft. Wir haben sogar $\mathbb{E}[|X_n - X|] \to 0$, also Konvergenz in $\mathcal{L}^1$. Wir möchten nun eine schwächere Bedingung finden.

Wir benützen nun die Notation $\mathbb{E}[X; A] = \mathbb{E}[X \mathbb{1}_A]$.

Definition 3.10. *Die Familie $\{X_n\}$ heisst* **gleichmässig integrierbar**, *falls*

$$\lim_{c\to\infty} \sup_n \mathbb{E}[|X_n|; |X_n| \geq c] = 0 .$$

Wir haben das folgende Resultat.

Proposition 3.11. *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

i) $\{X_n\}$ *konvergiert in* $\mathcal{L}^1$.

ii) $\{X_n\}$ *konvergiert stochastisch und* $\{X_n\}$ *ist gleichmässig integrierbar.*

Beweis. Wir können annehmen, dass $X = 0$ und $X_n \geq 0$. Nehmen wir an, dass $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[X_n] = 0$. Aus der Markov-Ungleichung erhalten wir

$$\mathbb{P}[X_n \geq \varepsilon] \leq \frac{\mathbb{E}[X_n]}{\varepsilon} \to 0 ,$$

Also konvergiert $\{X_n\}$ stochastisch. Sei $\varepsilon > 0$. Es gibt dann n_0, so dass für $n \geq n_0$, $\mathbb{E}[X_n] < \varepsilon$. Insbesondere ist $\mathbb{E}[X_n; X_n \geq c] < \varepsilon$. Für $n < n_0$ haben wir wegen der Integrierbarkeit und monotoner Konvergenz, $\lim_{c\to\infty} \mathbb{E}[X_n; X_n \geq c] = 0$. Somit ist

$$\overline{\lim_{c\to\infty}} \sup_n \mathbb{E}[X_n; X_n \geq c] \leq \varepsilon .$$

Da ε beliebig war, gilt die gleichmässige Integrierbarkeit.

Nehmen wir nun gleichmässige Integrierbarkeit und stochastische Konvergenz an. Wir haben dann

$$\mathbb{E}[X_n] \leq \varepsilon + \mathbb{E}[X_n; X_n > \varepsilon] \leq \varepsilon + c\mathbb{P}[X_n > \varepsilon] + \mathbb{E}[X_n; X_n \geq c] .$$

Aus der gleichmässigen Integrierbarkeit finden wir ein c, so dass $\mathbb{E}[X_n; X_n \geq c] < \varepsilon$ für alle n. Es gibt ein n_0, so dass für alle $n \geq n_0$, $\mathbb{P}[X_n \geq \varepsilon] < \varepsilon/c$. Somit ist $\mathbb{E}[X_n] < 3\varepsilon$ für $n \geq n_0$. Da ε beliebig ist, konvergiert $\{X_n\}$ in $\mathcal{L}^1$. □

Folgende Bedingung genügt für die gleichmässige Integrierbarkeit.

Hilfssatz 3.12. *Sei* $\sup_n \mathbb{E}[|X_n|^p] < \infty$ *für ein* $p > 1$. *Dann ist* $\{X_n\}$ *gleichmässig integrierbar.*

Beweis. Wir haben

$$\mathbb{E}[|X_n|; |X_n| \geq c] \leq \frac{\mathbb{E}[|X_n|^p; |X_n| \geq c]}{c^{p-1}} \leq \frac{\sup_m \mathbb{E}[|X_m|^p]}{c^{p-1}} .$$

Nehmen wir das Supremum über alle n und lassen $c \to \infty$, folgt die Aussage. □

3.3. Martingale

Definition 3.13. *Eine Familie $\{X_t : t \in I\}$ für eine vollständig geordnete Indexmenge I heisst* **stochastischer Prozess**. *Ist $I = \mathbb{N}$, so nennen wir den Prozess in diskreter Zeit, ist $I = [0, \infty)$ (oder $\mathbb{R}$), so nennen wir den stochastischen Prozess in stetiger Zeit. Eine aufsteigende Familie $\{\mathcal{F}_i : i \in I\}$ von Teil-σ-Algebren ($\mathcal{F}_i \subset \mathcal{F}$ und $\mathcal{F}_i \subset \mathcal{F}_j$ für $i \leq j$) heisst* **Filtration**.

Definition 3.14. *Sei $\{\mathcal{F}_n : n \in \mathbb{N}\}$ eine Filtration und $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ ein stochastischer Prozess. Wir sagen $\{X_n\}$ ist ein* **Martingal** *in diskreter Zeit, falls für alle n*

i) $\mathbb{E}[|X_n|] < \infty$ ($\{X_n\} \in \mathcal{L}^1$, **integrierbar**)

ii) X_n *ist $\mathcal{F}_n$-messbar* (**adaptiert**),

iii) $\mathbb{E}[X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] = X_n$ (**innovativ**).

Beispiel 3.15. Sei X eine Zufallsvariable mit $\mathbb{E}[|X|] < \infty$. Wir setzen $X_n = \mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}_n]$ die **sukzessiven Prognosen**. Dann ist $\mathbb{E}[|X_n|] = \mathbb{E}[|\mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}_n]|] \leq \mathbb{E}[\mathbb{E}[|X| \mid \mathcal{F}_n]] = \mathbb{E}[|X|] < \infty$. Nach der Definition der bedingten Erwartung ist X_n $\mathcal{F}_n$-messbar. Weiter haben wir $\mathbb{E}[X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}_{n+1}] \mid \mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}_n] = X_n$. Somit ist $\{X_n\}$ ein Martingal. ■

Mit vollständiger Induktion folgt sofort, dass für $k \leq n$, $\mathbb{E}[X_n \mid \mathcal{F}_k] = X_k$ und $\mathbb{E}[X_n] = \mathbb{E}[X_0]$. Wir können daher ein Martingal als faires Spiel interpretieren. Ist X_k die Bilanzentwicklung in einem Spiel, so gewinnt man im Mittel nichts.

Wir wollen nun die Idee des Spiels noch ausweiten. Wir sagen, $\{V_n\}$ ist **previsibel**, falls V_n $\mathcal{F}_{n-1}$-messbar ist, wobei wir $\mathcal{F}_{-1} = \{\emptyset, \Omega\}$ setzen. Wir sagen, $\{V_n\}$ ist ein **Spielsystem**, falls $\{V_n\}$ previsibel ist und $\mathbb{E}[|V_n(X_n - X_{n-1})|] < \infty$. Ist zum Beispiel $\{X_n\}$ die Kursentwicklung einer Aktie und halten wir in der n-ten Periode V_n Aktien, dann ist der Gewinn in der n-ten Periode $V_n(X_n - X_{n-1})$. Wir definieren nun den Prozess (Bilanzentwicklung)

$$(V.X)_n := X_0 + \sum_{k=1}^{n} V_k(X_k - X_{k-1}) \; .$$

Proposition 3.16. *Sei $\{X_n\}$ ein Martingal. Für jedes Spielsystem $\{V_n\}$ ist der Prozess $\{(V.X)_n\}$ ein Martingal.*

Beweis. Der Prozess ist in $\mathcal{L}^1$ und adaptiert. Weiter gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[(V.X)_{n+1} - (V.X)_n \mid \mathcal{F}_n] &= \mathbb{E}[V_{n+1}(X_{n+1} - X_n) \mid \mathcal{F}_n] \\ &= V_{n+1}\mathbb{E}[X_{n+1} - X_n \mid \mathcal{F}_n] = 0\ .\end{aligned}$$

Also ist der Prozess auch innovativ. □

3.4. Stoppzeiten und Stoppsatz

Definition 3.17. *Eine Zufallsvariable $T : \Omega \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ heisst* **Stoppzeit**, *falls $\{T = n\} \in \mathcal{F}_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.*

Wir könnten alternativ auch verlangen, dass $\{T \le n\} \in \mathcal{F}_n$ oder $\{T > n\} \in \mathcal{F}_n$. Wir wissen also in jedem Zeitpunkt, ob schon gestoppt wurde oder nicht.

Beispiel 3.18. Sei $A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$ eine Borelmenge und $T = \inf\{n \ge 0 : X_n \in A\}$ für einen adaptierten Prozess X. Dann ist T eine Stoppzeit bezüglich der natürlichen Filtration $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \dots, X_n)$. ■

Proposition 3.19. (Stoppsatz) *Sei $\{X_n\}$ ein Martingal und T eine Stoppzeit. Das gestoppte Martingal $\{X_{T\wedge n}\}$ ist ein Martingal.*

Beweis. Wir haben, dass $V_n = \mathbb{1}_{T\ge n} = \mathbb{1}_{T>n-1}$ ein Spielsystem ist. Also ist der gestoppte Prozess

$$X_{T\wedge n} = X_0 + \sum_{k=1}^{n} V_k(X_k - X_{k-1}) = (V.X)_n$$

ein Martingal. □

Insbesondere erhalten wir für ein Martingal X und eine Stoppzeit T, $\mathbb{E}[X_{T\wedge n}] = \mathbb{E}[X_0]$.

Beispiel 3.20. Seien $\{Y_i\}$ unabhängig und identisch verteilt (kurz **iid**) mit $\mathbb{P}[Y_1 = 1] = 1 - \mathbb{P}[Y_i = -1] = p \in (0, 1)$. Wir verwenden die Filtration $\mathcal{F}_n = \sigma(Y_1, \dots, Y_n)$. Wir setzen $S_n = \sum_{k=1}^n Y_k$ (Bilanzentwicklung in einem Spiel, in dem immer eine Geldeinheit gesetzt wird). Sei $T = \inf\{n \ge 0 : S_n \notin (a, b)\}$, wobei $a < 0 < b$ ($|a|$ und b sind die Anfangskapitalien von zwei Spielern, T ist die erste Ruinzeit).

Die Ereignisse $A_n = \{Y_{nk+1} = 1, Y_{nk+2} = 1, \ldots, Y_{(n+1)k} = 1\}$ sind für $k = b - a$ unabhängig und es folgt aus dem Borel–Cantelli-Lemma, dass $T < \infty$ f.s.. Nehmen wir zuerst $p = \frac{1}{2}$ an. Dann folgt aus dem Stoppsatz $\mathbb{E}[S_{T\wedge n}] = \mathbb{E}[S_0] = 0$. Da $|S_{T\wedge n}| \le \max\{|a|, b\}$, gilt

$$0 = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[S_{T\wedge n}] = \mathbb{E}[\lim_{n\to\infty} S_{T\wedge n}] = \mathbb{E}[S_T] = a\mathbb{P}[S_T = a] + b\mathbb{P}[S_T = b] \; .$$

Also folgern wir

$$\mathbb{P}[S_T = a] = \frac{b}{b-a} \; .$$

Ist nun $p \neq \frac{1}{2}$, so sieht man einfach, dass

$$X_n = \Bigl(\frac{1-p}{p}\Bigr)^{S_n}$$

ein Martingal ist. Also erhalten wir

$$1 = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[X_{T\wedge n}] = \mathbb{E}[X_T] = \Bigl(\frac{1-p}{p}\Bigr)^{a}\mathbb{P}[S_T = a] + \Bigl(\frac{1-p}{p}\Bigr)^{b}\mathbb{P}[S_T = b] \; .$$

Somit erhalten wir

$$\mathbb{P}[S_T = a] = \frac{1-(p/(1-p))^b}{1-(p/(1-p))^{b-a}} = \frac{(1-p)^b - p^b}{(1-p)^b - (1-p)^a p^{b-a}} \; .$$

Ist nun $p < \frac{1}{2}$, so haben wir $\mathbb{P}[S_T = a] \ge 1 - (p/(1-p))^b$. Setzen wir z.B. $p = 18/37$ (Roulette) und $b = 128$, so erhalten wir $\mathbb{P}[S_T = a] \ge 0.999$. Die Spielbank benötigt also 128 Einheiten, um mit Wahrscheinlichkeit 0.999 nicht gesprengt zu werden. ■

Beispiel 3.21. Sei $\{Y_n\}$ iid mit $\mathbb{P}[Y_i = 1] = \mathbb{P}[Y_i = 0] = \frac{1}{2}$ eine zufällige binäre Folge. Sei $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ ein Wort der Länge k. Wir setzen $T = \inf\{n : Y_{n-k+1} = a_1, \ldots, Y_n = a_k\}$ den ersten Zeitpunkt, an dem das Wort auftaucht. Wir wollen nun $\mathbb{E}[T]$ bestimmen. Aus dem Borel–Cantelli-Lemma folgt, dass $T < \infty$. Wir starten nun folgende Wette. Zuerst setzen wir 1 auf a_1. Falls a_1 kommt, setzen wir 2 auf a_2. Falls auch a_2 kommt, setzen wir 4 auf a_3. Falls der falsche Wert kommt, stoppen wir das Spiel. Die Filtration ist $\mathcal{F}_n = \sigma(Y_1, \ldots, Y_n)$. Wir setzen nun $\alpha_\ell = 1$, falls $a_m = a_{\ell+m-1}$ für $1 \le m \le k - \ell + 1$ und $1 \le \ell \le k$ und $\alpha_\ell = 0$ sonst. Wir starten nun in jedem Zeitpunkt ein Spiel. Die Bilanzentwicklung der in m gestarteten Wette ist

$$\begin{cases} -1 \; , & \text{falls } m \le T - k, \\ -1 \; , & \text{falls } m = T - k + \ell,\ 1 \le \ell \le k \text{ und } \alpha_\ell = 0, \\ 2^{k-\ell+1} - 1, & \text{falls } m = T - k + \ell,\ 1 \le \ell \le k \text{ und } \alpha_\ell = 1. \end{cases}$$

Die Bilanz all dieser Wetten ist

$$\sum_{\ell=1}^{k} \alpha_\ell 2^{k-\ell+1} - T \;.$$

Da es sich um ein Spielsystem für ein faires Spiel handelt, ist der mittlere Gewinn 0. Also erhalten wir

$$\mathbb{E}[T] = \mathbb{E}\Bigl[\sum_{\ell=1}^{k} \alpha_\ell 2^{k-\ell+1}\Bigr] = \sum_{\ell=1}^{k} \alpha_\ell 2^{k-\ell+1} \;.$$

Betrachten wir im Falle $k = 2$ zum Beispiel 11. Dann ist $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ und $\mathbb{E}[T] = 6$. Betrachten wir 10, so ist $\alpha_2 = 0$, und $\mathbb{E}[T] = 4$. Man muss im Schnitt also länger auf 11 warten als auf 10. ∎

Wir betrachten nun die Irrfahrt $S_n = \sum_{k=1}^n Y_k$, wobei $\{Y_k\}$ iid sind mit $\mathbb{E}[Y_k] = m \in \mathbb{R}$ und $\operatorname{Var}[Y_k] = \sigma^2 \le \infty$.

Hilfssatz 3.22. (Wald'sche Identitäten) *Für jede Stoppzeit mit* $\mathbb{E}[T] < \infty$ *gilt* $\mathbb{E}[S_T] = m\mathbb{E}[T]$. *Ist* $\sigma^2 < \infty$, *so gilt* $\mathbb{E}[(S_T - mT)^2] = \sigma^2\mathbb{E}[T]$.

Beweis. Sei zuerst $Y_k \ge 0$. Dann ist $\{S_n - nm\}$ ein Martingal. Aus dem Stoppsatz folgt $\mathbb{E}[S_{T\wedge n} - (T \wedge n)m] = 0$. Also gilt

$$\mathbb{E}[S_{T\wedge n}] = \mathbb{E}[T \wedge n]m \;.$$

Die Aussage folgt dann mit monotoner Konvergenz. Für den allgemeinen Fall betrachten wir $S_n^+ = \sum_{k=1}^n Y_k^+$ und $S_n^- = \sum_{k=1}^n Y_k^-$.

Sei nun $\sigma^2 < \infty$. Wir können $m = 0$ annehmen. Dann ist

$$\mathbb{E}[S_{n+1}^2 - S_n^2 \mid \mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[Y_{n+1}^2 \mid \mathcal{F}_n] + 2\mathbb{E}[S_n Y_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] = \sigma^2 + 2S_n\mathbb{E}[Y_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] = \sigma^2 \;.$$

Also ist $\{S_n^2 - \sigma^2 n\}$ ein Martingal. Wir setzen $T_a = \inf\{n : S_n^2 \ge a^2\}$ für ein $a > 0$ und $T' = T \wedge T_a$. Aus dem Stoppsatz folgt $\mathbb{E}[S_{T'\wedge n}^2] = \sigma^2\mathbb{E}[T' \wedge n]$. Durch direkte Verifikation folgt leicht, dass $\mathbb{E}[|Y_1|; |Y_1| \ge c - a \mid Y_1 > b_1 \text{ oder } Y_1 < -b_2]$ für $b_i \in [0, 2a]$ maximal für $b_1 = b_2 = 2a$ wird. Wegen

$$\mathbb{E}[S_{T'\wedge n}^2; S_{T'\wedge n}^2 \ge c^2] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[S_{T'\wedge n}^2; S_{T'\wedge n}^2 \ge c^2, T' = T_a \mid S_{(T'\wedge n)-1}]]$$

für $c > 2a$, erhalten wir

$$\mathbb{E}[S_{T'\wedge n}^2; S_{T'\wedge n}^2 \ge c^2] \le \mathbb{E}[a^2 + 2a|Y_1| + Y_1^2; |Y_1| \ge c - a \mid |Y_1| \ge 2a] \;,$$

da c^2 und damit a^2 zur Zeit $T' \wedge n$ überschritten werden muss, die Variable $|Y|$ mindestens $c - a$ sein muss und für $|Y| > 2a$, die Schranke a^2 sicher überschritten wird. Da $a^2 + 2a|Y_1| + Y_1^2$ bedingt integrierbar ist, konvergiert die rechte Seite für $c \to \infty$ gegen 0. Also ist $\{S^2_{T'\wedge n}\}$ gleichmässig integrierbar. Daher folgt $\mathbb{E}[S^2_{T'}] = \sigma^2 \mathbb{E}[T']$. Lassen wir nun $a \to \infty$, folgt die Aussage mittels monotoner Konvergenz.

□

Für eine Stoppzeit T definieren wir

$$\mathcal{F}_T := \{A \in \mathcal{F} : A \cap \{T = n\} \in \mathcal{F}_n \text{ für alle } n \in \mathbb{N}\} .$$

Es ist einfach zu sehen, dass $\mathcal{F}_T$ eine σ-Algebra ist. Sind S und T zwei Stoppzeiten mit $S \le T$, dann ist $\mathcal{F}_S \subset \mathcal{F}_T$. Dies folgt, da $A \cap \{T \le n\} = A \cap \{T \le n\} \cap \{S \le n\} \in \mathcal{F}_n$, sofern $A \in \mathcal{F}_S$.

3.5. Der Stopp- und der Konvergenzsatz für Submartingale

Definition 3.23. *Ein stochastischer Prozess M heisst* **Submartingal** (**Supermartingal**)*, falls*

i) $\mathbb{E}[|M_n|] < \infty$

ii) $\{M_n\}$ *ist adaptiert,*

iii) $\mathbb{E}[M_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] \ge M_n$ ($\mathbb{E}[M_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] \le M_n$).

Wir haben folgende Version des Stoppsatzes:

Satz 3.24. (Optionaler Stoppsatz) *Seien $\{M_n\}$ ein Submartingal, S und T zwei Stoppzeiten. Dann ist $\{M_{T\wedge n}\}$ ein Submartingal. Weiter gilt für alle $n \in \mathbb{N}$*

$$\mathbb{E}[M_{S\wedge n} \mid \mathcal{F}_T] \ge M_{S\wedge T\wedge n} .$$

Beweis. Ist $T \le n$, dann ist natürlich $\mathbb{E}[M_{T\wedge(n+1)} \mid \mathcal{F}_n] = M_T = M_{T\wedge n}$. Ist $T > n$, dann ist $\mathbb{E}[M_{T\wedge(n+1)} \mid \mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[M_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] \ge M_n = M_{T\wedge n}$. Also ist $\{M_{T\wedge n}\}$ ein Submartingal.

Sei $m \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathcal{F}_T$. Dann erhalten wir

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[M_{S\wedge n} \mathbb{1}_{T=m} \mathbb{1}_A] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[M_{S\wedge n} \mid \mathcal{F}_m] \mathbb{1}_{T=m} \mathbb{1}_A] \ge \mathbb{E}[M_{S\wedge n\wedge m} \mathbb{1}_{T=m} \mathbb{1}_A] \\ &= \mathbb{E}[M_{S\wedge T\wedge n} \mathbb{1}_{T=m} \mathbb{1}_A] . \end{aligned}$$

Also ist $\mathbb{E}[M_{S\wedge n}\mathbb{1}_{T=m} \mid \mathcal{F}_T] \ge M_{S\wedge T\wedge n}\mathbb{1}_{T=m}$. Weiter gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[M_{S\wedge n}\mathbb{1}_{T>n} \mid \mathcal{F}_T] = \mathbb{E}[M_{S\wedge n} \mid \mathcal{F}_T]\mathbb{1}_{T>n} &= \mathbb{E}[M_{S\wedge n} \mid \mathcal{F}_{T\vee n}]\mathbb{1}_{T>n} = M_{S\wedge n}\mathbb{1}_{T>n} \\ &= M_{S\wedge T\wedge n}\mathbb{1}_{T>n}\;,\end{aligned}$$

da $\mathcal{F}_{S\wedge n} \subset \mathcal{F}_{T\vee n}$. Somit erhalten wir

$$\mathbb{E}[M_{S\wedge n} \mid \mathcal{F}_T] = \sum_{m=0}^{n} \mathbb{E}[M_{S\wedge n}\mathbb{1}_{T=m} \mid \mathcal{F}_T] + \mathbb{E}[M_{S\wedge n}\mathbb{1}_{T>n} \mid \mathcal{F}_T] \ge M_{S\wedge T\wedge n}\;.$$

□

Bemerkung. Ist M ein Martingal, so sind M und $-M$ Submartingale. Somit gilt $\mathbb{E}[M_{S\wedge n} \mid \mathcal{F}_T] = M_{S\wedge T\wedge n}$. ■

Seien $a < b$ zwei reelle Zahlen. Wir definieren folgende Stoppzeiten.

$$\begin{aligned} T_0 &= 0\;, \\ S_k &= \inf\{n \ge T_{k-1} : M_n \le a\}\;, \\ T_k &= \inf\{n \ge S_k : M_n \ge b\}\;. \end{aligned}$$

S_k ist der Anfang der k-ten Überquerung des Intervalls (a,b), T_k ist das Ende. Eventuell sind ab einem gewissen k die Stoppzeiten unendlich. Weiter definieren wir $U_n(a,b) = \sup\{m : T_m \le n\}$ die Anzahl Überquerungen von unten nach oben des Intervalls bis zur Zeit n.

Hilfssatz 3.25. (Upcrossing-Lemma) *Sei $\{M_n\}$ ein Submartingal. Es gilt*

$$\mathbb{E}[U_n(a,b)] \le \frac{\mathbb{E}[(M_n-a)^+]}{b-a} \le \frac{\mathbb{E}[M_n^+] + a^-}{b-a}\;.$$

Beweis. Wir bemerken zuerst, dass wegen Jensens Ungleichung $\{(M_n - a)^+\}$ ein Submartingal ist. Wir können also $M_n \ge 0$ und $a = 0$ annehmen. Da eine Überquerung in 0 startet, können wir auch $M_0 = 0$ annehmen. Wir erhalten dann

$$\begin{aligned} b\,\mathbb{E}[U_n(0,b)] &\le \mathbb{E}\Bigl[\sum_{k=1}^{n} M_{T_k\wedge n} - M_{S_k\wedge n}\Bigr] \\ &\le \mathbb{E}\Bigl[\sum_{k=1}^{n}(M_{T_k\wedge n} - M_{S_k\wedge n}) + (M_{S_{k+1}\wedge n} - M_{T_k\wedge n})\Bigr] = \mathbb{E}[M_n]\;, \end{aligned}$$

wobei wir verwendet haben, dass $\mathbb{E}[M_{S_{k+1}\wedge n} - M_{T_k\wedge n}] \ge 0$, was aus dem optionalen Stoppsatz 3.24 folgt, da $S_{k+1} > T_k$. □

Satz 3.26. (Konvergenzsatz) *Sei M ein Submartingal, so dass* $\sup_n \mathbb{E}[M_n^+] < \infty$. *Dann gibt es eine Zufallsvariable M_∞, so dass* $\lim_{n\to\infty} M_n = M_\infty$. *Weiter gilt* $\mathbb{E}[|M_\infty|] < \infty$.

Beweis. Wir setzen $U(a,b) = \lim_{n\to\infty} U_n(a,b)$. Wir schliessen aus dem Upcrossing-Lemma, dass $\mathbb{E}[U(a,b)] = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[U_n(a,b)] \le (b-a)^{-1} \sup_n(\mathbb{E}[M_n^+] + a^-) < \infty$. Somit ist $U(a,b)$ fast sicher endlich für alle $a < b$ (in $\mathbb{Q}$). Insbesondere existiert $M_\infty \in [-\infty, \infty]$. Wir haben aus dem Lemma von Fatou

$$\mathbb{E}[|M_\infty|] \le \varliminf_{n\to\infty} \mathbb{E}[|M_n|] = \sup_n \mathbb{E}[|M_n|]$$

wobei wir im letzten Schritt verwendet haben, dass $\{|M_n|\}$ ein Submartingal ist. Da

$$\mathbb{E}[M_n^-] = \mathbb{E}[M_n^+] - \mathbb{E}[M_n] \le \mathbb{E}[M_n^+] - \mathbb{E}[M_0] \le \sup_{n\ge 0} \mathbb{E}[M_n^+] - \mathbb{E}[M_0] \;,$$

ist auch $\mathbb{E}[M_n^-]$ und damit $\mathbb{E}[|M_n|]$ beschränkt. Also ist $M_\infty \in \mathbb{R}$ und integrierbar. $\square$

Beispiel 3.27. Seien $\{Y_i\}$ iid mit $\mathbb{P}[Y_i = 1] = 1 - \mathbb{P}[Y_i = -1] = p \in (0,1)$ und $S_n = \sum_{i=1}^n Y_i$ die dazugehörige Irrfahrt. Ist $p \ne \frac{1}{2}$, so ist $M_n = ((1-p)/p)^{S_n}$ ein Martingal. Wir haben $M_n \ge 0$, also ist das Submartingal $-M_n$ konvergent. Da $M_{n+1} - M_n = M_n[((1-p)/p)^{Y_{n+1}} - 1]$, ist der einzig mögliche Grenzwert 0. Ist $p > \frac{1}{2}$, so geht $S_n \to \infty$, ist $p < \frac{1}{2}$, so geht $S_n \to -\infty$. Wir haben also $M_\infty = 0 \ne 1 = \mathbb{E}[M_0]$, das heisst wir können Limes und Erwartungswert nicht vertauschen.

Ist $p = \frac{1}{2}$, so ist $\{S_n\}$ ein Martingal. Da $|S_{n+1} - S_n| = 1$, kann S_n nicht konvergieren. Also ist $\mathbb{E}[S_n^+]$ unbegrenzt. Sei $T_a = \inf\{n : S_n = a\}$. Für $a > 0$, ist $\{S_{T_a\wedge n}\}$ ein nach oben begrenztes Martingal. Somit konvergiert $S_{T_a\wedge n}$. Dies ist nur möglich, falls $T_a < \infty$. Auch hier, $a = S_{T_a} \ne \mathbb{E}[S_0]$. Aus der Wald'schen Identität schliessen wir, dass $\mathbb{E}[T_a] = \infty$. ■

Wir definieren die Mengen

$$C = \{\exists M_\infty = \lim_{n\to\infty} M_n \in \mathbb{R}\}$$

und

$$E = \{\varlimsup_{n\to\infty} M_n = -\varliminf_{n\to\infty} M_n = \infty\}\;.$$

Korollar 3.28. *Sei M ein Martingal, so dass* $\mathbb{E}[\sup_n |M_{n+1} - M_n|] < \infty$. *So gilt* $\mathbb{P}[C \cup E] = 1$.

Beweis. Sei $a \in \mathbb{R}$ und $T_a = \inf\{n : M_n \geq a\}$. Dann ist $\mathbb{E}[(M_{T_a \wedge n})^+] \leq a + \mathbb{E}[\sup_m |M_{m+1} - M_m|]$ beschränkt. Also konvergiert $\{M_{T_a \wedge n}\}$ nach dem Konvergenzsatz. Somit konvergiert $\{M_n\}$ oder $T_a < \infty$. Da dies für alle a gilt, haben wir $\mathbb{P}[C \cup \{\overline{\lim}\, M_n = \infty\}] = 1$. Analog folgt $\mathbb{P}[C \cup \{\underline{\lim}\, M_n = -\infty\}] = 1$. □

Korollar 3.29. (Verallgemeinertes Lemma von Borel–Cantelli) *Seien die Mengen $A_n \in \mathcal{F}_n$ und*

$$A_\infty = \cap_n \cup_{m \geq n} A_m = \Bigl\{\sum_{n=1}^\infty \mathbb{1}_{A_n} = \infty\Bigr\}\,.$$

Dann ist

$$\mathbb{P}\Bigl[A_\infty = \Bigl\{\sum_{n=1}^\infty \mathbb{P}[A_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] = \infty\Bigr\}\Bigr] = 1\,.$$

Bemerkung. Sind $\{A_n\}$ unabhängige Ereignisse und $\mathcal{F}_n = \sigma(A_1, \ldots, A_n)$, so gilt $\mathbb{P}[A_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] = \mathbb{P}[A_{n+1}]$. Also ist

$$\mathbb{P}[A_\infty] = \begin{cases} 1, & \text{falls } \sum_{n=1}^\infty \mathbb{P}[A_n] = \infty, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

■

Beweis. Sei $Y_k = \mathbb{1}_{A_k} - \mathbb{P}[A_k \mid \mathcal{F}_{k-1}]$. Dann ist $M_n = \sum_{k=1}^n Y_k$ ein Martingal mit beschränkten Zuwächsen. Also ist $\mathbb{P}[E \cup C] = 1$. Auf C gilt $A_\infty = \{\sum_{k=1}^\infty \mathbb{1}_{A_k} = \infty\} \iff \{\sum_{k=1}^\infty \mathbb{P}[A_k \mid \mathcal{F}_{k-1}] = \infty\}$. Auf E haben wir sowohl $A_\infty = \{\sum_{k=1}^\infty \mathbb{1}_{A_k} = \infty\}$ als auch $\{\sum_{k=1}^\infty \mathbb{P}[A_k \mid \mathcal{F}_{k-1}] = \infty\}$. □

Beispiel 3.30. Ein Population besteht aus N Individuen. Davon sind x Individuen krank. In der nächsten Periode ist jedes Individuum krank mit Wahrscheinlichkeit x/N, wobei die Erkrankung/Gesundung unabhängig von den anderen Individuen geschieht. Das heisst, die Anzahl Kranken ist binomial verteilt mit Parameter N und x/N. Sei $K(x,y) = \binom{N}{y}(x/N)^y((N-x)/N)^{N-y}$ die Wahrscheinlichkeit, dass es in der nächsten Periode y Kranke gibt. Es gilt dann $K(N,N) = K(0,0) = 1$, das heisst, 0 und N sind absorbierend. Sei M_n die Anzahl der Kranken zum Zeitpunkt n. Dann ist

$$\mathbb{E}[M_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] = \sum_{k=0}^N k K(M_n, k) = N\frac{M_n}{N} = M_n\,.$$

Also ist $\{M_n\}$ ein beschränktes Martingal. Damit existiert $M_\infty = \lim_{n\to\infty} M_n$. Insbesondere ist M_n schliesslich konstant. Nehmen wir an, dass $M_\infty = x \notin \{0, N\}$. Dann ist $\sum_{k=1}^\infty \mathbb{P}[M_k = N \mid \mathcal{F}_{k-1}] = \infty$, also kann M_n nicht nach x konvergieren. Somit ist $T = \inf\{n : M_n \in \{0, N\}\}$ endlich. Da M_n beschränkt ist, können wir Limes und Erwartungswert vertauschen und erhalten

$$x = M_0 = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[M_n] = \mathbb{E}[M_T] = N\mathbb{P}[M_T = N] \; .$$

Also haben wir $\mathbb{P}[M_T = N] = x/N$. ■

Wir haben folgende alternativen Definitionen für ein Martingal.

Hilfssatz 3.31. *Sei $\{M_n\}$ ein adaptierter und integrierbarer Prozess, so dass $\mathbb{E}[|M_0|] < \infty$.*

i) *$\{M_n\}$ ist genau dann ein Martingal, wenn für jede beschränkte Stoppzeit T $\mathbb{E}[M_T] = \mathbb{E}[M_0]$ gilt.*

ii) *$\{M_n\}$ ist genau dann ein Submartingal, wenn für jedes Paar $T \le S$ von beschränkten Stoppzeiten $\mathbb{E}[M_T] \le \mathbb{E}[M_S]$ gilt.*

Beweis. i) Sei $n \le m$ und $A \in \mathcal{F}_n$. Wir setzen $T = m-(m-n)\mathbb{1}_A = n\mathbb{1}_A + m\mathbb{1}_{A^c}$. Dies ist eine Stoppzeit. Dann haben wir $\mathbb{E}[M_0] = \mathbb{E}[M_T] = \mathbb{E}[M_n\mathbb{1}_A] + \mathbb{E}[M_m\mathbb{1}_{A^c}]$. Weiter gilt $\mathbb{E}[M_0] = \mathbb{E}[M_m] = \mathbb{E}[M_m\mathbb{1}_A] + \mathbb{E}[M_m\mathbb{1}_{A^c}]$, das heisst, $\mathbb{E}[M_n\mathbb{1}_A] = \mathbb{E}[M_m\mathbb{1}_A]$. Da A beliebig war, gilt $\mathbb{E}[M_m \mid \mathcal{F}_n] = M_n$. Die Umkehrung folgt aus dem Stoppsatz.
ii) Setzen wir $S = m$ und T wie oben, so folgt analog $\mathbb{E}[M_n\mathbb{1}_A] \le \mathbb{E}[M_m\mathbb{1}_A]$. Setzen wir $A = \{M_n > \mathbb{E}[M_m \mid \mathcal{F}_n]\}$, so haben wir

$$0 \le \mathbb{E}[(M_n - \mathbb{E}[M_m \mid \mathcal{F}_n])\mathbb{1}_A] = \mathbb{E}[(M_n - M_m)\mathbb{1}_A] \le 0 \; .$$

Daraus schliessen wir, dass $\mathbb{P}[A] = 0$. Die Umkehrung folgt aus dem Satz 3.24. □

3.6. Der Galton–Watson-Prozess

Sei X_n die Grösse einer Population in der n-ten Generation. Das k-te Individuum der n-ten Generation hat Y_k^n Nachkommen. Die Variablen $\{Y_k^n : 1 \le k < \infty, n \in \mathbb{N}\}$ sind unabhängig und identisch verteilt mit Verteilungsfunktion $\mu_\ell = \mathbb{P}[Y_k^n = \ell]$. Sei Y eine Variable mit dieser Verteilung und $m = \mathbb{E}[Y]$. Wir nehmen an, dass $\mu_m \ne 1$, da sonst die Entwicklung deterministisch wäre. Dann ist die Grösse der $(n+1)$-ten Generation

$$X_{n+1} = \sum_{k=1}^{X_n} Y_k^n \;.$$

Dieser Prozess heisst Galton–Watson-Prozess.

Aus der Wald'schen Identität schliessen wir, dass $\mathbb{E}[X_n \mid X_{n-1}] = mX_{n-1}$, also $\mathbb{E}[X_n] = m\mathbb{E}[X_{n-1}] = m^n X_0$. Sei $\sigma^2 = \operatorname{Var}[Y] < \infty$. Aus

$$\mathbb{E}[X_n^2 \mid X_{n-1} = k] = \sigma^2 k + m^2 k^2 = \sigma^2 X_{n-1} + m^2 X_{n-1}^2$$

erhalten wir $\mathbb{E}[X_n^2 \mid X_{n-1}] = \sigma^2 X_{n-1} + m^2 X_{n-1}^2$. Also ist $\operatorname{Var}[X_n] = \sigma^2 \mathbb{E}[X_{n-1}] + m^2 \operatorname{Var}[X_{n-1}]$. Ist $m = 1$, ergibt sich also $\operatorname{Var}[X_n] = n\sigma^2 X_0$. Ist $m \neq 1$, erhalten wir

$$\operatorname{Var}[X_n] = \sigma^2 X_0 m^{n-1} + m^2\sigma^2 X_0 m^{n-2} + \cdots + m^{2(n-1)}\sigma^2 X_0 = \sigma^2 X_0 m^{n-1} \frac{m^n - 1}{m-1} \;.$$

Die Varianz geht also gegen Null falls $m < 1$ und gegen unendlich, falls $m \geq 1$.

Wir wollen nun das Verhalten der Trajektorien untersuchen. Definieren wir die Filtration $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, X_1, \ldots, X_n)$. Dann ist $M_n = X_n/m^n$ ein Martingal. Sei $T = \inf\{n : X_n = 0\}$. Das Martingal ist positiv, also konvergiert $\{M_n\}$ fast sicher und M_∞ ist integrierbar. Wir haben also, dass $X_n = O(M_\infty m^n)$. Ist $m < 1$, so sehen wir, dass $\{X_n\}$ gegen Null konvergiert, das heisst, $T < \infty$. Ist nun $m = 1$ (dann haben wir $\mu_0 > 0$), so konvergiert $\{X_n\}$. Da

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}[X_{n+1} = 0 \mid \mathcal{F}_n] = \sum_{n=0}^{\infty} \mu_0^{X_n} = \infty \;,$$

(da X_n konvergiert) schliessen wir, dass $\{X_n = 0\}$ unendlich oft. Somit stirbt auch im Falle $m = 1$ die Population aus.

Es bleibt also der Fall $m > 1$. Wir nehmen $\mu_0 > 0$ an, da sonst $T = \infty$. Sei $f(s) = \mathbb{E}[s^Y] = \sum_{k=0}^\infty \mu_k s^k$ die Erzeugendenfunktion von Y. Die Ableitung ist

$$f'(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k k s^{k-1} \;.$$

Insbesondere ist $f'(1) = m > 1$. Die zweite Ableitung ist

$$f''(s) = \sum_{k=2}^{\infty} \mu_k k(k-1) s^{k-2} > 0 \;.$$

Wir schliessen, dass $g(s) = f(s) - s$ eine konvexe Funktion ist. Wir haben $g(0) = \mu_0$, $g(1) = 0$ und $g'(1) = m - 1 > 0$. Somit muss es einen eindeutigen Punkt $s_0 \in (0,1)$ geben, für den $g(s_0) = 0$. Wir betrachten nun den Prozess $\{Z_n = s_0^{X_n}\}$. Wir erhalten

$$\mathbb{E}[Z_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[s_0^{X_{n+1}} \mid \mathcal{F}_n] = \mathbb{E}\Bigl[\prod_{k=1}^{X_n} s_0^{Y_k^n} \Bigm| \mathcal{F}_n\Bigr] = \prod_{k=1}^{X_n} \mathbb{E}[s_0^{Y_k^n} \mid \mathcal{F}_n] = s_0^{X_n} = Z_n \;.$$

Somit ist Z ein Martingal und $\mathbb{E}[Z_n] = Z_0 = s_0^{X_0}$. Da $0 < Z_n \le 1$, konvergiert Z_n für $n \to \infty$. Analog zum Beweis im Fall $m = 1$, schliessen wir, dass $Z_\infty \in \{0,1\}$. Also stirbt die Population aus oder sie wächst wächst gegen Unendlich. Wir haben dann

$$s_0^{X_0} = Z_0 = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[Z_n] = \mathbb{E}[Z_\infty] = \mathbb{P}[Z_\infty = 1] = \mathbb{P}[T < \infty] \;.$$

Die Population stirbt also nicht notwendigerweise aus.

Nehmen wir nun an, dass $\sigma^2 = \operatorname{Var}[Y] < \infty$. Dann haben wir

$$\mathbb{E}[M_n^2] = \frac{\mathbb{E}[X_n^2]}{m^{2n}} = m^{-2n}\Bigl(\sigma^2 X_0 m^{n-1}\frac{m^n - 1}{m - 1} + X_0^2 m^{2n}\Bigr) \le \frac{\sigma^2 X_0}{m-1} + X_0^2 \;.$$

Also ist nach Hilfssatz 3.12 das Martingal $\{M_n\}$ gleichmässig integrierbar. Dies bedeutet, dass $\mathbb{E}[M_\infty] = \mathbb{E}[M_0] = X_0$. Insbesondere können wir schliessen, dass $s_1^{X_0} := \mathbb{P}[M_\infty = 0] < 1$.

Sei X_n^{0k} die Anzahl Nachkommen der n-ten Generation des k-ten Individuums und $M_n^{0k} = X_n^{0k}/m^n$. Wir schreiben nun

$$s_1^{X_0} = \mathbb{P}[M_\infty^{0k} = 0, 1 \le k \le X_0] = \prod_{k=1}^{X_0} \mathbb{P}[M_\infty^{0,k} = 0] = \mathbb{P}[M_\infty^{0,1} = 0]^{X_0} \;.$$

Nehmen wir nun an, dass $X_0 = 1$. Sei X_n^{1k} der Prozess, der vom k-ten Nachkommen der 1. Generation gestartet wird. Dann erhalten wir

$$s_1 = \sum_{k=0}^{\infty} \mu_k \mathbb{P}[M_\infty = 0 \mid X_1 = k] = \sum_{k=0}^{\infty} \mu_k \mathbb{P}[M_\infty^{11} = 0]^k = \sum_{k=0}^{\infty} \mu_k s_1^k = f(s_1) \;.$$

Da $s_1 < 1$ schliessen wir, dass $s_1 = s_0$. Da $\{T < \infty\} \subset \{M_\infty = 0\}$ und $\mathbb{P}[M_\infty = 0] = s_0^{X_0} = \mathbb{P}[T < \infty]$, schliessen wir, dass $\{T < \infty\} = \{M_\infty = 0\}$ fast sicher. Somit stirbt die Population aus oder sie wächst exponentiell schnell wie $M_\infty m^n$, wobei $M_\infty \ne 0$.

3.7. Sukzessive Prognosen

Wir haben gesehen, dass $\mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}_n]$ ein Martingal ist, wenn X integrierbar ist. Wir wollen diese Martingale nun genauer untersuchen.

Satz 3.32. *Ein Martingal $\{M_n\}$ ist genau dann gleichmässig integrierbar, wenn es eine integrierbare Zufallsvariable X gibt, so dass $M_n = \mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}_n]$. Setzen wir $\mathcal{F}_\infty = \bigvee_{n\ge 0} \mathcal{F}_n = \sigma(\cup_{n\ge 0}\mathcal{F}_n)$, so erhalten wir $M_\infty = \lim_{n\to\infty} M_n = \mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}_\infty]$. Weiter haben wir $\mathbb{E}[M_\infty^2] < \infty$ genau dann, wenn $\sup_n \mathbb{E}[M_n^2] < \infty$. Es gilt dann $M_n \to M_\infty$ in $\mathcal{L}^2$. Ist $\{M_n\}$ ein Martingal mit $\sup_n \mathbb{E}[M_n^2] < \infty$, dann ist $\{M_n\}$ gleichmässig integrierbar.*

Beweis. Nehmen wir zuerst $M_n = \mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}_n]$ an. Also gilt für jedes $a < c$,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[|M_n|; |M_n| \ge c] &= \mathbb{E}[|\mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}_n]|; |M_n| \ge c] \le \mathbb{E}[\mathbb{E}[|X| \mid \mathcal{F}_n]; |M_n| \ge c] \\ &= \mathbb{E}[|X|; |M_n| \ge c] \le \mathbb{E}[|X|; |X| \ge a] + a\mathbb{P}[|M_n| \ge c] \;.\end{aligned}$$

Letzteren Ausdruck schätzen wir ab als

$$\mathbb{P}[|M_n| \ge c] \le \frac{\mathbb{E}[|M_n|]}{c} = \frac{\mathbb{E}[|\mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}_n]|]}{c} \le \frac{\mathbb{E}[|X|]}{c} \;.$$

Also ist

$$\mathbb{E}[|M_n|; |M_n| \ge c] \le \mathbb{E}[|X|; |X| \ge a] + \frac{a}{c}\mathbb{E}[|X|] \;.$$

Die rechte Seite ist unabhängig von n und kann durch Wahl von $a = \sqrt{c}$ und c gross genug beliebig klein gemacht werden. Also ist M gleichmässig integrierbar.

Sei nun M gleichmässig integrierbar. Dann ist für ein $c \ge 0$,

$$\sup_n \mathbb{E}[|M_n|] \le \sup_n (c + \mathbb{E}[|M_n|; |M_n| \ge c]) < \infty \;.$$

Also konvergiert M_n zu einer integrierbaren Variable M_∞. Wir haben dann

$$M_n = \lim_{m\to\infty} \mathbb{E}[M_m \mid \mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[\lim_{m\to\infty} M_m \mid \mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[M_\infty \mid \mathcal{F}_n] \;.$$

Wir müssen noch den Grenzwert identifizieren. Sei nun $A \in \cup_n \mathcal{F}_n$. Dann gibt es ein m, so dass $A \in \mathcal{F}_m$. Also

$$\mathbb{E}[M_\infty; A] = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[M_n; A] = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[\mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}_n]; A] = \mathbb{E}[X; A] \;.$$

Da $\cup_n \mathcal{F}_n$ durchschnittsabgeschlossen ist, Ω enthält und $\mathcal{F}_\infty$ erzeugt, ist $M_\infty = \mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}_\infty]$.

Nehmen wir nun an, dass $\mathbb{E}[X^2] < \infty$. Dann ist

$$\mathbb{E}[M_n^2] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}_n]^2] \le \mathbb{E}[\mathbb{E}[X^2 \mid \mathcal{F}_n]] = \mathbb{E}[X^2] \; .$$

Sei $\sup_n \mathbb{E}[M_n^2] < \infty$. Dann ist $\{M_n\}$ gleichmässig integrierbar (Hilfssatz 3.12) und es existiert X, so dass $M_n = \mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}_n]$. Somit ist $\{M_n^2\}$ ein Submartingal, das nach M_∞^2 konvergiert. Aus dem Lemma von Fatou schliessen wir

$$\mathbb{E}[M_\infty^2] \le \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[M_n^2] = \sup_n \mathbb{E}[M_n^2] < \infty \; ,$$

wobei die Gleichung aus der Submartingaleigenschaft folgt. Weiter ist

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[(M_{n+m} - M_n)^2] &= \mathbb{E}[M_{n+m}^2] + \mathbb{E}[M_n^2] - 2\mathbb{E}[M_{n+m}M_n] \\ &= \mathbb{E}[M_{n+m}^2] + \mathbb{E}[M_n^2] - 2\mathbb{E}[\mathbb{E}[M_{n+m}M_n \mid \mathcal{F}_n]] \\ &= \mathbb{E}[M_{n+m}^2] + \mathbb{E}[M_n^2] - 2\mathbb{E}[M_n^2] = \mathbb{E}[M_{n+m}^2] - \mathbb{E}[M_n^2] \; .\end{aligned}$$

Somit ist $\{M_n\}$ eine Cauchyfolge in $\mathcal{L}^2$. Nach Proposition 2.15 konvergiert $\{M_n\}$ in $\mathcal{L}^2$.

Konvergiert das Martingal $\{M_n\}$ in $\mathcal{L}^2$, so konvergiert es auch in $\mathcal{L}^1$. Damit ist $M_n = \mathbb{E}[M_\infty \mid \mathcal{F}_n]$. Somit ist $\sup_n \mathbb{E}[M_n^2] \le \mathbb{E}[M_\infty^2] < \infty$. □

Korollar 3.33. (0–1-Gesetz von Paul Lévy) *Für jedes $A \in \mathcal{F}_\infty$ gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}[A \mid \mathcal{F}_n] = 1\!\!1_A \in \{0, 1\} \; .$$

Beweis. Aus der Beschränktheit von $1\!\!1_A$ folgt, dass $\mathbb{E}[1\!\!1_A \mid \mathcal{F}_n] \to \mathbb{E}[1\!\!1_A \mid \mathcal{F}_\infty] = 1\!\!1_A$. □

Korollar 3.34. (Kolmogorovs 0–1-Gesetz) *Seien $\mathcal{B}_k$ unabhängige Mengensysteme und $\mathcal{B}_\infty = \cap_n \sigma(\cup_{k\ge n} \mathcal{B}_k)$. Dann gilt für alle $A \in \mathcal{B}_\infty$, dass $\mathbb{P}[A] \in \{0, 1\}$.*

Beweis. Wir setzen $\mathcal{F}_n = \sigma(\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_n)$. Dann ist $\mathcal{B}_\infty \subset \mathcal{F}_\infty$. Also gilt wegen der Unabhängigkeit der Mengensysteme

$$\mathbb{P}[A] = \mathbb{P}[A \mid \mathcal{F}_n] \to 1\!\!1_A \; .$$

□

Betrachten wir den Galton-Watson-Prozess mit $\sigma^2 < \infty$. Wir haben gezeigt, dass $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[M_n^2] = \sigma^2 X_0/((m(m-1))+X_0^2$. Also erhalten wir $\mathbb{E}[M_\infty^2] = \sigma^2 X_0/(m(m-1)) + X_0^2$. Damit kennen wir $\mathbb{E}[M_\infty] = X_0$ und $\mathrm{Var}[M_\infty] = \sigma^2 X_0/(m(m-1))$.

Satz 3.35. (Dreireihentheorem) *Seien $\{X_k\}$ unabhängige integrierbare Zufallsvariablen und $s \in (0,\infty)$. Wir setzen $Y_k = X_k \mathbb{1}_{|X_k|<s}$. Die Reihe $\sum_{k=1}^\infty X_k$ konvergiert (mit Wahrscheinlichkeit 1) genau dann, wenn*

$$\sum_{k=1}^\infty \mathbb{P}[|X_k| > s] < \infty\;, \quad \sum_{k=1}^\infty \mathrm{Var}[Y_k] < \infty\;, \quad \exists \sum_{k=1}^\infty \mathbb{E}[Y_k]\;.$$

Ansonsten ist die Wahrscheinlichkeit Null, dass $\sum_{k=1}^\infty X_k$ konvergiert.

Beweis. Nach Korollar 3.33 muss die Wahrscheinlichkeit, dass $\sum_{k=1}^\infty X_k$ konvergiert 0 oder 1 sein, da die Konvergenz nicht von $\mathcal{F}_n$ abhängt. Teilen wir X_k durch s, so sehen wir, dass wir $s = 1$ wählen können.

Nehmen wir an, dass die Bedingungen erfüllt sind. Aus dem Borel–Cantelli Theorem schliessen wir, dass nur endlich oft $\{X_k \neq Y_k\}$ gilt. Somit müssen wir die Konvergenz für $\{\sum_{k=1}^\infty Y_k\}$ zeigen. Betrachten wir $\{\sum_{k=1}^n (Y_k - \mathbb{E}[Y_k])\}$, so können wir $\mathbb{E}[Y_k] = 0$ annehmen. Dann ist $\{\sum_{k=1}^n Y_k\}$ ein quadratisch integrierbares Martingal. Nach Satz 3.32 konvergiert das Martingal.

Nehmen wir an, dass $\sum_{k=1}^\infty X_k$ konvergiert. Gilt $\sum_{k=1}^\infty \mathbb{P}[|X_k| > s] = \infty$, so tritt nach dem Borel–Cantelli Theorem $\{|X_k| > s\}$ unendlich oft auf und $\sum_{k=1}^\infty X_k$ könnte nicht konvergieren. Somit ist diese Bedingung erfüllt und $\{X_s \neq Y_s\}$ gilt nur endlich oft. Damit konvergiert auch $\sum_{k=1}^\infty Y_k$. Nehmen wir zuerst $\mathbb{E}[Y_k] = 0$ an. Dann ist $\{(\sum_{k=1}^n Y_k)^2 - \sum_{k=1}^n \mathrm{Var}[Y_k]\}$ ein Martingal. Sei $T_a = \inf\{n : |\sum_{k=1}^n Y_k| > a\}$. Dann ist wegen dem Stoppsatz und dem Lemma von Fatou

$$0 = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\Big[\Big(\sum_{k=1}^{T_a\wedge n} Y_k\Big)^2 - \sum_{k=1}^{T_a\wedge n} \mathrm{Var}[Y_k]\Big] \le \mathbb{E}\Big[\Big(\sum_{k=1}^{T_a} Y_k\Big)^2 - \sum_{k=1}^{T_a} \mathrm{Var}[Y_k]\Big]\;,$$

da der Integrand durch $(a+1)^2$ nach oben beschränkt ist. Da der erste Term konvergiert, muss $\mathbb{P}[T_a = \infty] > 0$ für a gross genug gelten. Also muss $\sum_{k=1}^\infty \mathrm{Var}[Y_k]$ endlich sein.

Sei nun $\mathbb{E}[Y_k]$ beliebig. Sei Y_k' eine unabhängige Kopie von Y_k. Dann konvergiert nach Voraussetzung $\{\sum_{k=1}^n (Y_k - Y_k')\}$. Somit muss auch hier nach dem soeben Bewiesenen $\sum_{k=1}^\infty 2\,\mathrm{Var}[Y_k]$ endlich sein. Damit ist $\{\sum_{k=1}^n (Y_k - \mathbb{E}[Y_k])\}$ ein quadratisch integrierbares Martingal und konvergiert daher. Da $\sum_{k=1}^n Y_k$ konvergiert, muss auch $\sum_{k=1}^n \mathbb{E}[Y_k]$ konvergieren. □

Beispiel 3.36. Seien $\{Y_k\}$ unabhängig und identisch verteilt mit $\mathbb{E}[Y_k] = 0$ und $0 < \operatorname{Var}[Y_k] = \sigma^2 < \infty$. Sei $X_n = \sum_{k=1}^n Y_k/k$. Diese Summe ist absolut divergent (Übung). Weiter ist $\{X_n\}$ ein Martingal. Wir haben

$$\mathbb{E}[X_n^2] = \operatorname{Var}\Bigl[\sum_{k=1}^n \frac{Y_k}{k}\Bigr] = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \operatorname{Var}[Y_k] = \sum_{k=1}^n \frac{\sigma^2}{k^2} < \frac{\pi^2\sigma^2}{6}\;.$$

Somit konvergiert $\{X_n\}$ fast sicher und in $\mathcal{L}^2$ gegen X_∞. Wir haben weiter $\mathbb{E}[X_\infty] = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[X_n] = 0$ und $\operatorname{Var}[X_\infty] = \mathbb{E}[X_\infty^2] = \sup_n \mathbb{E}[X_n^2] = \sigma^2\pi^2/6$. Man kann sich leicht überzeugen, dass die Bedingungen aus Satz 3.35 erfüllt sind, so dass die Konvergenz auch so folgt. ■

Beispiel 3.37. Wir betrachten unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen $\{Y_n\}$. Die Verteilung von Y_k sei absolutstetig und wir betrachten zwei Masse mit den Dichten $f_0(y)$ oder $f_1(y)$. Die beiden Dichten sollen den gleichen Träger haben. Sei

$$X_n = \frac{f_1(Y_1)f_1(Y_2)\cdots f_1(Y_n)}{f_0(Y_1)f_0(Y_2)\cdots f_0(Y_n)}$$

der zugehörige Likelihood-Quotienten-Prozess. Wir verwenden die Filtration $\mathcal{F}_n = \sigma(Y_1,\ldots,Y_n)$. Unter den beiden Massen haben wir

$$\mathbb{E}_i[X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] = X_n \mathbb{E}_i\Bigl[\frac{f_1(Y_{n+1})}{f_0(Y_{n+1})} \Bigm| \mathcal{F}_n\Bigr] = X_n \mathbb{E}_i\Bigl[\frac{f_1(Y_{n+1})}{f_0(Y_{n+1})}\Bigr]\;.$$

Dann gilt

$$\mathbb{E}_0\Bigl[\frac{f_1(Y_n)}{f_0(Y_n)}\Bigr] = \int \frac{f_1(y)}{f_0(y)} f_0(y)\,\mathrm{d}y = \int f_1(y)\,\mathrm{d}y = 1\;.$$

Somit ist $\{X_n\}$ unter $\mathbb{P}_0$ ein positives Martingal. Also konvergiert $\{X_n\}$ gegen eine integrierbare Variable. Es gibt ein $\varepsilon > 0$, so dass $\mathbb{P}_0[f_1(Y_n)/f_0(Y_n) > 1+\varepsilon] > 0$. Somit tritt $\{f_1(Y_n)/f_0(Y_n) > 1+\varepsilon\}$ unendlich oft auf. Dies bedeutet, dass der Grenzwert nur 0 sein kann.

Unter dem alternativen Mass können wir den Prozess $\{1/X_n\}$ betrachten. Wir haben soeben gezeigt, dass $\{1/X_n\}$ gegen Null konvergiert. Somit muss unter $\mathbb{P}_1$ der Prozess $\{X_n\}$ gegen Unendlich konvergieren. Diese Eigenschaft kann für statistische Zwecke verwendet werden. ■

Satz 3.38. (Kakutani) *Seien $\{X_k\}$ unabhängige positive Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}[X_k] = 1$. Sei $M_n = \prod_{k=1}^n X_k$. Dann ist $\{M_n\}$ ein positives Martingal und M_∞ existiert. Wir setzen $0 < a_n = \mathbb{E}[\sqrt{X_n}] \le \sqrt{\mathbb{E}[X_n]} = 1$. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

i) $\mathbb{E}[M_\infty] = 1$,

ii) $M_n \to M_\infty$ *in* $\mathcal{L}^1$,

iii) M *ist gleichmässig integrierbar,*

iv) $$\prod_{k=1}^{\infty} a_k > 0 \ ,$$

v) $$\sum_{k=1}^{\infty}(1 - a_k) < \infty \ .$$

Beweis. Wir bemerken zuerst, dass i)–iii) nach Satz 3.32 äquivalent sind. Wäre $a_n = 0$, so müsste $\sqrt{X_n} = 0$ und damit $X_n = 0$ sein. Da $\mathbb{E}[X_n] = 1$, kann dies nicht sein. Aus iv) oder v) folgt, dass a_n gegen 1 konvergieren muss. Wir können somit annehmen, dass $a_n \geq \frac{1}{2}$ für alle n. iv) ist äquivalent zu $-\sum_{k=1}^{\infty} \log a_k < \infty$. Es gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty}(1 - a_k) \leq -\sum_{k=1}^{\infty} \log a_k \leq 2\sum_{k=1}^{\infty}(1 - a_k) \ .$$

Daher sind iv) und v) äquivalent.

Nehmen wir iv) an. Dann ist

$$\Big\{N_n = \frac{\sqrt{M_n}}{\prod_{k=1}^{n} a_k}\Big\}$$

ein quadratisch integrierbares Martingal. Insbesondere sind nach Satz 3.32 i)–iii) erfüllt. Nehmen wir $\prod_{k=1}^{\infty} a_k = 0$ an. Dann konvergiert das positive Martingal $\{N_n\}$. Insbesondere muss $\{M_n\}$ nach 0 konvergieren und i) ist nicht erfüllt. □

3.8. Submartingale

Proposition 3.39. (Doob-Zerlegung) *Sei $\{X_n\}$ ein Submartingal. Es gibt eine eindeutige Zerlegung $X_n = M_n + A_n$, so dass $\{M_n\}$ ein Martingal ist und $\{A_n\}$ ein previsibler wachsender Prozess mit $A_0 = 0$.*

Beweis. Nehmen wir an, die Zerlegung existiere. Dann ist

$$\begin{aligned}
A_{n+1} &= \mathbb{E}[A_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[X_{n+1} - X_n - M_{n+1} + M_n + A_n \mid \mathcal{F}_n] \\
&= \mathbb{E}[X_{n+1} - X_n \mid \mathcal{F}_n] - M_n + M_n + A_n = A_n + \mathbb{E}[X_{n+1} - X_n \mid \mathcal{F}_n] \\
&= \sum_{k=0}^{n} \mathbb{E}[X_{k+1} - X_k \mid \mathcal{F}_k] \ ,
\end{aligned}$$

wobei wir die Martingaleigenschaft benutzt haben. Definieren wir A_n wie oben, so folgt leicht dass $\{X_n - A_n\}$ ein Martingal ist. □

Sei nun $\{M_n\}$ ein Martingal mit $\mathbb{E}[M_n^2] < \infty$. Dann folgt aus Jensens Ungleichung, dass $\{M_n^2\}$ ein Submartingal ist. Also ist $M_n^2 = X_n + V_n$, wobei $\{X_n\}$ ein Martingal ist und $\{V_n\}$ ein wachsender previsibler Prozess. Wir haben dann

$$\begin{aligned} V_n &= \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{E}[M_{k+1}^2 - M_k^2 \mid \mathcal{F}_k] = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{E}[M_{k+1}^2 \mid \mathcal{F}_k] + M_k^2 - 2M_k \mathbb{E}[M_{k+1} \mid \mathcal{F}_k] \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{E}[(M_{k+1} - M_k)^2 \mid \mathcal{F}_k] = \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{Var}[M_{k+1} \mid \mathcal{F}_k] \ . \end{aligned}$$

Der Prozess $\{V_n\}$ heisst **Varianz-Prozess** des Martingals.

Wir betrachten nun das Problem des optimalen Stoppens. Sei $\{G_n\}$ ein adaptierter Prozess, so dass $\mathbb{E}[|G_n|] < \infty$. Wir suchen nun eine Stoppzeit T^*, so dass $\mathbb{E}[G_{T^*}] = \sup_T \mathbb{E}[G_T]$. Zum Beispiel, G_t ist die Auszahlung einer amerikanischen Option, falls man die Option zum Zeitpunkt t ausübt. Ist $\{G_n\}$ ein positives Martingal, so folgt sofort aus dem Lemma von Fatou, dass $T^* = 0$ diese Eigenschaft hat.

Betrachten wir nun folgenden Spezialfall. $G_N \ge 0$ und $G_n = 0$ für alle $n > N$. Wir können dann annehmen, dass $G_n \ge 0$ für alle n. Wir definieren nun die Variablen $U_N = G_N$ und

$$U_n = \max\{G_n, \mathbb{E}[U_{n+1} \mid \mathcal{F}_n]\}$$

für $n < N$. Wir haben dann folgendes Resultat.

Hilfssatz 3.40. *$\{U_n\}$ ist das kleinste Supermartingal, das $\{G_n\}$ dominiert.*

Beweis. Aus der Definition folgt, dass $U_n \ge G_n$. Sei $\{M_n\}$ ein Supermartingal, das $\{G_n\}$ dominiert. Dann ist $M_N \ge G_N = U_N$. Nehmen wir an, dass $M_{n+1} \ge U_{n+1}$. Dann ist $M_n \ge G_n$ und

$$M_n \ge \mathbb{E}[M_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] \ge \mathbb{E}[U_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] \ .$$

Also ist $M_n \ge U_n$. Dass $\{U_n\}$ ein Supermartingal ist, folgt aus der Definition. □

Wir definieren nun die Stoppzeit $T^* = \inf\{n : U_n = G_n\}$. Da $U_N = G_N$, ist $T^* \le N$. Auf $\{T^* \le n\}$ haben wir

$$\mathbb{E}[U_{T^* \wedge (n+1)} \mid \mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[U_{T^*} \mid \mathcal{F}_n] = U_{T^*} = U_{T^* \wedge n} \ .$$

Auf $\{T^* > n\}$ haben wir

$$\mathbb{E}[U_{T^* \wedge (n+1)} \mid \mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[U_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] = U_n \ ,$$

da $U_n \ne G_n$. Also ist $\{U_{T^* \wedge n}\}$ ein Martingal. Wir haben dann

Hilfssatz 3.41. *Die Stoppzeit T^* ist optimal. Ist T eine optimale Stoppzeit, dann ist $T^* \le T$.*

Beweis. Aus dem Stoppsatz folgt für jede endliche Stoppzeit T, $U_0 \ge \mathbb{E}[U_T] \ge \mathbb{E}[G_T]$. Wegen der Martingaleigenschaft erhalten wir $U_0 = \mathbb{E}[U_{T^*}] = \mathbb{E}[G_{T^*}]$, was die Optimalität beweist.

Sei nun T optimal. Der Prozess $\{U_{T\wedge n}\}$ ist ein Supermartingal. Also haben wir $U_0 \ge \mathbb{E}[U_T] \ge \mathbb{E}[G_T] \ge U_0$. Somit muss Gleichheit gelten und $U_T = G_T$. Dies bedeutet, dass $T \ge T^*$. □

Da $\{U_n\}$ ein Supermartingal ist, gibt es ein Martingal M und einen wachsenden previsiblen Prozess A, so dass $U_n = M_n - A_n$. Wir definieren nun die Stoppzeit $T_m = \inf\{n : A_{n+1} > 0\}$. Dann gilt

Hilfssatz 3.42. *Die Stoppzeit T_m ist optimal. Ist T eine optimale Stoppzeit, dann ist $T^* \le T \le T_m$.*

Beweis. Wir haben auf $\{T_m = j\}$

$$\mathbb{E}[U_{j+1} \mid \mathcal{F}_j] = \mathbb{E}[M_{j+1} \mid \mathcal{F}_j] - A_{j+1} = M_j - A_{j+1} < M_j = U_j \ .$$

Somit ist $U_{T_m} = G_{T_m}$. Weiter ist

$$\mathbb{E}[U_{T_m\wedge(n+1)} \mid \mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[M_{T_m\wedge(n+1)} \mid \mathcal{F}_n] = M_{T_m\wedge n} = U_{T_m\wedge n} \ .$$

Also ist $\{U_{T_m\wedge n}\}$ ein Martingal. Insbesondere ist

$$\mathbb{E}[G_{T_m}] = \mathbb{E}[U_{T_m}] = U_0 \ ,$$

und T_m ist optimal. Ist T optimal, so ist

$$U_0 = \mathbb{E}[G_T] \le \mathbb{E}[U_T] = \mathbb{E}[M_T] - \mathbb{E}[A_T] = U_0 - \mathbb{E}[A_T] \le U_0 \ .$$

Also gilt das Gleichheitszeichen und damit $\mathbb{E}[A_T] = 0$. Somit ist $A_T = 0$. □

Für Super- und Submartingale gelten folgende Abschätzungen.

Hilfssatz 3.43.

i) *Sei X ein positives Supermartingal. Dann gilt*

$$\mathbb{P}[\sup_n X_n \ge c] \le \frac{\mathbb{E}[X_0]}{c} \ .$$

ii) *Sei X ein positives Submartingal und $N \in \mathbb{N}$. Dann gilt*

$$\mathbb{P}[\sup_{0\le n\le N} X_n \ge c] \le \frac{\mathbb{E}[X_N; \sup_{0\le n\le N} X_n \ge c]}{c} \le \frac{\mathbb{E}[X_N]}{c} \; .$$

Beweis. Sei $T_c = \inf\{n : X_n \ge c\}$. i) Aus dem Konvergenzsatz wissen wir, dass $\{X_n\}$ nach X_∞ konvergiert. Aus dem Lemma von Fatou schliessen wir, dass

$$\mathbb{E}[X_0] \ge \mathbb{E}[X_{T_c}] \ge c\mathbb{P}[X_{T_c} \ge c] = c\mathbb{P}[\sup_n X_n \ge c] \; .$$

ii) Wir erhalten

$$\begin{aligned} c\mathbb{P}[\sup_{0\le n\le N} X_n \ge c] \le \mathbb{E}[X_{T_c}; T_c \le N] &= \sum_{k=0}^N \mathbb{E}[X_k; T_c = k] \\ &\le \sum_{k=0}^N \mathbb{E}[\mathbb{E}[X_N \mid \mathcal{F}_k]; T_c = k] = \sum_{k=0}^N \mathbb{E}[\mathbb{E}[X_N; T_c = k \mid \mathcal{F}_k]] \\ &= \mathbb{E}[X_N; T_c \le N] \; . \end{aligned}$$

□

Beispiel 3.44. (Aloha-Problem) Über einen Funkkanal wird versucht, eine Nachricht zu übermitteln. In einer Periode kommt eine Übertragung zustande, falls genau ein Funker versucht, eine Nachricht zu übermitteln. Kommt die Übertragung nicht zustande, versucht der Funker später nochmals, die Nachricht zu übermitteln. Wir bilden nun folgendes Modell. Sei W_n die Menge der Nachrichten, die am Ende der n-ten Periode noch nicht übermittelt werden konnten. R_{n+1} ist die Anzahl der Nachrichten, die in Periode $n+1$ repetiert werden. Diese Anzahl ist binomial verteilt mit Parameter W_n und r, das heisst, jede Nachricht wird unabhängig von den anderen mit Wahrscheinlichkeit r wiederholt. Gleichzeitig werden N_{n+1} neue Nachrichten gesendet. Das heisst,

$$W_{n+1} = W_n + N_{n+1} - \mathbb{1}_{N_{n+1}+R_{n+1}=1} \; .$$

Wir setzen nun $\mathcal{F}_n = \sigma(W_0, W_1, \ldots, W_n)$. Wir nehmen an, dass die Anzahl neuer Nachrichten N_{n+1} unabhängig von $\mathcal{F}_n$ und R_{n+1} ist und die Verteilung $\mu_0, \mu_1, \ldots$ hat. Wir nehmen weiter $\mathbb{E}[N_{n+1}] < \infty$ und $\mathbb{P}[N_{n+1} \ge 2] > 0$ an.

Sei $\alpha \in (0,1)$ und $c \ge 0$. Wir setzen $f(x) = \alpha^{(x-c)_+}$. Wir bemerken, dass $\mathbb{E}[\alpha^{W_{n+1}-W_n} \mid \mathcal{F}_n]$ eine fallende Funktion in W_n ist, da die Wahrscheinlichkeit einer

Mehrfachübertragung mit W_n steigt. Nehmen wir an, dass $\mathbb{E}[\alpha^{W_{n+1}-W_n} \mid \mathcal{F}_n] \le 1$ auf $\{W_n \ge c+1\}$. Dann ist auf $\{W_n \le c\}$

$$\mathbb{E}[f(W_{n+1}) \mid \mathcal{F}_n] \le 1 = f(W_n) ,$$

und auf $\{W_n \ge c+1\} \subset \{W_{n+1} \ge c\}$

$$\mathbb{E}[f(W_{n+1}) \mid \mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[\alpha^{W_{n+1}-W_n} \mid \mathcal{F}_n]\alpha^{W_n-c} \le \alpha^{W_n-c} = f(W_n) .$$

Somit ist $\{f(W_n)\}$ ein nach unten beschränktes Supermartingal. Also konvergiert $f(W_n)$ gegen einen Grenzwert $f(W_\infty)$.

Dies bedeutet, dass $\{W_n\}$ gegen einen Wert $W_\infty \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ konvergiert oder schliesslich c nicht mehr überschreitet. Für $l > \frac{1}{2}c$ gilt

$$\sum_{k=1}^\infty \mathbb{P}[N_{k\ell} \ge 2, N_{k\ell+1} \ge 2, \dots, N_{(k+1)\ell-1} \ge 2] = \sum_{k=1}^\infty (1-\mu_0-\mu_1)^\ell = \infty .$$

Daraus folgt, dass $\{W_n \ge W_{n-1}+2, n = k\ell, \dots, (k+1)\ell-1\}$ und $\{W_n > c\}$ unendlich oft gilt. Insbesondere kann W_∞ nur Unendlich sein. Das heisst, die Anzahl der nicht übermittelten Meldungen geht gegen Unendlich.

Wir müssen nun noch zeigen, dass α und c existieren. Sei $\phi(\alpha) = \sum_{k=0}^\infty \mu_k \alpha^k$ die Erzeugendenfunktion von N_{n+1}. Wir haben

$$\mathbb{E}[\alpha^{W_{n+1}-W_n} \mid W_n, R_{n+1}] = \begin{cases} \phi(\alpha) , & \text{falls } R_{n+1} \ge 2, \\ \mu_0\alpha^{-1} + (\phi(\alpha) - \mu_0) , & \text{falls } R_{n+1} = 1, \\ \mu_0 + \mu_1 + (\phi(\alpha) - \mu_0 - \mu_1\alpha) , & \text{falls } R_{n+1} = 0. \end{cases}$$

Also erhalten wir

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\alpha^{W_{n+1}-W_n} \mid \mathcal{F}_n] &= \phi(\alpha)\Bigl(1 - (1-r)^{W_n} - W_n r(1-r)^{W_n-1}\Bigr) \\ &\qquad + \Bigl(\mu_0\alpha^{-1} + (\phi(\alpha) - \mu_0)\Bigr) W_n r (1-r)^{W_n-1} \\ &\qquad + \Bigl(\mu_0 + \mu_1 + (\phi(\alpha) - \mu_0 - \mu_1\alpha)\Bigr)(1-r)^{W_n} \\ &= \phi(\alpha) + \mu_0 \frac{1-\alpha}{\alpha} W_n r (1-r)^{W_n-1} + \mu_1(1-\alpha)(1-r)^{W_n} \\ &= \phi(\alpha) + \frac{1-\alpha}{\alpha}(1-r)^{W_n-1}(\mu_0 W_n r + \mu_1\alpha(1-r)) . \end{aligned}$$

Setzen wir $b_n = (1-r)^{n-1}(\mu_0 n r + \mu_1\alpha(1-r))$, haben wir $b_n \to 0$ falls $n \to \infty$. Somit können wir c wählen, so dass

$$b = \sup_{n \ge c} b_n < \phi'(1) = \sum_{k \ge 1} k\mu_k = \mathbb{E}[N_{n+1}]$$

und $b \le 1 - \phi(\frac{1}{2})$. Wir müssen also ein $\alpha \in (0,1)$ suchen, so dass $\psi(\alpha) = \phi(\alpha) + \alpha^{-1}(1-\alpha)b \le 1$. Wir haben $\psi(1) = 1$, $\psi(\frac{1}{2}) \le 1$ und $\psi'(1) = \phi'(1) - b > 0$. Somit existiert ein solches α. ■

3.9. Gesetz der grossen Zahl und Satz vom iterierten Logarithmus

Seien $\{Y_n\}$ Zufallsvariablen, so dass $\mathbb{E}[Y_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] = 0$. Dann ist $M_n = \sum_{i=1}^n Y_i$ ein Martingal. Wir nehmen an, dass $\mathbb{E}[Y_n^2] < \infty$ für alle n. Es gilt, $\mathbb{E}[M_n^2] = \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[Y_k^2]$. Wir haben folgendes

Korollar 3.45. *Ist $\sum_{k=1}^\infty \mathbb{E}[Y_k^2] < \infty$, so konvergiert M_n fast sicher und in $\mathcal{L}^2$ zu einer Variable M_∞.*

Beweis. Übung. □

Wir definieren nun den **Varianz-Prozess** $V_n = \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[Y_k^2 \mid \mathcal{F}_{k-1}]$. Setzen wir $V_\infty = \lim_{n\to\infty} V_n$, so folgt $\mathbb{E}[V_\infty] = \sum_{k=1}^\infty \mathbb{E}[Y_k^2]$.

Proposition 3.46. *Auf $\{V_\infty < \infty\}$ konvergiert das Martingal M fast sicher gegen einen endlichen Grenzwert.*

Beweis. Sei $c > 0$ und $T_c = \inf\{n : V_{n+1} > c\}$. T_c ist eine Stoppzeit. Da $V_{T_c} \le c$, ist $\{M_{T_c \wedge n}\}$ ein quadratisch integrierbares Martingal. Somit konvergiert $M_{T_c\wedge n}$ gegen M_{T_c}, wobei wir mit M_∞ den Grenzwert von M_n bezeichnen, falls $T_c = \infty$. Also existiert M_∞, falls $\{T_c = \infty\} = \{V_\infty \le c\}$. □

Hilfssatz 3.47. (Kroneckers Lemma) *Sei $\{c_n\}$ eine wachsende echt positive reelle Folge mit $\lim_{n\to\infty} c_n = \infty$ und $\{y_n\}$ reelle Zahlen. Konvergiert $s_n = \sum_{k=1}^n y_k/c_k$, so konvergiert $\{c_n^{-1} \sum_{k=1}^n y_k\}$ nach Null.*

Beweis. Wir haben mit $c_0 = 0$,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n y_k &= \sum_{k=1}^n c_k(s_k - s_{k-1}) = c_n s_n + \sum_{k=0}^{n-1}(c_k - c_{k+1})s_k = c_n s_n + \sum_{k=1}^n (c_{k-1} - c_k)s_{k-1} \\ &= \sum_{k=1}^n (c_k - c_{k-1})(s_n - s_{k-1}) \; .\end{aligned}$$

Ist nun $n > N$, so erhalten wir

$$\begin{aligned}\frac{1}{c_n}\Big|\sum_{k=1}^n y_k\Big| &\le \frac{1}{c_n}\Big|\sum_{k=1}^N (c_k - c_{k-1})(s_n - s_{k-1})\Big| + \sum_{k=N+1}^n \frac{c_k - c_{k-1}}{c_n}|(s_n - s_{k-1})| \\ &\le \frac{1}{c_n}\Big|\sum_{k=1}^N (c_k - c_{k-1})(s_n - s_{k-1})\Big| + \frac{c_n - c_N}{c_n}\sup_{k>N}|(s_n - s_{k-1})| \\ &\le \frac{1}{c_n}\Big|\sum_{k=1}^N (c_k - c_{k-1})(s_n - s_{k-1})\Big| + \sup_{k>N}|(s_n - s_{k-1})|\ .\end{aligned}$$

Der erste Ausdruck konvergiert nach Null, der zweite kann beliebig klein gemacht werden. □

Hilfssatz 3.48. *Sei $\{C_n\}$ ein wachsender previsibler Prozess mit $C_0 = 0 < C_1$. Gilt*

$$\sum_{k=1}^\infty \operatorname{Var}\Big[\frac{Y_k}{C_k}\Big] < \infty\ ,$$

so konvergiert M_n/C_n auf $\{C_\infty = \infty\}$ gegen Null.

Beweis. Das Martingal $\widetilde{M}_n = \sum_{k=1}^n Y_k/C_k$ konvergiert fast sicher gegen einen endlichen Grenzwert. Somit ist $\sum_{k=1}^\infty Y_k/C_k$ fast sicher endlich. Somit folgt die Aussage aus Kroneckers Lemma. □

Korollar 3.49. *Für jedes $p > \frac{1}{2}$ gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{M_n}{V_n^p} = 0$$

auf $\{V_\infty = \infty\}$.

Beweis. Sei $f(x) = x^p$. Dann ist $\int_0^\infty (1 + f(x))^{-2}\,\mathrm{d}x < \infty$. Setzen wir $C_n = 1 + f(V_n)$. Es gilt

$$\mathbb{E}\Big[\Big(\frac{Y_n}{C_n}\Big)^2 \;\Big|\; \mathcal{F}_{n-1}\Big] = \frac{V_n - V_{n-1}}{(1 + f(V_n))^2} \le \int_{V_{n-1}}^{V_n} \frac{1}{(1 + f(x))^2}\,\mathrm{d}x\ .$$

Wir erhalten also

$$\sum_{k=n}^\infty \mathbb{E}\Big[\Big(\frac{Y_n}{C_n}\Big)^2 \;\Big|\; \mathcal{F}_{n-1}\Big] \le \int_{V_{n-1}}^\infty \frac{1}{(1 + f(x))^2}\,\mathrm{d}x\ .$$

Somit folgt, dass $M_n/(1 + f(V_n))$ auf $\{V_\infty = \infty\}$ gegen Null konvergiert, was äquivalent zur Aussage ist. □

Korollar 3.50. *Sei* $\sup_n \mathbb{E}[Y_n^2] < \infty$ *und* $p > \frac{1}{2}$. *Dann konvergiert* $n^{-p} M_n$ *gegen Null.*

Beweis. Dies folgt sofort aus Hilfssatz 3.48 mit $C_n = n^p$. □

Satz 3.51. (Gesetz vom iterierten Logarithmus) *Sind die* $\{Y_k\}$ *iid (d.h. unabhängig mit identischer Verteilung) oder beschränkt, so gilt auf* $\{V_\infty = \infty\}$

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{M_n}{\sqrt{2V_n \log\log V_n}} = -\varliminf_{n\to\infty} \frac{M_n}{\sqrt{2V_n \log\log V_n}} = 1\ .$$

Beweis. Wir werden nur

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{M_n}{\sqrt{2V_n \log\log V_n}} \le 1$$

für beschränkte Y_i zeigen. Sei $|Y_k| \le c$ und $\varphi(\lambda) = c^{-2}[\mathrm{e}^{\lambda c} - 1 - \lambda c]$. Da für $\lambda > 0$ $\varphi(\lambda)$ wachsend in c ist, gilt

$$\mathrm{e}^{\lambda y} \le 1 + \lambda y + \varphi(\lambda) y^2$$

für $|y| \le c$. Somit erhalten wir

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\mathrm{e}^{\lambda Y_{n+1}} \mid \mathcal{F}_n] &\le 1 + \lambda \mathbb{E}[Y_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] + \varphi(\lambda)\mathbb{E}[Y_{n+1}^2 \mid \mathcal{F}_n] = 1 + \varphi(\lambda)(V_{n+1} - V_n) \\ &\le \mathrm{e}^{\varphi(\lambda)(V_{n+1}-V_n)}\ .\end{aligned}$$

Also ist $Z_n^\lambda = \exp\{\lambda M_n - \varphi(\lambda) V_n\}$ ein Supermartingal.

Sei $h(x) = \sqrt{2x \log\log x}$, $\vartheta > 1$, $\delta > 0$, $a_k = \frac{1}{2}(1+\delta)h(\vartheta^k)$, $\lambda_k = \vartheta^{-k} h(\vartheta^k)$ und $b_k = \lambda_k^{-1}\varphi(\lambda_k)$. Dann ist $\lambda_k a_k = (1+\delta)\log\log\vartheta^k$. Also $\mathrm{e}^{-\lambda_k a_k} = (k \log\vartheta)^{-(1+\delta)}$. Also haben wir $\sum_k \mathrm{e}^{-\lambda_k a_k} < \infty$.

Wir definieren nun $T_k = \inf\{n : V_{n+1} > \vartheta^k\}$. Für $n \in (T_k, T_{k+1}]$ gilt also $\vartheta^k < V_n \le \vartheta^{k+1}$. Damit ist

$$a_k + b_k V_n \le a_k + b_k \vartheta^{k+1} = \Bigl[\tfrac{1}{2}(1+\delta) + \frac{\varphi(\lambda_k)}{\lambda_k^2}\vartheta\Bigr] h(\vartheta^k) \le \Bigl[\tfrac{1}{2}(1+\delta) + \frac{\varphi(\lambda_k)}{\lambda_k^2}\vartheta\Bigr] h(V_n)\ .$$

Für k gross genug haben wir dann $a_k + b_k V_n \le (1+\varepsilon)h(V_n)$, da $\lambda_k \to 0$ und $\varphi(\lambda_k)/\lambda_k^2 \to \frac{1}{2}$ für jedes $\varepsilon = (2\delta + \vartheta - 1)/2$. Berechnen wir nun

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}[M_n > a_k + b_k V_n \text{ für ein } n \in (T_k, T_{k+1}]] \\ &\qquad \le \mathbb{P}[\lambda_k M_n > \lambda_k a_k + \varphi(\lambda_k) V_n \text{ irgendwann}] = \mathbb{P}[Z_n^{\lambda_k} > \mathrm{e}^{\lambda_k a_k} \text{ irgendwann}] \\ &\qquad \le \mathbb{E}[Z_0^{\lambda_k}]\mathrm{e}^{-\lambda_k a_k} = \mathrm{e}^{-\lambda_k a_k}\ .\end{aligned}$$

Wegen der Summierbarkeit folgt aus dem Borel–Cantelli-Lemma, dass $M_n > a_k + b_k V_n$ nur endlich oft gilt. Für n gross genug ist dann also $M_n \le a_k + b_k V_n \le (1+\varepsilon)h(V_n)$. Da δ und ϑ beliebig waren, beweist dies, dass

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{M_n}{h(V_n)} \le 1 \;.$$

$\square$

Bemerkung. Wir werden im Kapitel 7 das Gesetz vom iterierten Logarithmus für die Brownsche Bewegung beweisen. Mit ähnlichen Ideen kann auch obigen Satz beweisen. ■

3.10. Martingalkonvergenz rückwärts

Sei $\{\mathcal{F}_{-n} : n \in \mathbb{N}\}$ eine aufsteigende Folge von σ-Algebren, also

$$\cdots \subset \mathcal{F}_{-2} \subset \mathcal{F}_{-1} \subset \mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F} \;.$$

Jedes Martingal $\{M_n : n \le 0\}$ ist dann von der Form $M_n = \mathbb{E}[M_0 \mid \mathcal{F}_n]$. Wir haben dann folgenden Konvergenzsatz.

Satz 3.52. *Der Grenzwert $M_{-\infty} = \lim_{n\to-\infty} M_n$ existiert fast sicher und in $\mathcal{L}^1$. Es gilt*

$$M_{-\infty} = \mathbb{E}[M_0 \mid F_{-\infty}] \;, \qquad\qquad F_{-\infty} = \cap_{n\le 0}\mathcal{F}_n \;.$$

Beweis. Sei $N < 0$ und $U_{a,b}^{[N,0]}$ die Anzahl der Überquerungen von $[a,b]$ der Trajektorie $\{M_n : N \le n \le 0\}$. Dann gilt nach Hilfssatz 3.25

$$\mathbb{E}[U_{a,b}^{[N,0]}] \le \frac{\mathbb{E}[(M_0 - a)^+]}{b-a} \;.$$

Mit monotoner Konvergenz folgt $\mathbb{E}[U_{a,b}^{(-\infty,0]}] < \infty$, so dass das Intervall nur endlich oft überquert wird. Somit existiert der Grenzwert in $[-\infty,\infty]$. Aus dem Lemma von Fatou folgern wir

$$\mathbb{E}[\varliminf_{n\to-\infty} |M_n|] \le \varliminf_{n\to-\infty} \mathbb{E}[|M_n|] = \varliminf_{n\to-\infty} \mathbb{E}[|\mathbb{E}[M_0| \mid \mathcal{F}_n] \le \mathbb{E}[|M_0|] \;,$$

dass der Grenzwert von M_n endlich sein muss. Aus der Darstellung $M_n = \mathbb{E}[M_0 \mid \mathcal{F}_n]$ folgt, dass $\{M_n\}$ gleichmässig integrierbar ist. Somit ist die Konvergenz in $\mathcal{L}^1$. $\square$

Beispiel 3.53. Wir beweisen das starke Gesetz der grossen Zahl. Seien $\{X_k : k \in \mathbb{N}\}$ iid Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}[X_k] = 0$. Wir setzen $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ und $F_{-n} = \sigma(S_n, S_{n+1}, S_{n+2}, \ldots)$. Es gilt dann $M_{-n} = \mathbb{E}[X_1 \mid \mathcal{F}_{-n}] = S_n/n$ (Übung). Somit konvergiert S_n/n. Da

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(S_n - S_k)}{n} ,$$

ist $\lim_{n\to\infty} S_n/n\ \mathcal{F}_{-k}$ messbar. Nach Korollar 3.33 muss $\lim_{n\to\infty} S_n/n$ eine Konstante sein. Da $\mathbb{E}[S_n/n] = 0$, muss diese Konstante 0 sein. ■

3.11. Änderung des Masses

Sei $\{L_n\}$ ein positives Martingal mit Erwartungswert 1. Wir definieren nun die Mengenfunktion $\mathbb{P}^*_n : \mathcal{F}_n \to [0, 1]$, $A \mapsto \mathbb{E}[L_n; A]$. Wir haben dann folgende Eigenschaften.

Hilfssatz 3.54.

i) $\mathbb{P}^*_n$ *ist ein zu* $\mathbb{P}|_{\mathcal{F}_n}$ *absolutstetiges Mass auf* $\mathcal{F}_n$.

ii) *Ist* $n < m$, *so ist für* $A \in \mathcal{F}_n$, $\mathbb{P}^*_m[A] = \mathbb{P}^*_n[A]$.

Somit ist $\mathbb{P}^*_n$ *unabhängig von* n. *Nehmen wir an, das Mass* $\mathbb{P}^*$ *lässt sich auf ein Mass auf* $\mathcal{F}$ *fortsetzen.*

iii) *Ist* T *eine Stoppzeit und* $A \in \mathcal{F}_T$, *so dass* $A \subset \{T < \infty\}$. *Dann ist* $\mathbb{P}^*[A] = \mathbb{E}[L_T; A]$.

Beweis. i) Da L_n eine integrierbare Majorante ist, kann Erwartungswert und Summe vertauscht werden. Also ist die Funktion σ-additiv und damit ein Mass. Da $\mathbb{P}^*_n[\Omega] = \mathbb{E}[L_n; \Omega] = \mathbb{E}[L_n] = 1$ ist das Mass normiert. Aus der Positivität folgt, dass $\mathbb{P}^*$ zu $\mathbb{P}$ absolutstetig ist.
ii) Wegen der Martingaleigenschaft folgt für $A \in \mathcal{F}_n$

$$\mathbb{P}^*_m[A] = \mathbb{E}[L_m; A] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[L_m \mid \mathcal{F}_n]; A] = \mathbb{E}[L_n; A] = \mathbb{P}^*_n[A] .$$

iii) Wir haben

$$\begin{aligned}\mathbb{P}^*[A \cap \{T \le n\}] &= \mathbb{E}[L_n; A \cap \{T \le n\}] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[L_n \mid \mathcal{F}_T]; A \cap \{T \le n\}] \\ &= \mathbb{E}[L_{T\wedge n}; A \cap \{T \le n\}] = \mathbb{E}[L_T; A \cap \{T \le n\}] .\end{aligned}$$

Monotone Konvergenz ergibt das Resultat. □

Ist $L_n > 0$, so sieht man leicht, dass $\mathbb{E}^*[L_n^{-1}] = 1$. Man kann weiter leicht zeigen, dass $\{L_n^{-1}\}$ ein Martingal unter $\mathbb{P}^*$ ist. Aus $\mathbb{P}[A] = \mathbb{E}^*[L_n^{-1}; A]$ erhalten wir die analogen Aussagen für die vertauschten Rollen von $\mathbb{P}^*$ und $\mathbb{P}$.

Da $\{L_n\}$ positiv ist, existiert der Grenzwert L_∞ von $\{L_n\}$. Normalerweise wird $\mathbb{P}[L_\infty = 0] = 1$ gelten. Dies bedeutet, dass die Masse $\mathbb{P}$ und $\mathbb{P}^*$ singulär auf $\mathcal{F}$ sind, obwohl sie auf $\mathcal{F}_n$ äquivalent sind.

Beispiel 3.55. Seien $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ iid Variablen mit Verteilungsfunktion $F(x)$ und $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$. Wir nehmen an, dass $\mathbb{E}[X_k] < 0$ und, damit der Prozess nicht monoton fallend wird, $\mathbb{P}[X_k > 0] > 0$. Aus dem Gesetz der grossen Zahl folgt, dass $\{S_n\}$ nach $-\infty$ konvergiert. Sei $T_x = \inf\{n : S_n > x\}$. Wir interessieren uns für die Ruinwahrscheinlichkeit $\psi(x) = \mathbb{P}[T_x < \infty]$. Nehmen wir an, es gibt ein $R > 0$, so dass $\mathbb{E}[\mathrm{e}^{RX_k}] = 1$. Dann ist der Prozess $\{L_n = \exp\{RS_n\}\}$ ein Martingal. Unter dem Mass $\mathbb{P}^*$ erhalten wir

$$\begin{aligned}\mathbb{P}^*[X_k \in B_k : 1 \le k \le n] &= \mathbb{E}\Big[\exp\Big\{R\sum_{k=1}^n X_k\Big\}\prod_{k=1}^n 1\!\!1_{B_k}(X_k)\Big] \\ &= \prod_{k=1}^n \mathbb{E}[\mathrm{e}^{RX_k}; X_k \in B_k]\;.\end{aligned}$$

Somit sind die $\{X_k\}$ auch unter $\mathbb{P}^*$ unabhängig und identisch verteilt mit Verteilungsfunktion $F^*(x) = \int_{-\infty}^x \mathrm{e}^{Ry}\,\mathrm{d}F(y)$. Somit lässt sich das Mass $\mathbb{P}^*$ auf ein Mass auf $\mathcal{F}$ fortsetzen. Es lässt sich zeigen (siehe Beispiel 5.6), dass $\mathbb{E}^*[X_k] > 0$. Somit ist $\mathbb{P}^*[T_x < \infty] = 1$, was auch aus dem Gesetz der grossen Zahl folgt. Wir haben nun

$$\psi(x) = \mathbb{P}[T_x < \infty] = \mathbb{E}^*[L_{T_x}^{-1}; T_x < \infty] = \mathbb{E}^*[\mathrm{e}^{-RS_{T_x}}; T_x < \infty] = \mathbb{E}^*[\mathrm{e}^{-RS_{T_x}}]\;.$$

Da $S_{T_x} > x$, erhalten wir die Lundberg-Ungleichung $\psi(x) < \mathrm{e}^{-Rx}$. Ist $\mathbb{E}^*[X_k] < \infty$, so lässt sich mit Hilfe des Erneuerungsansatzes (Satz 4.16) zeigen, dass

$$\psi(x)\mathrm{e}^{-Rx} = \mathbb{E}^*[\mathrm{e}^{-R(S_{T_x}-x)}] \to C > 0$$

für eine Konstante C.

Da $S_n \to -\infty$ nach dem starken Gesetz der grossen Zahl, haben wir in der Tat, dass $L_n \to 0$. Somit sind die Masse singulär auf $\mathcal{F}$.

Diese Massänderung ist besonders nützlich für die Simulation von Ruinwahrscheinlichkeiten. Da $T_x < \infty$ unter $\mathbb{P}^*$, kann man die Variablen $Y_k = \mathrm{e}^{-RS_{T_x}^{(k)}}$ simulieren. Die Grösse $n^{-1}\sum_{k=1}^n Y_k$ ist dann ein Schätzer für $\psi(x)$. Man kann zeigen, dass für grosse x diese Simulationsmethode asymptotisch optimal ist. ■

3.12. Das Binomialmodell der Finanzmathematik

Seien $\{Y_i\}$ iid Variablen mit $\mathbb{P}[Y_i = 1] = \mathbb{P}[Y_i = 0] = p \in (0,1)$ und $X_n = \sum_{k=1}^n Y_k$ die dazugehörige Anzahl Erfolge. Wir modellieren zwei Aktive in einem Finanzmarkt: die sichere Anlage $S_n^0 = r^n$ für ein $r > 0$ und der riskante Aktiv $S_n = S_0 u^{X_n} d^{n-X_n}$ für $0 < d < u$. Wir werden unten sehen, dass es vernünftig ist, $d < r < u$ anznuehmen. Der risikolose Aktiv hat die konstante Zinsrate $r - 1$. Bei einem Erfolg $Y_n = 1$ steigt der riskante Aktiv auf $S_{n-1}u$, bei einem Misserfolg "sinkt" er auf $S_{n-1}d$.

Wir verwenden die Filtration $\mathcal{F}_n = \sigma(Y_1, \ldots, Y_n)$, das heisst, die kleinste Filtration so dass $\{S_n\}$ beobachtbar wird. Eine Handelsstrategie ist ein vorhersehbarer Prozess $\phi = \{(\phi_n\}$. ϕ_n bezeichnet die Anzahl Einheiten des riksanten Aktivs, die im Intervall $(n-1, n]$ im Portfolio gehalten werden. ϕ muss vorhersehbar sein, da man zur Zeit $n-1$ über die Anzahl entscheiden muss. Wir erlauben $\phi_n < 0$ (man wettet auf fallende Kurse) und $\phi_n S_{n-1} > V_{n-1}(\phi)$ (man leiht sich Geld). $\{V_n(\phi)\}$ bezeichnet hier die Bilanz einer Strategie zur Zeit n.

Sei $V_0 = V_0(\phi)$ der Betrag, den ein Händler zur Verfügung hat. Zur Zeit 0 hält man somit den Betrag $V_0 - \phi_0 S_0$ im risikolosen Aktiv. Die Bilanz des Händlers wird dann

$$V_{n+1}(\phi) = \phi_{n+1}S_{n+1} + (V_n(\phi) - \phi_{n+1}S_n)r = rV_n(\phi) + \phi_{n+1}(S_{n+1} - rS_n)\ .$$

Definition 3.56. *Eine Strategie ϕ heisst* **Arbitrage**, *falls $V_0 = 0$ und $V_n \ge 0$ mit $\mathbb{P}[V_n > 0] > 0$ für ein $n \in \mathbb{N}$.*

Proposition 3.57. *Es gibt genau dann keine Arbitrage, falls $d < r < u$.*

Beweis. Ist $d \ge r$, so ist die Strategie $\phi_n = 1$ eine Arbitrage, da man mit dem riskanten Aktiv mindestens den selben Gewinn macht wie mit dem risikolosen Aktiv. Ist $r \ge u$, so ist $\phi_n = -1$ eine Arbitrage, da man mit dem risikolosen Aktiv mindestens den Verlust des riskanten Aktivs kompensieren kann. Sei nun $d < r < u$. Betrachten wir die diskontierten Werte $\tilde{S}_n^0 = 1$, $\tilde{S}_n = S_n r^{-n}$ und $\tilde{V}_n(\phi) = V_n(\phi) r^{-n}$. Dann ist $\tilde{V}_0(\phi) = V_0(\phi)$,

$$\tilde{S}_n = S_n r^{-n} = S_0 \Bigl(\frac{u}{r}\Bigr)^{X_n} \Bigl(\frac{d}{r}\Bigr)^{n-X_n}$$

und

$$\tilde{V}_{n+1}(\phi) = V_{n+1}(\phi) r^{-n-1} = \tilde{V}_n(\phi) + \phi_{n+1}(\tilde{S}_{n+1} - \tilde{S}_n)\ .$$

Dies bedeutet, dass das diskontierte Modell den selben Regeln folgt und wir $r = 1$ annehmen dürfen.

Sei $\alpha > 0$ und $L_n = \alpha^{X_n}\beta^n$ mit $\beta = (\alpha p + 1 - p)^{-1}$. Dann gilt

$$\mathbb{E}[L_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] = L_n \mathbb{E}[\alpha^{Y_n}]\beta = L_n\beta(p\alpha + 1 - p) = L_n \ .$$

Also ist $\{L_n\}$ ein echt positives Martingal. Wir definieren das Mass $\mathbb{P}^*[A] = \mathbb{E}[L_n; A]$ auf $\mathcal{F}_n$. Aus Beispiel 3.55 wissen wir, dass unter $\mathbb{P}^*$ die Variablen $\{Y_i\}$ iid sind mit $\mathbb{P}^*[Y_i = 1] = \mathbb{P}^*[Y_i = 0] = p^*$. Wir erhalten dann, siehe auch Hilfsatz 6.9,

$$\mathbb{E}^*[S_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] = S_n d\mathbb{E}^*[(u/d)^{Y_{n+1}}] = S_n d\beta\mathbb{E}[(\alpha u/d)^{Y_{n+1}}] = S_n \frac{p\alpha u + (1-p)d}{\alpha p + 1 - p} \ .$$

Wählen wir $p\alpha u + (1-p)d = \alpha p + 1 - p$, also $\alpha = (1-p)(1-d)/(p(u-1))$, so wird $\{S_n\}$ ein Martingal unter $\mathbb{P}^*$. Weiter erhalten wir

$$\mathbb{E}^*[V_{n+1}(\phi) \mid \mathcal{F}_n] = V_n(\phi) + \phi_{n+1}\mathbb{E}[S_{n+1} - S_n \mid \mathcal{F}_n] = V_n(\phi) \ .$$

Somit ist auch $\{V_n\}$ ein Martingal unter $\mathbb{P}^*$.

Sei nun $V_0 = 0$ und $\mathbb{P}[V_n \ge 0] = 1$. Dann ist auch $\mathbb{P}^*[V_n \ge 0] = 1$, da die Masse auf $\mathcal{F}_n$ äquivalent sind. Da auch $\mathbb{E}^*[V_n] = V_0 = 0$, muss $\mathbb{P}^*[V_n = 0] = 1$ sein. Da die Masse äquivalent sind, haben wir $\mathbb{P}[V_n = 0] = 1$. Somit existiert keine Arbitrage. □

Bemerkung. Es gilt allgemein in Finanzmodellen, dass es keine Arbitrage gibt, falls es ein äquivalentes Mass existiert, so dass die diskontierten Preise Martingale sind. Unter zusätzlichen (schwachen) Bedingungen, gilt auch die Umkehrung. ■

Wir betrachten nun einen beschränkten Zeithorizont N. Weiter nehmen wir $\mathcal{F} = \mathcal{F}_N$ an, das heisst, alle Information wird durch den Prozess $\{S_n\}$ erzeugt.

Proposition 3.58. *Sei Z eine $\mathcal{F}$-messbare Variable. Dann existiert ein vorhersehbarer Prozess ϕ und eine Konstante V_0, so dass $V_N(\phi) = Z$.*

Beweis. Durch Diskontieren können wir annehmen, dass $r = 1$. Es gibt eine Funktion $f : \{0,1\}^N \to \mathbb{R}$, so dass $Z = f(Y_1, \dots, Y_N)$. Wir arbeiten mit dem Mass $\mathbb{P}^*$ aus dem Beweis der Proposition 3.57. Wir verwenden Induktion nach N. Ist $N = 0$, so ist Z deterministisch und wir wählen $V_0 = Z$. Nehmen wir an, die Aussage gilt für N. Sei Z $\mathcal{F}_{N+1}$-messbar. Dann existiert nach Induktionsvoraussetzung ein vorhersehbarer Prozess $\{\phi_n : 1 \le n \le N\}$, so dass $V_N(\phi) = \mathbb{E}[Z \mid \mathcal{F}_N]$.

Die Variable $Z - \mathbb{E}^*[Z \mid \mathcal{F}_N] = f_{N+1}(Y_1, \ldots, Y_{N+1}) - f_N(Y_1, \ldots, Y_N)$ nimmt bei festem $Y_1, \ldots, Y_N$ zwei Werte $g_n^1(Y_1, \ldots, Y_N)$ und $g_n^0(Y_1, \ldots, Y_N)$ an, je nachdem of $Y_{N+1} = 1$ oder $Y_{N+1} = 0$. Da $\mathbb{E}^*[Z - \mathbb{E}^*[Z \mid \mathcal{F}_N]] = \mathbb{E}^*[S_{N+1}] = 0$, gilt $p^* g_n^1(Y_1, \ldots, Y_N) + (1 - p^*) g_n^0(Y_1, \ldots, Y_N) = p^* S_N u + (1 - p^*) S_N d = 0$. Da $p^* \neq 0$, gilt $g_n^1(Y_1, \ldots, Y_N)/(S_N u) = g_n^0(Y_1, \ldots, Y_N)/(S_N d) =: \phi_{N+1}$. Da ϕ_{N+1} $\mathcal{F}_N$-messbar ist, haben wir also

$$Z = \mathbb{E}^*[Z \mid \mathcal{F}_N] + \phi_{N+1} S_{N+1} = V_{N+1}(\phi) \; .$$

□

Wenn wir also eine Verpflichtung Z zur Zeit N eingehen, die $\mathcal{F}_N$-messbar ist, dann gibt es eine Strategie ϕ und einen Anfangswert V_0, so dass wir die Verpflichtung Z replizieren können. Aus dem Beweis oben sehen wir, dass $V_0 = \mathbb{E}^*[Z] r^{-N}$ der faire Preis der Verpflichtung ist. Zur Zeit n hat die Verpflichtung den Wert $V_n(\phi) = \mathbb{E}^*[Z \mid \mathcal{F}_n] r^{-(N-n)}$. Das heisst, wir verwenden für die Preisbestimmung nicht das "physikalische" Mass $\mathbb{P}$ sondern das Martingalmass $\mathbb{P}^*$.