1. Masstheorie

In der Wahrscheinlichkeitstheorie betrachten wir Situationen, die wir nicht exakt vorhersagen können. Zum einen kann dies sein, da der Ausgang 'zufällig' ist. Zum anderen kann es sein, dass das System zu kompliziert ist, um Vorhersagen sicher machen zu können. So besteht ein Teilchensystem in der Physik aus sehr vielen Teilchen, so dass es unmöglich ist, das System exakt zu beschreiben. Oder, wie zum Beispiel in der Metereologie, sind die Anfangsbedingungen nicht vollständig bekannt, so dass der Weg von Tief- und Hochdruckgebieten nicht genau bestimmt werden kann. Oder bei 'chaotischen' Systemen, führt eine kleine Abweichung der Anfangsbedingungen zu komplett verschiedenen Zuständen in der Zukunft.

Eine Wahrscheinlichkeit sollte intuitiv den Anteil der Experimente angeben, in denen ein bestimmtes Ereignis eintritt, wenn man 'sehr oft' ein Experiment unabhängig von den anderen durchführt. Wir müssen also den Ereignissen Gewichte zuordnen. Daher wollen wir zuerst klären, welche Eigenschaften diese Gewichte haben sollen. Es zeigt sich aber, dass es nicht immer möglich ist, allen definierbaren Ereignissen Gewichte zuzuordnen, die diese wünschenswerten Eigenschaften haben. Aus diesem Grunde müssen wir auch definieren, welche 'Ereignisse' wir zulassen. Dies ist Thema der Masstheorie.

1.1. Mengensysteme

Wir starten mit einer Menge Ω. Die Elemente $\omega \in \Omega$ nennen wir **Elementarereignisse**. Die Menge der zugelassenen **Ereignisse** sind Teilmengen von Ω und wir bezeichnen diese Klasse mit $\mathcal{F}$. Das heisst, ist $A \in \mathcal{F}$, so ist $A \subset \Omega$. Wir verlangen folgende Eigenschaften.

Definition 1.1. *Ein Mengensystem $\mathcal{A} \subset 2^\Omega$ von Teilmengen von Ω heisst* **σ-Algebra**, *falls*

i) $\emptyset \in \mathcal{A}$,

ii) *falls $A \in \mathcal{A}$, so gilt auch $A^c \in \mathcal{A}$,*

iii) *sind $A_1, A_2, A_3, \ldots \in \mathcal{A}$, so ist auch $\cup_n A_n \in \mathcal{A}$.*

Hilfssatz 1.2. *Sei $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra. Dann gilt*

i) *Die kleinste mögliche σ-Algebra ist $\mathcal{A}_m = \{\emptyset, \Omega\}$. Die grösste mögliche σ-Algebra ist $\mathcal{A}_M = 2^\Omega = \{A : A \subset \Omega\}$. Für jede σ-Algebra $\mathcal{A}$ gilt $\mathcal{A}_m \subset \mathcal{A} \subset \mathcal{A}_M$.*

ii) *Sei I eine Indexmenge und für alle $i \in I$ sei $\mathcal{A}_i$ eine σ-Algebra. Dann ist $\mathcal{A} = \cap_{i \in I} \mathcal{A}_i$ eine σ-Algebra.*

iii) *Sei $\mathcal{B}$ eine Klasse von Teilmengen von Ω. Dann existiert $\sigma(\mathcal{B})$, die kleinste σ-Algebra, die $\mathcal{B}$ enthält.*

iv) *Sind $A_1, A_2, A_3, \ldots \in \mathcal{A}$, so ist auch $\cap_n A_n \in \mathcal{A}$.*

v) *Sind $A, B \in \mathcal{A}$, dann ist auch $A \setminus B \in \mathcal{A}$.*

Beweis. i) Dass $\mathcal{A}_m$ und $\mathcal{A}_M$ σ-Algebren sind folgt leicht. Da $\emptyset^c = \Omega$ gilt $\mathcal{A}_m \subset \mathcal{A}$. Dass $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}_M$ ist trivial.
ii) Da $\emptyset \in \mathcal{A}_i$ für alle $i \in I$, gilt $\emptyset \in \mathcal{A}$. Ist $A \in \mathcal{A}$, so ist $A \in \mathcal{A}_i$ für alle i. Somit ist auch $A^c \in \mathcal{A}_i$ für alle i, das heisst $A^c \in \mathcal{A}$. Analog beweist man die dritte Eigenschaft.
iii) Wir setzen

$$\sigma(\mathcal{B}) = \bigcap_{\substack{\mathcal{C}\ \sigma\text{-Algebra} \\ \mathcal{B} \subset \mathcal{C}}} \mathcal{C}\ .$$

Dies ist nach ii) eine σ-Algebra und nach Definition ist es die kleinste, die $\mathcal{B}$ enthält.
iv) Wir haben

$$\bigcap_n A_n = \Bigl(\bigcup_n A_n^c\Bigr)^c\ .$$

v) Dies folgt aus $A \setminus B = A \cap B^c$ und iv). □

Ist Ω eine Menge und $\mathcal{F}$ eine σ-Algebra auf Ω. Wir nennen dann $(\Omega, \mathcal{F})$ einen **messbaren Raum**.

Beispiel 1.3. Sei Ω ein topologischer Raum. Dann bezeichnen wir mit $\mathfrak{B}(\Omega)$ die kleinste σ-Algebra, die alle offenen Mengen enthält. Diese Algebra heisst **Borel-σ-Algebra**. Somit ist $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ durch die Intervalle (a, b), $-\infty \le a < b \le \infty$ erzeugt, da die offenen Intervalle alle offenen Mengen erzeugen. Aus $[a, b) = (-\infty, b) \setminus (-\infty, a)$ für $-\infty < a < b \le \infty$ enthält $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ alle Intervalle der Form $[a, b)$. Da $(a, b) = \cup_n [a + n^{-1}, b)$, sehen wir, dass $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ durch die Intervalle $(-\infty, b)$ erzeugt wird. Es lässt sich zeigen, dass $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ nicht alle Teilmengen von $\mathbb{R}$ enthält. ■

Manchmal ist es nötig, ein Mengensystem zu betrachten, das weniger strenge Voraussetzungen erfüllt.

Definition 1.4. *Ein Mengensystem $\mathcal{A}$ heisst* **Dynkin-System**, *falls*

i) $\Omega \in \mathcal{A}$,

ii) *falls* $A, B \in \mathcal{A}$ *und* $B \subset A$, *dann ist* $A \setminus B \in \mathcal{A}$,

iii) *ist* $A_i \in \mathcal{A}$ *mit* $A_i \cap A_j = \emptyset$ *für* $i \neq j$, *dann ist* $\cup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$.

Aus Hilfssatz 1.2 folgt, dass jede σ-Algebra ein Dynkin-System ist.

So wie wir die Existenz von $\sigma(\mathcal{B})$ für eine Klasse $\mathcal{B}$ von Teilmengen gezeigt haben, kann man zeigen, dass das kleinste Dynkin-System $\delta(\mathcal{B})$ existiert, das $\mathcal{B}$ enthält.

Hilfssatz 1.5. *Sei $\mathcal{B}$ ein Dynkin-System. Folgende Aussagen sind äquivalent:*

i) *$\mathcal{B}$ ist eine σ-Algebra.*

ii) *Sind $A, B \in \mathcal{B}$, dann ist auch $A \cap B \in \mathcal{B}$.*

Beweis. Ist $\mathcal{B}$ eine σ-Algebra, so folgt die Aussage aus Hilfssatz 1.2. Nehmen wir also ii) an. Wir haben $\emptyset = \Omega \setminus \Omega \in \mathcal{B}$ und $A^c = \Omega \setminus A \in \mathcal{B}$. Sind $A, B \in \mathcal{B}$, dann ist $A \setminus B = A \setminus (A \cap B) \in \mathcal{B}$. Seien nun A_i Mengen aus $\mathcal{B}$. Wir setzen $B_n = A_n \setminus (\cup_{i=1}^{n-1} A_i)$. Die Mengen B_i sind disjunkt und $\cup_{i=1}^{n} A_i = \cup_{i=1}^{n} B_i$. Da $B_1 = A_1$ ist $B_1 \in \mathcal{B}$. Mit vollständiger Induktion folgt nun, dass $B_n \in \mathcal{B}$ und damit $\cup_{i=1}^{n} B_i \in \mathcal{B}$. Daher ist $\cup_{i=1}^{\infty} A_i = \cup_{i=1}^{\infty} B_i \in \mathcal{B}$. Also ist $\mathcal{B}$ eine σ-Algebra. $\square$

Proposition 1.6. *Sei $\mathcal{B}$ eine Klasse von Teilmengen von Ω, so dass für $A, B \in \mathcal{B}$ auch $A \cap B \in \mathcal{B}$. Dann ist $\delta(\mathcal{B}) = \sigma(\mathcal{B})$.*

Beweis. Wir müssen zeigen, dass $\delta(\mathcal{B})$ eine σ-Algebra ist. Nach Hilfssatz 1.5 müssen wir also zeigen, dass $A, B \in \delta(\mathcal{B})$ impliziert, dass $A \cap B \in \delta(\mathcal{B})$. Sei $E \in \delta(\mathcal{B})$ und

$$\mathcal{D}_E = \{A \in \delta(\mathcal{B}) : A \cap E \in \delta(\mathcal{B})\} .$$

Wir zeigen nun, dass $\mathcal{D}_E$ ein Dynkin-System ist. Wir haben $\Omega \cap E = E \in \delta(\mathcal{B})$, also $\Omega \in \mathcal{D}_E$. Sind $A, B \in \mathcal{D}_E$ mit $B \subset A$, dann ist

$$(A \setminus B) \cap E = (A \cap E) \setminus (B \cap E) \in \delta(\mathcal{B}) .$$

Also ist $A \setminus B \in \mathcal{D}_E$. Seien $A_i \in \mathcal{D}_E$ mit $A_i \cap A_j = \emptyset$ für $i \neq j$. Dann ist

$$\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big) \cap E = \bigcup_{i=1}^{\infty} (A_i \cap E) \in \delta(\mathcal{B}) .$$

Somit ist $\cup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{D}_E$. Also ist $\mathcal{D}_E$ ein Dynkin-System. Sei nun $B \in \mathcal{B}$. Für $A \in \mathcal{B}$ gilt, $A \cap B \in \mathcal{B} \subset \delta(\mathcal{B})$. Also ist $\mathcal{B} \subset \mathcal{D}_B$, das heisst $\mathcal{D}_B = \delta(\mathcal{B})$. Also gilt $A \cap B \in \delta(\mathcal{B})$ für alle $A \in \delta(\mathcal{B})$. Insbesondere haben wir $\mathcal{B} \subset \mathcal{D}_A$ für alle $A \in \delta(\mathcal{B})$. Somit ist $\mathcal{D}_A = \delta(\mathcal{B})$ für alle $A \in \delta(\mathcal{B})$. Das heisst, $A \cap B \in \delta(\mathcal{B})$ für alle $A, B \in \delta(\mathcal{B})$. Das beweist die Behauptung. □

1.2. Mengenfunktionen

Definition 1.7. *Sei $(\Omega, \mathcal{F})$ ein messbarer Raum. Eine Abbildung $\mu : \mathcal{F} \to [0, \infty]$ mit $\mu(\emptyset) < \infty$ heisst* **Mass**, *falls die Abbildung* σ-**additiv** *ist. Das heisst, falls für alle Mengen $A_1, A_2, \dots$ in $\mathcal{F}$ mit $A_i \cap A_j = \emptyset$ für $i \neq j$ gilt, dass*

$$\mu(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) \ .$$

Wir sagen, $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ ist ein **Massraum**. *Gilt zusätzlich $\mu(\Omega) = 1$, so heisst μ* **Wahrscheinlichkeitsmass** *und $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ heisst* **Wahrscheinlichkeitsraum**. *Ein Mass μ heisst* **endlich**, *falls $\mu(\Omega) < \infty$. Es heisst* σ-**endlich**, *falls es Mengen $\Omega_i \in \mathcal{F}$ gibt, so dass $\mu(\Omega_i) < \infty$ und $\cup_{i=1}^{\infty} \Omega_i = \Omega$.*

Hilfssatz 1.8. *Sei μ ein Mass auf Ω. Es gelten die folgenden Regeln für $A, B, A_i \in \mathcal{F}$:*

i) *Falls $A \subset B$, dann gilt*

$$\mu(A) + \mu(B \setminus A) = \mu(B) \ .$$

Insbesondere gilt, $\mu(A) \leq \mu(B)$ und $\mu(\emptyset) = 0$.

ii) $$\mu(A \cap B) + \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) \ .$$

Insbesondere ist $\mu(A \cup B) \leq \mu(A) + \mu(B)$.

iii) *Ist $\mu(A_i) < \infty$ für alle i, so gilt*

$$\mu(\cup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq 1_i < i_2 < \cdots < i_k \leq n} \mu(\cap_{j=1}^{k} A_{i_j}) \ .$$

iv) *Seien $A_1 \subset A_2 \subset \cdots$ eine unendliche Anzahl Mengen. Dann gilt*

$$\mu(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \lim_{i \to \infty} \mu(A_i) \ .$$

v) *Seien $A_1 \supset A_2 \supset \cdots$ eine unendliche Anzahl Mengen und $\mu(A_1) < \infty$. Dann gilt*

$$\mu(\cap_{i=1}^{\infty} A_i) = \lim_{i\to\infty} \mu(A_i) \ .$$

Beweis. Aus den Eigenschaften der σ-Algebra folgt, dass die betrachteten Mengen in $\mathcal{F}$ sind. Setzen wir $A_j = \emptyset$ für alle j, so folgt dass $\mu(\emptyset) = 0$. Setzen wir $A_j = \emptyset$ für $j > n$, so folgt $\mu(\cup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)$ falls $A_i \cap A_j = \emptyset$ für $i \neq j$.
i) Wir haben $A \cap (B \setminus A) = \emptyset$ und $A \cup (B \setminus A) = B$. Somit folgt die Eigenschaft aus der Definition des Masses.
ii) Wir haben $A \setminus B$, $B \setminus A$ und $A \cap B$ sind disjunkt und $A \cup B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup (A \cap B)$. Weiter haben wir $A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$ und $B = (B \setminus A) \cup (A \cap B)$. Also gilt

$$\begin{aligned}\mu(A \cap B) + \mu(A \cup B) &= \mu(A \cap B) + \mu(A \setminus B) + \mu(B \setminus A) + \mu(A \cap B) \\ &= \mu(A) + \mu(B) \ .\end{aligned}$$

iii) Dies folgt mit vollständiger Induktion mit Hilfe von ii).
iv) Seien $A_0 = \emptyset$ und $B_n = A_n \setminus A_{n-1}$. Wir haben $\cup_{i=1}^{\infty} A_i = \cup_{i=1}^{\infty} B_i$, $A_n = \cup_{i=1}^{n} B_i$ und $B_i \cap B_j = \emptyset$ für $i \neq j$. Also gilt

$$\mu(\cup_{i=1}^{\infty} B_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(B_i) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \mu(B_i) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) \ .$$

v) Die Aussage folgt aus

$$\cap_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \setminus (\cup_{i=1}^{\infty} A_i^c) = A_1 \setminus [\cup_{i=1}^{\infty} (A_1 \cap A_i^c)] \ .$$

□

Beispiel 1.9. Sei $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$ eine abzählbare Menge. Wir setzen $\mathcal{F} = 2^{\Omega}$, die Menge aller Teilmengen. Sei $\{p_\omega : \omega \in \Omega\}$ eine Menge von positiven Zahlen. Wir setzen dann

$$\mu(A) = \sum_{\omega\in A} p_\omega \ .$$

Es ist nun einfach zu zeigen, dass μ ein Mass ist. Setzen wir $p_\omega = 1$ für alle ω, dann heisst μ **Zählmass**. Der Name kommt daher, dass $\mu(A) = |A|$ (Anzahl Elemente in A). ■

1.3. Fortsetzungssatz

Oft will man ein Mass definieren, das gewisse Werte auf bestimmten Ereignissen annimmt. Zum Beispiel möchte man auf $\mathbb{R}$ ein Mass definieren, das die Werte $\mu((a,b)) = b - a$ für alle $-\infty < a < b < \infty$ annimmt. Die Frage ist dann, existiert solch ein Mass und wie viele solcher Masse gibt es.

Satz 1.10. (Carathéodory) *Sei $\mathcal{A}$ eine Klasse von Teilmengen von Ω, so dass*

i) $\Omega \in \mathcal{A}$,

ii) *Sind $A, B \in \mathcal{A}$, so ist $B \setminus A$ eine endliche disjunkte Vereinigung von Mengen aus $\mathcal{A}$,*

iii) *Sind $A, B \in \mathcal{A}$, so ist $A \cap B \in \mathcal{A}$.*

Sei $\mu' : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ eine Funktion, so dass

iv) $\mu'(\emptyset) = 0$,

v) *Sind $A, B \in \mathcal{A}$ mit $A \cup B \in \mathcal{A}$ und $A \cap B = \emptyset$, dann gilt $\mu'(A \cup B) = \mu'(A) + \mu'(B)$,*

vi) *Es gibt Mengen $\Omega_i \in \mathcal{A}$ mit $\mu'(\Omega_i) < \infty$, $\Omega_i \subset \Omega_{i+1}$ und $\Omega = \cup_{i=1}^{\infty} \Omega_i$*

vii) *Sind $A, A_1, A_2, A_3, \ldots \in \mathcal{A}$, so dass $A \subset \cup_{i=1}^{\infty} A_i$, dann gilt $\mu'(A) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu'(A_i)$.*

Dann existiert ein eindeutiges Mass $\mu : \sigma(\mathcal{A}) \to [0, \infty]$, so dass $\mu(A) = \mu'(A)$ für alle $A \in \mathcal{A}$.

Beweis. Da $\Omega \in \mathcal{A}$ und $\emptyset = \Omega \setminus \Omega$, folgt aus ii), dass $\emptyset \in \mathcal{A}$. Also ist auch iv) wohldefiniert. Wir bemerken zuerst, dass aus Proposition 1.6 folgt, dass $\delta(\mathcal{A}) = \sigma(\mathcal{A})$. Wir zeigen zuerst die Eindeutigkeit. Seien μ und ν zwei Masse, für die $\mu(A) = \nu(A)$ für alle $A \in \mathcal{A}$ gilt. Sei $E \in \mathcal{A}$ mit $\mu(E) < \infty$. Wir betrachten nun das Mengensystem

$$\mathcal{D}_E = \{A \in \sigma(\mathcal{A}) : \mu(A \cap E) = \nu(A \cap E)\} \;.$$

Wir haben $\Omega \in \mathcal{D}_E$. Seien $A, B \in \mathcal{D}_E$ mit $B \subset A$. Dann haben wir

$$\begin{aligned} \mu((A \setminus B) \cap E) &= \mu((A \cap E) \setminus (B \cap E)) = \mu(A \cap E) - \mu(B \cap E) \\ &= \nu(A \cap E) - \nu(B \cap E) = \nu((A \setminus B) \cap E) \;. \end{aligned}$$

Somit ist $A \setminus B \in \mathcal{D}_E$. Insbesondere ist $A^c \in \mathcal{D}_E$, falls $A \in \mathcal{D}_E$. Seien nun $\{A_i\} \subset \mathcal{D}_E$ disjunkte Mengen und $A = \cup_i A_i$. Dann haben wir

$$\mu(A \cap E) = \sum_i \mu(A_i \cap E) = \sum_i \nu(A_i \cap E) = \nu(A \cap E) \ ,$$

da μ und ν Masse sind. Also ist auch $A \in \mathcal{D}_E$. Wir haben per Definition $\mathcal{A} \subset \mathcal{D}_E$. Also ist $\mathcal{D}_E = \delta(\mathcal{A}) = \sigma(\mathcal{A})$. Sei $A \in \sigma(\mathcal{A})$. Wählen wir nun $E = \Omega_n$, haben wir

$$\nu(A) = \lim_{n\to\infty} \nu(A \cap \Omega_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(A \cap \Omega_n) = \mu(A) \ .$$

Also ist das Mass eindeutig.

Für $A \subset \Omega$ definieren wir

$$\mathcal{U}(A) = \Bigl\{\{B_n : n \in \mathbb{N}\} : B_n \in \mathcal{A}, A \subset \bigcup_{i=1}^\infty B_i\Bigr\}$$

die Menge der abzählbaren Überdeckungen von A mit Mengen aus $\mathcal{A}$. Aus i) folgt, dass $\mathcal{U}(A) \neq \emptyset$. Wir definieren nun die Abbildung $\hat{\mu} : 2^\Omega \to [0, \infty]$,

$$\hat{\mu}(A) = \inf\Bigl\{\sum_{n=1}^\infty \mu'(B_n) : \{B_n\} \in \mathcal{U}(A)\Bigr\} \ .$$

Wir bemerken, auf Grund von vii), dass $\hat{\mu}(A) = \mu'(A)$ für alle $A \in \mathcal{A}$. Ist $A \subset B$, haben wir $\mathcal{U}(B) \subset \mathcal{U}(A)$, also $\hat{\mu}(A) \le \hat{\mu}(B)$. Seien $A_1, A_2, \ldots$ Teilmengen von Ω mit $\hat{\mu}(A_n) < \infty$. Wir setzen $A = \cup_{n=1}^\infty A_n$. Sei $\varepsilon > 0$. Wir können dann Mengen $\{B_{n,m}\} \in \mathcal{U}(A_n)$ wählen, so dass

$$\hat{\mu}(A_n) > \sum_{m=1}^\infty \mu'(B_{n,m}) - 2^{-n}\varepsilon \ .$$

Wir haben dann, dass $A \subset \cup_n \cup_m B_{n,m}$. Also gilt

$$\hat{\mu}(A) \le \sum_{n,m=1}^\infty \mu'(B_{n,m}) < \sum_{n=1}^\infty \hat{\mu}(A_n) + \varepsilon \ .$$

Da ε beliebig ist, gilt

$$\hat{\mu}(A) \le \sum_{n=1}^\infty \hat{\mu}(A_n) \ . \tag{1.1}$$

Wir definieren nun die Menge

$$\mathcal{M} = \{A \in 2^\Omega : \hat{\mu}(A \cap B) + \hat{\mu}(A^c \cap B) = \hat{\mu}(B) \text{ für alle } B \in 2^\Omega\} \ .$$

Wir wollen zeigen, dass $\mathcal{M}$ ein Dynkin-System, bzw. eine σ-Algebra ist. Wir haben $\Omega \in \mathcal{M}$. Aus der Definition folgt, dass $A \in \mathcal{M} \iff A^c \in \mathcal{M}$. Seien $A, B \in \mathcal{M}$ und $E \in 2^\Omega$. Dann haben wir

$$\begin{aligned}\hat{\mu}(E) &\leq \hat{\mu}((A \cap B) \cap E) + \hat{\mu}((A \cap B)^c \cap E) \\ &= \hat{\mu}((A \cap B) \cap E) + \hat{\mu}((A^c \cap B \cap E) \cup (A \cap B^c \cap E) \cup (A^c \cap B^c \cap E)) \\ &\leq \hat{\mu}(A \cap B \cap E) + \hat{\mu}(A^c \cap B \cap E) + \hat{\mu}(A \cap B^c \cap E) + \hat{\mu}(A^c \cap B^c \cap E) \\ &= \hat{\mu}(B \cap E) + \hat{\mu}(B^c \cap E) = \hat{\mu}(E) \ .\end{aligned}$$

Somit gilt $A \cap B \in \mathcal{M}$. Insbesondere folgt, dass $A \cup B = (A^c \cap B^c)^c \in \mathcal{M}$ und $A \setminus B = A \cap B^c \in \mathcal{M}$.

Seien nun $\{A_i\}$ Mengen aus $\mathcal{M}$ mit $A_i \cap A_j = \emptyset$ für $i \neq j$. Wir setzen $B_n = \cup_{i=1}^n A_i$ und $A = \cup_{i=1}^\infty A_i$. Wegen der endlichen Additivität ist $B_n \in \mathcal{M}$. Sei $E \subset \Omega$. Es gilt trivialerweise $\hat{\mu}(B_1 \cap E) = \sum_{i=1}^1 \hat{\mu}(A_i \cap E)$. Durch Induktion

$$\begin{aligned}\hat{\mu}(B_{n+1} \cap E) &= \hat{\mu}(B_n \cap (B_{n+1} \cap E)) + \hat{\mu}(B_n^c \cap (B_{n+1} \cap E)) \\ &= \hat{\mu}(B_n \cap E) + \hat{\mu}(A_{n+1} \cap E) = \sum_{i=1}^{n+1} \hat{\mu}(A_i \cap E) \ .\end{aligned}$$

Somit haben wir

$$\begin{aligned}\hat{\mu}(E) &= \hat{\mu}(B_n \cap E) + \hat{\mu}(B_n^c \cap E) \geq \hat{\mu}(B_n \cap E) + \hat{\mu}(A^c \cap E) \\ &= \sum_{i=1}^n \hat{\mu}(A_i \cap E) + \hat{\mu}(A^c \cap E) \ .\end{aligned}$$

Insbesondere gilt

$$\hat{\mu}(E) \geq \sum_{i=1}^\infty \hat{\mu}(A_i \cap E) + \hat{\mu}(A^c \cap E) \ .$$

Also folgt aus (1.1)

$$\hat{\mu}(E) \leq \hat{\mu}(A \cap E) + \hat{\mu}(A^c \cap E) \leq \sum_{i=1}^\infty \hat{\mu}(A_i \cap E) + \hat{\mu}(A^c \cap E) \leq \hat{\mu}(E) \ .$$

Also ist $A \in \mathcal{M}$. Wir haben also gezeigt, dass $\mathcal{M}$ ein Dynkin-System ist. Aus Hilfssatz 1.5 folgt, dass $\mathcal{M}$ eine σ-Algebra ist.

Als nächstes zeigen wir, dass $\hat{\mu}$ ein Mass auf $\mathcal{M}$ ist. Seien A_i, A wie oben. Wir haben

$$\hat{\mu}(A_1 \cup A_2) = \hat{\mu}(A_1 \cap (A_1 \cup A_2)) + \hat{\mu}(A_1^c \cap (A_1 \cup A_2)) = \hat{\mu}(A_1) + \hat{\mu}(A_2) \ .$$

Mit vollständiger Induktion schliessen wir, dass $\hat{\mu}(B_n) = \sum_{i=1}^n \hat{\mu}(A_i)$. Insbesondere erhalten wir

$$\hat{\mu}(A) \geq \lim_{n\to\infty} \hat{\mu}(B_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^n \hat{\mu}(A_i) = \sum_{i=1}^\infty \hat{\mu}(A_i) \ .$$

Aus (1.1) folgern wir, dass $\hat{\mu}(A) = \sum_{i=1}^\infty \hat{\mu}(A_i)$. Also ist $\hat{\mu}$ ein Mass auf $\mathcal{M}$.

Wir müssen noch zeigen, dass $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}$. Sei $A \in \mathcal{A}$ und $E \subset \Omega$. Wir können annehmen, dass $\hat{\mu}(E) < \infty$, da die Aussage sonst aus $\hat{\mu}(E) \leq \hat{\mu}(A \cap E) + \hat{\mu}(A^c \cap E)$ folgt. Es gibt dann Mengen $B_1, B_2, \ldots \in \mathcal{A}$, so dass $E \subset \cup_{n=1}^\infty B_n$ und $\hat{\mu}(E) > \sum_{n=1}^\infty \mu'(B_n) - \varepsilon$. Wir haben $A \cap B_n \in \mathcal{A}$. Es gibt disjunkte Mengen $\{C_k^n : 1 \leq k \leq m_n\} \subset \mathcal{A}$, so dass $B_n \setminus A = \cup_{k=1}^{m_n} C_k^n$. Wir haben dann wegen v)

$$B_n = (A \cap B_n) \cup \bigcup_{k=1}^{m_n} C_k^n \ , \qquad \mu'(B_n) = \mu'(A \cap B_n) + \sum_{k=1}^{m_n} \mu'(C_k^n) \, .$$

Wir haben weiter

$$A \cap E \subset \bigcup_{n=1}^\infty (A \cap B_n) \ , \qquad A^c \cap E \subset \bigcup_{n=1}^\infty \bigcup_{k=1}^{m_n} C_k^n \ .$$

Wir folgern dann, dass

$$\begin{aligned}
\hat{\mu}(A \cap E) + \hat{\mu}(A^c \cap E) &\leq \sum_{n=1}^\infty \mu'(A \cap B_n) + \sum_{n=1}^\infty \sum_{k=1}^{m_n} \mu'(C_k^n) \\
&= \sum_{n=1}^\infty \Big(\mu'(A \cap B_n) + \sum_{k=1}^{m_n} \mu'(C_k^n)\Big) = \sum_{n=1}^\infty \mu'(B_n) \leq \hat{\mu}(E) + \varepsilon \ .
\end{aligned}$$

Da ε beliebig war, haben wir

$$\hat{\mu}(E) \leq \hat{\mu}(A \cap E) + \hat{\mu}(A^c \cap E) \leq \hat{\mu}(E) \ .$$

Somit ist $A \in \mathcal{M}$. Das heisst, $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}$. Damit ist auch $\sigma(\mathcal{A}) \subset \mathcal{M}$. Also ist $\hat{\mu}$ ein Mass auf $\sigma(\mathcal{A})$. □

Beispiel 1.11. Sei $\Omega = \mathbb{R}$ und

$$\mathcal{A} = \{(a, b] \cap \mathbb{R} : -\infty \leq a \leq b \leq \infty\} \ ,$$

wobei wir $(a, a] = \emptyset$ setzen. Dann sind i) – iii) aus Satz 1.10 erfüllt. Sei $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine monoton wachsende rechtsstetige Funktion. Wir definieren die Funktion

$$\mu' : \mathcal{A} \to [0, \infty], \ (a, b] \mapsto F(b) - F(a) \ ,$$

wobei $F(\infty) = \lim_{x\to\infty} F(x)$ und $F(-\infty) = \lim_{x\to-\infty} F(x)$. Wir haben dann $\mu'(\emptyset) = \mu'((a,a]) = F(a) - F(a) = 0$. Sei $a \le c$. Ist $(a,b] \cup (c,d] \in \mathcal{A}$, so ist $c \le b$. Ist weiter $(a,b] \cap (c,d] = \emptyset$, dann ist $b \le c$. Also haben wir $b = c$. Es gilt dann

$$\begin{aligned}\mu'((a,b] \cup (c,d]) = \mu'((a,d]) &= F(d) - F(a) = F(b) - F(a) + F(d) - F(c) \\ &= \mu'((a,b]) + \mu'((c,d]) \; .\end{aligned}$$

Setzen wir $\Omega_n = (-n,n]$, so ist $\mu'(\Omega_n) = F(n) - F(-n) < \infty$ und $\cup_{n=1}^\infty \Omega_n = \mathbb{R}$.

Wir zeigen zuerst, dass für endliche Überdeckungen $(a,b] \subset \cup_{k=1}^n (a_k,b_k]$ gilt, dass $\mu'((a,b]) \le \sum_{k=1}^n \mu'((a_k,b_k])$. Wir können annehmen, dass $a \le a_i < b_i \le b$. Die Aussage gilt offensichtlich für $n = 1$. Aus

$$\begin{aligned}\mu'((a,b]) &= \mu'((a,a_{n+1}]) + \mu'((a_{n+1},b_{n+1}]) + \mu'((b_{n+1},b]) \\ &\le \sum_{k=1}^n \mu'((a,a_{n+1}] \cap (a_k,b_k]) + \sum_{k=1}^n \mu'((b_{n+1},b] \cap (a_k,b_k]) + \mu'((a_{n+1},b_{n+1}]) \\ &\le \sum_{k=1}^n [\mu'((a,a_{n+1}] \cap (a_k,b_k]) + \mu'((a_{n+1},b] \cap (a_k,b_k])] + \mu'((a_{n+1},b_{n+1}]) \\ &\le \sum_{k=1}^n \mu'((a_k,b_k]) + \mu'((a_{n+1},b_{n+1}]) = \sum_{k=1}^{n+1} \mu'((a_k,b_k]) \; .\end{aligned}$$

Somit gilt die Aussage.

Sei nun $(a,b]\cap\mathbb{R} \subset \cup_{n=1}^\infty ((a_n,b_n]\cap\mathbb{R})$. Wir können annehmen, dass $\sum_{n=1}^\infty F(b_n) - F(a_n) < \infty$ und dass $a < b$. Wir nehmen zuerst an, dass $-\infty < a < b < \infty$. Sei $A_n = (a,b] \setminus (\cup_{k=1}^n (a_k,b_k])$. Durch Induktion zeigt man einfach, dass es Zahlen m_n, $x_k^n < y_k^n$ für $k \le m_n$ gibt, so dass für festes n die Intervalle $(x_k^n, y_k^n]$ disjunkt sind und $A_n = \cup_{k=1}^{m_n} (x_k^n, y_k^n]$. Für jedes $z \in (a,b]$ gibt es ein $n(z)$, so dass $z \notin A_{n(z)}$, da $\cap_{n=1}^\infty A_n = \emptyset$. Sei $\varepsilon > 0$. Wir wählen $a < x < b$, so dass $F(x) - F(a) < \varepsilon$. Wir wählen nun Zahlen $u(z)$ und $v(z)$ mit

i) $a < u(z) < z < v(z) < b + 1$,

ii) $A_{n(z)} \cap (u(z), z] = \emptyset$,

iii) falls $z \notin \bar{A}_{n(z)}$, dann gilt $A_{n(z)} \cap (u(z), v(z)] = \emptyset$,

iv) $F(v(z)) - F(z) < \varepsilon 2^{-n(z)}/m_{n(z)}$.

Wir haben dann $[x,b] \subset (a,b] \subset \cup_{z\in(a,b]}(u(z),v(z))$. Da $[x,b]$ kompakt ist, gibt es eine endliche Menge K, so dass $[x,b] \subset \cup_{z\in K}(u(z),v(z))$. Sei $p \in \mathbb{N}$, so dass $p \geq \sup_K n(z)$. Wir haben dann

$$A_p \cap [x,b] = \bigcup_{z\in K} [A_p \cap (u(z),v(z))] \subset \bigcup_{z\in K} [A_{n(z)} \cap (u(z),v(z)]] \subset \bigcup_{z\in K\cap \bar{A}_{n(z)}} (z,v(z)] \; .$$

Wir erhalten daher

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{m_p} \mu'((x_k^p,y_k^p] \cap [x,b]) &\leq \sum_{\substack{K \\ z\in \bar{A}_{n(z)}}} \mu'((z,v(z)]) = \sum_{\substack{K \\ z\in \bar{A}_{n(z)}}} F(v(z)) - F(z) \\ &< \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{m_n} \frac{\varepsilon}{m_n 2^n} = \varepsilon \; . \end{aligned}$$

Es folgt dann, dass

$$\sum_{k=1}^{m_p} \mu'((x_k^p,y_k^p]) \leq 2\varepsilon \; .$$

Aus

$$(a,b] \subset \left(\bigcup_{k=1}^{p}(a_k,b_k]\right) \cup \left(\bigcup_{k=1}^{m_p}(x_k^p,y_k^p]\right) \; ,$$

folgt

$$\mu'((a,b]) \leq \sum_{k=1}^{p} \mu'((a_k,b_k]) + \sum_{k=1}^{m_p} \mu'((x_k^p,y_k^p]) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu'((a_k,b_k]) + 2\varepsilon \; .$$

Somit gilt

$$\mu'((a,b]) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu'((a_k,b_k]) \; .$$

Ist nun $a = -\infty$ oder $b = \infty$, haben wir

$$F(b \wedge n) - F(a \vee (-n)) = \mu'((a,b] \cap (-n,n]) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu'((a_k,b_k]) \; .$$

Lassen wir nun $n \to \infty$ folgt die Aussage für beliebige a,b.

Also existiert ein eindeutiges Mass auf der Borel-σ-Algebra μ mit der Eigenschaft $\mu((a,b]) = F(b) - F(a)$. Dieses Mass heisst **Stieltjesmass**. Ist $F(x) = x$, so heisst μ **Lebesguemass**. ∎

Beispiel 1.3 (Fortsetzung). Betrachten wir das Intervall $(0,1]$. Sei $\mathcal{F}$ die Borel-σ-Algebra und μ das Lebesguemass. Wir wollen zeigen, dass sich das Lebesguemass nicht auf alle Teilmengen von $(0,1]$ fortsetzen lässt. Wir sagen $a \sim b$, falls $a - b \in \mathbb{Q}$. Dann ist $\sim$ eine Äquivalenzrelation und $(0,1]$ zerfällt in Äquivalenzklassen. Wegen dem Auswahlsaxiom können wir eine Menge A wählen, die aus jeder Äquivalenzklasse genau ein Element enthält. Wir definieren für $q \in \mathbb{Q} \cap (0,1]$ die Mengen

$$A_q = [\{a + q : a \in A\} \cup \{a + q - 1 : a \in A\}] \cap (0,1] \ .$$

Dann ist $A_q \cap A_r = \emptyset$ für $q \neq r$ und $(0,1] = \cup_{q \in \mathbb{Q} \cap (0,1]} A_q$. Wenn sich also das Lebesguemass auf alle Teilmengen ausdehnen liesse, so müsste

$$1 = \mu((0,1]) = \sum_{q \in \mathbb{Q} \cap (0,1]} \mu(A_q) = \sum_{q \in \mathbb{Q} \cap (0,1]} \mu(A)$$

gelten. Da dies nicht möglich ist, kann das Lebesguemass nicht auf alle Teilmengen ausgedehnt werden. Insbesondere enthält $\mathcal{F}$ nicht alle Teilmengen von $(0,1]$. ■

Beispiel 1.12. Sei $\Omega = (0,1]$, $\mathcal{A} = \{(a,b] : 0 < a \leq b \leq 1\}$ und $\mu'(A) = \infty$, falls $A \neq \emptyset$ und $\mu'(\emptyset) = 0$. Dann sind die Bedingungen von Satz 1.10 mit Ausnahme von vi) erfüllt. Also ist $\mu(A) = \infty$, falls $A \neq \emptyset$ und $\mu(\emptyset) = 0$ eine Erweiterung von μ'. Weiter ist aber auch $\tilde{\mu}(A) = |A|$ (Anzahl Elemente in A) eine mögliche Erweiterung von μ'. Somit ist die Erweiterung nicht eindeutig. ■

Definition 1.13. *Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ ein Massraum. Eine Menge B mit der Eigenschaft, dass es $A \in \mathcal{F}$ gibt, so dass $B \subset A$ und $\mu(A) = 0$ heisst* **Nullmenge**. *Ein Massraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ heisst* **vollständig**, *falls für alle $B \subset A$ mit $A \in \mathcal{F}$ und $\mu(A) = 0$, gilt dass $B \in \mathcal{F}$. Wir sagen eine Eigenschaft gilt* **fast überall**, *falls die Menge, auf der die Eigenschaft nicht gilt, eine Nullmenge ist. Ist $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, so sagen wir* **fast sicher** *statt fast überall.*

Ist $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ ein σ-endlicher Massraum und $\hat{\mu}$ die Erweiterung des Masses auf $\mathcal{M}$, definiert wie im Beweis von Satz 1.10. Es gibt dann eine kleinste σ-Algebra, die $\mathcal{F}$ und alle Nullmengen enthält. Sei $A \in \mathcal{F}$ mit $\mu(A) = 0$ und $B \subset A$. Sei nun $E \subset \Omega$. Dann gilt $\hat{\mu}(E \cap B) \leq \hat{\mu}(B) \leq \hat{\mu}(A) = 0$. Weiter gilt $\hat{\mu}(E \cap B^c) \leq \hat{\mu}(E)$ und damit $\hat{\mu}(E \cap B) + \hat{\mu}(E \cap B^c) \leq \hat{\mu}(E)$. Aus (1.1) folgt damit, dass $B \in \mathcal{M}$. Das heisst, es ist möglich das Mass auf der Vervollständigung von $\mathcal{F}$ zu definieren.

1.4. Messbare Abbildungen

Definition 1.14. *Seien $(\Omega, \mathcal{F})$ und $(\Omega', \mathcal{F}')$ messbare Räume. Eine Abbildung $f : \Omega \to \Omega'$ heisst* **messbar**, *falls*

$$f^{-1}(A) := \{\omega \in \Omega : f(\omega) \in A\} \in \mathcal{F} , \qquad \forall A \in \mathcal{F}' .$$

Sei $f : \Omega \to \Omega'$ eine beliebige Abbildung. Dann ist $\mathcal{A} := \{f^{-1}(A) : A \in \mathcal{F}'\}$ eine σ-Algebra. Weiter, ist $\mathcal{B} \subset \mathcal{F}'$ mit $\sigma(\mathcal{B}) = \mathcal{F}'$, dann ist f genau dann messbar, wenn $f^{-1}(B) \in \mathcal{F}$ für alle $B \in \mathcal{B}$.

Sind $(\Omega, \mathcal{F})$ $(\Omega', \mathcal{F}')$ und $(\Omega'', \mathcal{F}'')$ messbare Räume und $f : \Omega \to \Omega'$ und $f' : \Omega' \to \Omega''$ messbare Abbildungen, so ist klar, dass $f' \circ f$ messbar ist.

Beispiel 1.15. Sei $(\Omega, \mathcal{F}) = (\Omega', \mathcal{F}') = (\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$ die Borel-σ-Algebra auf $\mathbb{R}$. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Abbildung. Betrachten wir zuerst die Intervalle $A = (-\infty, a]$. Dann ist $f^{-1}(A) = \{x : f(x) \le a\}$. Wir zeigen zuerst, dass $f^{-1}(A) \cap [-n, n] \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$. Ist $f^{-1}(A) \cap [-n, n] = \emptyset \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$ müssen wir nichts zeigen. Sei $\{y_m\} \subset f^{-1}(A) \cap [-n, n]$ eine konvergente Folge und $y = \lim_{m\to\infty} y_m$. Wegen der Stetigkeit ist $f(y) \le a$, das heisst, $y \in f^{-1}(A) \cap [-n, n]$. Also ist $f^{-1}(A) \cap [-n, n]$ kompakt und daher messbar. Aus $f^{-1}(A) = \cup_n (f^{-1}(A) \cap [-n, n])$ folgt, dass $f^{-1}(A) \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$. Da $\mathcal{A} := \{f^{-1}(B) : B \in \mathcal{F}'\}$ die kleinste σ-Algebra ist, die alle $f^{-1}((-\infty, a])$ enthält, ist $f(x)$ messbar.

Sei nun $f(x)$ eine monotone Funktion. Da $g(x) = -x$ messbar ist, können wir annehmen, dass $f(x)$ wachsend ist. Sei $-\infty < a < b < \infty$. Nehmen wir an, dass $f^{-1}((a, b)) \neq \emptyset$. Sei $a' = \inf\{x : f(x) > a\}$ und $b' = \sup\{x : f(x) < b\}$. Dann ist $f^{-1}((a, b)) \in \{(a', b'), (a', b'], [a', b'), [a', b']\}$. Also ist $f^{-1}((a, b)) \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$. Da die Intervalle (a, b) die Borel-σ-Algebra erzeugen, ist $f(x)$ messbar. ■

Sei Ω eine Menge und seien $(\Omega_i, \mathcal{F}_i)$ messbare Räume für eine Kollektion I von Indizes und für jedes $i \in I$ sei $f_i : \Omega \to \Omega_i$ eine Abbildung. Setzen wir

$$\sigma(f_i : i \in I) := \sigma\Big(f_i^{-1}(A) : i \in I, A \in \mathcal{F}_i\Big) ,$$

dann ist $\sigma(f_i : i \in I)$ die kleinste σ-Algebra auf Ω, bezüglich der alle Abbildungen f_i messbar sind.

Proposition 1.16. *Sei $(\Omega, \mathcal{F})$ ein messbarer Raum und $f_i : \Omega \to \mathbb{R}$ (Borel)-messbare Abbildungen für $i \in \mathbb{N}$. Dann sind auch die Abbildungen*

$$\inf_i f_i , \qquad \sup_i f_i , \qquad \varliminf_{i\to\infty} f_i , \qquad \varlimsup_{i\to\infty} f_i ,$$

messbare Abbildungen (von Ω nach $[-\infty, \infty]$).

Beweis. Aus

$$(\inf_i f_i)^{-1}((-\infty, a)) = \{\inf_i f_i < a\} = \bigcup_i \{f_i < a\} = \bigcup_i f_i^{-1}((-\infty, a)) \in \mathcal{F}$$

und der Eigenschaft, dass $(-\infty, a)$ die Borel-σ-Algebra erzeugen, folgt, dass $\inf_i f_i$ messbar ist. Analog folgt, dass

$$(\sup_i f_i)^{-1}((-\infty, a]) = \{\sup_i f_i \le a\} = \bigcap_i \{f_i \le a\} = \bigcap_i f_i^{-1}((-\infty, a]) \in \mathcal{F}$$

und $\sup_i f_i$ ist messbar. Insbesondere sind dann $\underline{\lim}_{i\to\infty} f_i = \sup_n \inf_{i\ge n} f_i$ und $\overline{\lim}_{i\to\infty} f_i = \inf_n \sup_{i\ge n} f_i$ messbar. □

Proposition 1.17. *Seien Ω und Ω' topologische Räume, $\mathcal{F} = \mathfrak{B}(\Omega)$ und $\mathcal{F}' = \mathfrak{B}(\Omega')$. Ist $f : \Omega \to \Omega'$ stetig, dann ist f messbar.*

Beweis. Dies folgt aus der Definition der Stetigkeit und daher, dass die offenen Mengen die Borel-σ-Algebren erzeugen. □

Proposition 1.18. *Sei $n \in \mathbb{N}$, $f, g : \Omega \to \mathbb{R}^n$ und $h, k : \Omega \to \mathbb{R}$ messbare Abbildungen, so dass $0 \notin k(\Omega)$. Dann sind auch*

$$f + g\ , \qquad f - g\ , \qquad hf\ , \qquad \langle f, g\rangle \text{ (Skalarprodukt)}, \qquad f/k$$

messbar.

Beweis. Die Abbildungen $\pi : \Omega \to \mathbb{R}^{2n} : \omega \to (f(\omega), g(\omega))$ und $\tilde{\pi} : \Omega \to \mathbb{R}^{n+1} : \omega \to (f(\omega), h(\omega))$ sind messbar. Da die Abbildungen $\mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^n, (x, y) \mapsto (x + y)$, $\mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \langle x, y\rangle$, $\mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n, (x, \alpha) \mapsto \alpha x$ und $\mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \alpha \mapsto \alpha^{-1}$ stetig sind, folgt die Aussage. □

Definition 1.19. *Sei $A \subset \Omega$. Die Funktion*

$$\mathbb{1}_A : \Omega \to \{0, 1\}, \quad \omega \mapsto \begin{cases} 1, & \text{falls } \omega \in A, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

heisst **Indikatorfunktion**. *Sind $\{A_i : 1 \le i \le n\} \subset \mathcal{F}$ und $\{\alpha_i : 1 \le i \le n\}$ reelle Zahlen, dann heisst $\sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}$* **Elementarfunktion**.

$A \in \mathcal{F}$ gilt genau dann, wenn $\mathbb{1}_A$ messbar ist. Sind A_i messbar, dann ist $\sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}$ messbar. Für eine Elementarfunktion können wir $\{A_i\}$ disjunkt wählen. Eine messbare Abbildung, die nur endliche viele Werte annimmt, ist immer eine Elementarfunktion.

Hilfssatz 1.20. *Sei $f : \Omega \to [0, \infty)$ messbar.*

i) *Es gibt eine Folge $0 \le f_1 \le f_2 \le \cdots$ von Elementarfunktionen, so dass $f = \lim_{n\to\infty} f_n$.*

ii) *Es gibt Mengen $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$ und Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots > 0$, so dass*

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \mathbb{1}_{A_n} \; .$$

Beweis. Setzen wir

$$f_n = (2^{-n} \lfloor 2^n f \rfloor) \wedge n \; ,$$

erhalten wir eine messbare Funktion, die maximal $n2^n + 1$ Werte annimmt. Also ist f_n eine Elementarfunktion. Wir haben f_n ist wachsend in n und $\lim_n f_n = f$. Setzen wir nun $B_{n,i} = \{f_n - f_{n-1} = i2^{-n}\}$ und $\beta_{n,i} = i2^{-n}$. Dann ist

$$f_n - f_{n-1} = \sum_{i=1}^{n2^n} \beta_{n,i} \mathbb{1}_{B_{n,i}} \; .$$

Also erhalten wir

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n - f_{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{n2^n} \beta_{n,i} \mathbb{1}_{B_{n,i}} \; .$$

Da $\{(n, i) : n \in \mathbb{N}, 1 \le i \le n2^n\}$ abzählbar ist, folgt die Behauptung. □

Satz 1.21. (Monotones Klassentheorem) *Sei $\mathcal{H}$ ein linearer Raum von beschränkten reellen Funktionen auf Ω, der die konstanten Funktionen enthält, und sei $\mathcal{B}$ eine Kollektion von Teilmengen von Ω, so dass mit $A, B \in \mathcal{B}$ auch $A \cap B \in \mathcal{B}$. Wir nehmen an, dass*

i) *für $A \in \mathcal{B}$ ist auch $\mathbb{1}_A \in \mathcal{H}$,*

ii) *für beschränkte Funktionen $f_1, f_2, \ldots \in \mathcal{H}$ mit $\sup_n f_n \le c < \infty$ mit $f_1 \le f_2 \le \cdots$ gilt auch $f = \lim_n f_n \in \mathcal{H}$.*

Dann enthält $\mathcal{H}$ alle beschränkten $\sigma(\mathcal{B})$-messbaren Funktionen.

Beweis. Sei $\mathcal{D} = \{A \in \sigma(\mathcal{B}) : \mathbb{1}_A \in \mathcal{H}\}$. Dann ist $\Omega \in \mathcal{D}$, da $1 \in \mathcal{H}$. Aus der Linearität folgt, dass für $A, B \in \mathcal{D}$ mit $A \subset B$, $\mathbb{1}_{B \setminus A} = \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A \in \mathcal{H}$. Also ist $B \setminus A \in \mathcal{D}$. Seien nun $A_i \in \mathcal{D}$ mit $A_i \cap A_j = \emptyset$ für $i \neq j$. Wegen der Linearität haben wir

$$\mathbb{1}_{\cup_{j=1}^n A_j} = \sum_{j=1}^n \mathbb{1}_{A_j} \in \mathcal{H} .$$

Dann ist auch

$$\mathbb{1}_{\cup_{j=1}^\infty A_j} = \sum_{j=1}^\infty \mathbb{1}_{A_j} = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^n \mathbb{1}_{A_j} \in \mathcal{H} .$$

Also haben wir $\cup_{j=1}^\infty A_j \in \mathcal{D}$. Das heisst, $\mathcal{D}$ ist ein Dynkin-System. Aus Proposition 1.6 wissen wir, dass $\sigma(\mathcal{B}) \subset \mathcal{D}$. Aus Hilfssatz 1.20 schliessen wir, dass $\mathcal{H}$ alle positiven $\sigma(\mathcal{B})$-messbaren Funktionen enthält. Da $f^+ = f \vee 0$ und $f^- = -f \vee 0$ positive $\sigma(\mathcal{B})$-messbare Funktionen sind, ist auch $f = f^+ - f^- \in \mathcal{H}$. □

Korollar 1.22. *Sei $\mathcal{H}$ ein linearer Raum von messbaren reellen Funktionen, der die konstanten Funktionen und Grenzwerte von wachsenden beschränkten Folgen von Funktionen aus $\mathcal{H}$ enthält. Sei $\mathcal{H}_0 \subset \mathcal{H}$ ein linearer Raum, so dass für $f, g \in \mathcal{H}_0$ auch $fg \in \mathcal{H}_0$. Dann enthält $\mathcal{H}$ alle $\sigma(\mathcal{H}_0)$-messbaren Funktionen.*

Beweis. Sei $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige beschränkte Funktion. Auf jedem beschränkten Intervall ist F der gleichmässige Grenzwert von Polynomen. Somit lässt sich auf beschränkten Intervallen F als monotoner Grenzwert von Polynomen erreichen. Das bedeutet, dass für $f \in \mathcal{H}_0$ gilt, dass $F(f) \in \mathcal{H}$. Insbesondere ist für $a \in \mathbb{R}$, $f_n = [1 \wedge (f-a)^+]^{1/n} \in \mathcal{H}$. Da f_n monoton wachsend ist, folgern wir, dass $\mathbb{1}_{f>a} = \lim_{n\to\infty} f_n \in \mathcal{H}$. Auf ähnliche Weise erhalten wir $\mathbb{1}_{f_1>a_1,\dots,f_n>a_n} \in \mathcal{H}$. Da $\sigma(H_0)$ von Mengen der Form $\{f_1 > a_1, \dots, f_n > a_n\}$ erzeugt wird, folgt die Behauptung aus Satz 1.21. □

Korollar 1.23. (Faktorisierungslemma) *Sei f eine messbare reelle Funktion und g eine $\sigma(f)$-messbare reelle Funktion. Dann gibt es eine messbare Funktion $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, so dass $g = h \circ f$.*

Beweis. Sei $\mathcal{H}$ der Raum der beschränkten Funktionen g, für die die Aussage gilt. $\mathcal{H}$ ist dann ein linearer Raum, der die konstanten Funktionen und die Indikatorfunktionen $\mathbb{1}_{f\in A}$, $A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$, enthält. Sind nun $g_1 \le g_2 \le \cdots$ in $\mathcal{H}$, so gibt es Funktionen h_n mit $g_n = h_n \circ f$, so ist $g = \sup g_n = \sup h_n \circ f = h \circ f$, wobei $h = \sup h_n$. Also haben wir $g \in \mathcal{H}$. Nach Satz 1.21 enhält somit $\mathcal{H}$ alle beschränkten $\sigma(f)$-messbaren Funktionen. Ist $g \geq 0$, so erhalten wir aus $g = \sup_n g \wedge n$, dass für g die Aussage gilt. Durch Aufteilung von g in $g^+ - g^-$ erhalten wir die Aussage. □

Hilfssatz 1.24. *Seien $(\Omega, \mathcal{F})$ und $(\Omega', \mathcal{F}')$ messbare Räume und $f : \Omega \to \Omega'$ eine messbare Funktion. Sei weiter μ ein Mass auf $(\Omega, \mathcal{F})$. Dann ist*

$$\mu' = \mu \circ f^{-1} : \mathcal{F}' \to [0, \infty]\,,\ A \mapsto \mu(f^{-1}(A)) = \mu(\{\omega : f(\omega) \in A\})$$

ein Mass auf $(\Omega', \mathcal{F}')$. μ' ist genau dann ein Wahrscheinlichkeitsmass, falls μ ein Wahrscheinlichkeitsmass ist.

Beweis. Aus der Definition der Messbarkeit einer Abbildung folgt, dass μ' wohldefiniert ist. Es gilt $\mu'(\emptyset) = \mu(\emptyset) = 0$. Seien $A_1, A_2, \ldots$ disjunkte Mengen. Dann sind auch $f^{-1}(A_i)$ disjunkt und $f^{-1}(\cup_n A_n) = \cup_n f^{-1}(A_n)$. Also haben wir

$$\mu'(\cup_n A_n) = \mu(\cup_n f^{-1}(A_n)) = \sum_n \mu(f^{-1}(A_n)) = \sum_n \mu'(A_n)\ .$$

Also ist μ' ein Mass. Aus

$$\mu'(\Omega') = \mu(f^{-1}(\Omega')) = \mu(\Omega)$$

folgt die letzte Behauptung. □

Beispiel 1.25. Sei $\Omega' = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$. Wir schreiben kurz $(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)$ für das Ereignis $\{X_1 = \omega_1, X_2 = \omega_2, \ldots, X_n = \omega_n\}$. Sei $p \in [0, 1]$. Wir definieren die Abbildung

$$\mu'((\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)) = \prod_{k=1}^{n} p^{\omega_k}(1-p)^{1-\omega_k}\ .$$

Mit

$$\mathcal{A} = \{(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n) : n \in \mathbb{N}, \omega_k \in \{0, 1\}\} \cup \{\emptyset\}$$

wollen wir nun das Mass auf $\sigma(\mathcal{A})$ fortsetzen. Wir setzen $\mu'(\emptyset) = 0$. Wir definieren nun die Abbildung $f : [0, 1) \to \Omega'$, die x der entsprechenden Darstellung im Dualsystem zuordnet. Das heisst wir haben $x = \sum_{i=1}^{\infty} \omega_i 2^{-i}$. Erweitern wir $[0, 1)$ mit der Borel-σ-Algebra, dann ist

$$f^{-1}((\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)) = \Big[\sum_{k=1}^{n} \omega_k 2^{-k}, \sum_{k=1}^{n} \omega_k 2^{-k} + 2^{-n}\Big)\ .$$

Also ist f messbar. Definieren wir nun die stetige Funktion $F(x)$ auf $[0,1)$ mit der Eigenschaft, $F(0)=0$ und

$$F\Bigl(\sum_{k=1}^{n-1}\omega_k 2^{-k}+2^{-n}\Bigr)=F\Bigl(\sum_{k=1}^{n-1}\omega_k 2^{-k}\Bigr)+(1-p)\prod_{k=1}^{n-1}p^{\omega_k}(1-p)^{1-\omega_k}\;.$$

Es ist einfach zu zeigen, dass so eine Funktion existiert. Sei μ das Stieljesmass bezüglich der Funktion $F(x)$, siehe Beispiel 1.11. Das Mass $\mu''=\mu\circ f^{-1}$ ist dann eine Fortsetzung von μ' auf $\sigma(\mathcal{A})$. Dass das Mass eindeutig ist, lässt sich durch Umkehrung der Abbildung f zeigen. ∎

1.5. Das Integral

Sei $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ ein Massraum. Wir definieren nun das Integral $\int f\,\mathrm{d}\mu$ für eine messbare reelle Funktion f. Sei zuerst $f=\sum_{i=1}^n \alpha_i 1\!\!1_{A_i}$ eine Elementarfunktion. Dann setzen wir

$$\int f\;\mathrm{d}\mu=\sum_{i=1}^n \alpha_i\mu(A_i)\;.$$

Wegen der Additivität des Masses sieht man leicht, dass die Definition des Integrals nicht von der Darstellung der Elementarfunktion abhängt.

Hilfssatz 1.26. *Sei $f:\Omega\to[0,\infty)$ beschränkt und messbar und*

$$f=\sum_{n=1}^\infty \alpha_n 1\!\!1_{A_n}=\sum_{n=1}^\infty \beta_n 1\!\!1_{B_n}$$

mit $\alpha_n,\beta_n>0$. Dann ist

$$\sum_{n=1}^\infty \alpha_n\mu(A_n)=\sum_{n=1}^\infty \beta_n\mu(B_n)\;.$$

Beweis. Sei zuerst $f=1\!\!1_B$ mit $\mu(B)<\infty$. Das heisst $A_i\subset B$. Sei n fest. Dann gibt es disjunkte Mengen $\{C_\ell:\ell\le k\}$ für ein k, so dass $A_j=\cup_{\ell\in J(j)}C_\ell$ für Indexmengen $J(j)$. Wir haben dann

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j 1\!\!1_{A_j}=\sum_{k=1}^n\sum_{\ell\in J(j)}\alpha_j 1\!\!1_{C_\ell}=\sum_{\ell=1}^k 1\!\!1_{C_\ell}\sum_{j:\ell\in J(j)}\alpha_j\;.$$

Also ist

$$\begin{aligned}(1-\varepsilon)\mu\Big(\sum_{k=1}^n \alpha_k \mathbb{1}_{A_k} > 1-\varepsilon\Big) &= (1-\varepsilon)\mu\Big(\bigcup_{\ell:(\sum_{j:\ell\in J(j)}\alpha_j > 1-\varepsilon)} C_\ell\Big) \\ &= (1-\varepsilon)\sum_{\ell:(\sum_{j:\ell\in J(j)}\alpha_j > 1-\varepsilon)} \mu(C_\ell) \le \sum_{\ell:(\sum_{j:\ell\in J(j)}\alpha_j > 1-\varepsilon)} \sum_{j:\ell\in J(j)} \alpha_j \mu(C_\ell) \\ &= \sum_{\ell:(\sum_{j:\ell\in J(j)}\alpha_j > 1-\varepsilon)} \mu(C_\ell) \sum_{j:\ell\in J(j)} \alpha_j \le \sum_{\ell=1}^k \mu(C_\ell) \le \mu(B)\ ,\end{aligned}$$

wobei wir verwendet haben, dass $\sum_{j:\ell\in J(j)}\alpha_j \le 1$ und $\cup_{\ell=1}^k C_\ell = B$. Es gilt ebenfalls durch Vertauschen der Summen

$$\sum_{\ell:(\sum_{j:\ell\in J(j)}\alpha_j > 1-\varepsilon)} \sum_{j:\ell\in J(j)} \alpha_j \mu(C_\ell) = \sum_{j=1}^n \alpha_j \sum_{\ell\in J(j)} \mu(C_\ell) = \sum_{j=1}^n \alpha_j \mu(A_j)\ .$$

Weiter konvergiert $\mu(\{\sum_{k=1}^n \alpha_k \mathbb{1}_{A_k} \le 1-\varepsilon\} \cap B)$ nach 0. Lassen wir $n \to \infty$ folgt, dass

$$(1-\varepsilon)\mu(B) \le \sum_{k=1}^\infty \alpha_k \mu(A_k) \le \mu(B)\ .$$

Da dies für alle $\varepsilon > 0$ gelten muss, folgt die Aussage.

Sei nun f beliebig. Wir wählen $m \in \mathbb{N}$. Wir können annehmen, dass $\{B_k : k \le m\}$ disjunkt sind. Dann ist

$$\sum_{n=1}^\infty \alpha_n \mu(A_n) \ge \sum_{n=1}^\infty \sum_{\ell=1}^m \alpha_n \mu(A_n \cap B_\ell) = \sum_{\ell=1}^m \sum_{n=1}^\infty \alpha_n \mu(A_n \cap B_\ell) \ge \sum_{\ell=1}^m \beta_\ell \mu(B_\ell)\,,$$

Wir haben hier verwendet, dass $f\mathbb{1}_{B_\ell} = \beta_\ell \mathbb{1}_{B_\ell}$ und $f \ge \sum_{\ell=1}^m \beta_\ell \mathbb{1}_{B_\ell}$. Da m beliebig war, gilt $\sum_{n=1}^\infty \alpha_n \mu(A_n) \ge \sum_{\ell=1}^\infty \beta_\ell \mu(B_\ell)$. Vertauschen der Summen beweist die Behauptung. □

Wir können somit das Integral

$$\int f \,\mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^\infty \alpha_n \mu(A_n)$$

für positive f definieren. Ist mindestens eines der Integrale $\int f^+ \,\mathrm{d}\mu$ und $\int f^- \,\mathrm{d}\mu$ endlich, haben wir mit $\int f \,\mathrm{d}\mu = \int f^+ \,\mathrm{d}\mu - \int f^- \,\mathrm{d}\mu$ eine Definition des Integrals. Falls $\int |f| \,\mathrm{d}\mu < \infty$, so sagen wir, f ist **integrierbar**.

Das Integral hat folgende Eigenschaften.

Hilfssatz 1.27.

i) *Das Integral ist linear, d.h.* $\int(\alpha f+\beta g)\,\mathrm{d}\mu=\alpha\int f\,\mathrm{d}\mu+\beta\int g\,\mathrm{d}\mu$.

ii) *Das Integral ist monoton, d.h. falls* $f\le g$ *so ist* $\int f\,\mathrm{d}\mu\le\int g\,\mathrm{d}\mu$.

iii) *Ist* $f_1\le f_2\le\cdots$ *integrierbar und* $f=\lim_n f_n$, *so ist* $\int f\,\mathrm{d}\mu=\lim_n\int f_n\,\mathrm{d}\mu$. *Wir nennen dieses Resultat* **monotone Konvergenz**.

iv) *Sind* $f,f_1,f_2,\ldots$ *integrierbar und* $f\le f_i$ *für alle* i. *Dann ist* $\underline{\lim}_n f_n$ *integrierbar und* $\underline{\lim}_n\int f_n\,\mathrm{d}\mu\ge\int\underline{\lim}_n f_n\,\mathrm{d}\mu$. *Dieses Resultat heisst* **Lemma von Fatou**.

v) *Seien* $f,f_1,f_2,\ldots$ *integrierbar,* $|f_n|\le f$ *für alle* n *und* $\lim_n f_n=g$. *Dann ist* g *integrierbar und* $\int g\,\mathrm{d}\mu=\lim_n\int f_n\,\mathrm{d}\mu$. *Wir nennen dieses Resultat* **beschränkte Konvergenz**.

Beweis. i) Übung.
ii) Aus der Definition folgt, dass $\int(g-f)\,\mathrm{d}\mu\ge 0$. Die Aussage folgt damit aus der Linearität.
iii) Nehmen wir zuerst an, dass $\int f\,\mathrm{d}\mu<\infty$. Setzen wir $g_n=f-f_n$. Wir müssen dann zeigen, dass $\int g_n\,\mathrm{d}\mu$ gegen Null konvergiert. Es gibt dann Mengen $A_1,A_2,\ldots$ und Zahlen $\alpha_1,\alpha_2,\ldots$ verschieden von Null, so dass $g_1=\sum\alpha_i\mathbb{1}_{A_i}$. Sei $\varepsilon>0$. Es gibt n_0, so dass $\sum_{n=n_0+1}^\infty|\alpha_n|\mu(A_n)<\varepsilon$. Setzen wir $A=\cup_{n=1}^{n_0}A_n$. Dann ist $\cap_n(A\cap\{g_n\ge\varepsilon\})=\emptyset$. Also gilt $\lim_{n\to\infty}\mu(A\cap\{g_n\ge\varepsilon\})=0$. Insbesondere ist $\int g_n\mathbb{1}_A\,\mathrm{d}\mu\le 2\varepsilon\mu(A)$ für n gross genug. Das heisst,

$$\int g_n\,\mathrm{d}\mu\le\int g_n\mathbb{1}_A\,\mathrm{d}\mu+\varepsilon\le 2\varepsilon\mu(A)+\varepsilon$$

für n gross genug. Da ε beliebig war, gilt $\lim_n\int g_n\,\mathrm{d}\mu=0$.

Sei nun $\int f\,\mathrm{d}\mu=\infty$. Wir können $f_n\ge 0$ annehmen. Dann gibt es für jedes $a>0$ ein $n\in\mathbb{N}$ und Mengen $A_1,\ldots,A_n$ und strikt positive Zahlen $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$, so dass $f\mathbb{1}_A\ge\sum_{i=1}^n\alpha_i\mathbb{1}_{A_i}$ und $\sum_{i=1}^n\alpha_i\mu(A_i)\ge a$, wobei $A=\cup_{i=1}^nA_i$. Wir können annehmen, dass die A_i disjunkt sind. Wir haben nun $\lim_k\int f_k\mathbb{1}_{A_i}\,\mathrm{d}\mu=\int f\mathbb{1}_{A_i}\,\mathrm{d}\mu\ge\alpha_i\mu(A_i)$. Somit haben wir $\lim_k\int f_k\,\mathrm{d}\mu\ge a$. Also ist $\lim_k\int f_k\,\mathrm{d}\mu=\infty$.
iv) Wir haben

$$\int\underline{\lim_n}\, f_n\,\mathrm{d}\mu=\int\lim_{m\to\infty}\inf_{n\ge m}f_n\,\mathrm{d}\mu=\lim_{m\to\infty}\int\inf_{n\ge m}f_n\,\mathrm{d}\mu\;.$$

Da für $k \geq m$ gilt, dass $\int \inf_{n \geq m} f_n \, \mathrm{d}\mu \leq \int f_k \, \mathrm{d}\mu$, haben wir

$$\varliminf_k \int f_k \, \mathrm{d}\mu = \lim_m \inf_{k \geq m} \int f_k \, \mathrm{d}\mu \geq \lim_m \int \inf_{n \geq m} f_n \, \mathrm{d}\mu = \int \varliminf_n f_n \, \mathrm{d}\mu \; .$$

v) Wir haben aus dem Lemma von Fatou

$$\varliminf_n \int f_n \, \mathrm{d}\mu \geq \int g \, \mathrm{d}\mu$$

und

$$\varlimsup_n \int f_n \, \mathrm{d}\mu = -\varliminf_n \int -f_n \, \mathrm{d}\mu \leq -\int -g \, \mathrm{d}\mu = \int g \, \mathrm{d}\mu \; .$$

□

1.6. Produkträume

Oft hat man verschiedene (Zufalls-) Objekte, die man gleichzeitig betrachten will. Man muss dann einen Wahrscheinlichkeitsraum konstruieren, auf dem diese Objekte alle gleichzeitig definiert sind. Sei I eine Indexmenge und für jedes $i \in I$ sei $(\Omega_i, \mathcal{F}_i)$ ein messbarer Raum. Wir definieren dann

$$\Omega = \prod_{i \in I} \Omega_i := \{\omega : I \to \cup_I \Omega_i, \omega(i) \in \Omega_i\} \; .$$

Dieser Raum heisst **Produktraum** der $\{\Omega_i : i \in I\}$. Sind alle $\Omega_i = \Omega_0$, dann können wir $\Omega = \Omega_0^I$ schreiben. Statt $\omega(i)$ schreiben wir oft ω_i.

Wir müssen nun eine σ-Algebra auf Ω definieren. Bezeichnen wir mit $\pi_i : \Omega \to \Omega_i, \omega \mapsto \omega(i)$ die Koordinatenabbildung. Sei $\mathcal{F}$ die kleinste σ-Algebra für die die Koordinatenabbildungen messbar sind. Das heisst, $\mathcal{F}$ wird durch die Mengen $\{\pi_i^{-1}(A) : i \in I, A \in \mathcal{F}_i\}$ erzeugt. $\mathcal{F}$ heisst dann **Produkt-σ-Algebra**, und wir schreiben $\mathcal{F} = \otimes_{i \in I} \mathcal{F}_i$.

Bemerkung. Sei I abzählbar und (Ω_i, d_i) polnische Räume (separable vollständige metrische Räume) versehen mit der Borel-σ-Algebra $\mathcal{F}_i$. Dann ist $\mathcal{F}$ die Borel-σ-Algebra auf dem Produktraum. ■

Hilfssatz 1.28. *Sei $\mathcal{B}_i \subset \mathcal{F}_i$ so dass $\sigma(\mathcal{B}_i) = \mathcal{F}_i$. Dann ist*

$$\bigotimes_{i\in I} \mathcal{F}_i = \sigma\Big(\Big\{\cap_{i\in J}\pi_i^{-1}(A_i) : J \subset I \text{ endlich, } A_i \in \mathcal{B}_i\Big\}\Big) .$$

Beweis. Da $\pi^{-1}(A_i) \in \mathcal{F}$, müssen die oben beschriebenen Mengen in $\mathcal{F}$ sein. Da $\sigma(\{\pi_i^{-1}(A) : A \in \mathcal{B}_i\})$ die kleinste σ-Algebra ist, für die π_i messbar ist und diese Kollektion in der oben definierten enthalten ist, ist die Abbildung π_i messbar. Also muss die oben beschriebene σ-Algebra die kleinste σ-Algebra sein, für die alle π_i messbar sind. □

Korollar 1.29. *Sei $(\Omega', \mathcal{F}')$ ein messbarer Raum und $(\Omega, \mathcal{F}) = (\prod_{i\in I}\Omega_i, \otimes_{i\in I}\mathcal{F}_i)$ ein Produktraum. Eine Abbildung $f : \Omega' \to \Omega$ ist genau dann messbar, falls für alle i die Abbildungen $\pi_i \circ f$ messbar sind.*

Beweis. Ist f messbar, dann müssen auch $\pi_i \circ f$ messbar sein. Nehmen wir nun an, dass alle $\pi_i \circ f$ messbar sind. Da $\{f^{-1}(A) : A \in \mathcal{F}\}$ eine σ-Algebra ist, müssen wir nur zeigen, dass $f^{-1}(A) \in \mathcal{F}'$ für alle erzeugenden Mengen A. Sei $A \in \mathcal{F}_i$. Dann ist $f^{-1}(\pi_i^{-1}(A)) = (\pi_i \circ f)^{-1}(A) \in \mathcal{F}'$. Somit enthält $\mathcal{F}'$ die Urbilder aller erzeugenden Mengen und daher ist f messbar. □

Hilfssatz 1.30. *Sei $\Omega = \Omega' \times \Omega''$ und $\mathcal{F} = \mathcal{F}' \otimes \mathcal{F}''$ und $f : \Omega \to \mathbb{R}$ messbar. Sei $A \in \mathcal{F}$. Dann sind*

$$A_{\omega'} = \{\omega'' : (\omega', \omega'') \in A\} \in \mathcal{F}'' , \qquad A_{\omega''} = \{\omega' : (\omega', \omega'') \in A\} \in \mathcal{F}' .$$

Die Abbildungen

$$f_{\omega'} : \Omega'' \to \mathbb{R},\ \omega'' \mapsto f(\omega', \omega'') , \qquad f_{\omega''} : \Omega' \to \mathbb{R},\ \omega' \mapsto f(\omega', \omega'')$$

sind messbar.

Beweis. Sei $i : \Omega'' \to \Omega,\ \omega'' \to (\omega', \omega'')$. Die Abbildung $\pi' \circ i$ ist konstant und daher messbar. Die Abbildung $\pi'' \circ i$ ist die Identität und daher ebenfalls messbar. Also ist i messbar. Insbesondere ist $A_{\omega'} = i^{-1}(A) \in \mathcal{F}''$ und $f_{\omega'} = f \circ i$ messbar. □

Wir betrachten nun Massräume. Für endliche Produkte können wir dann ein **Produktmass** konstruieren.

Satz 1.31. *Seien $n \in \mathbb{N}$ und $\{(\Omega_i, \mathcal{F}_i, \mu_i)\}$ σ-endliche Massräume und $\Omega = \prod_{i=1}^n \Omega_i$ und $\mathcal{F} = \otimes_{i=1}^n \mathcal{F}_i$. Es gibt ein eindeutiges σ-endliches Mass μ auf $(\Omega, \mathcal{F})$, so dass*

$$\mu(A_1 \times \cdots \times A_n) = \prod_{i=1}^n \mu_i(A_i)$$

für alle $A_i \in \mathcal{F}_i$.

Beweis. Die Mengen $\mathcal{A}$ der Form $A_1 \times \cdots \times A_n$ erzeugen $\mathcal{F}$. Wir haben $\Omega \in \mathcal{A}$. Da

$$(A_1 \times \cdots \times A_n) \bigcap (B_1 \times \cdots \times B_n) = (A_1 \cap B_1) \times \cdots \times (A_n \cap B_n) \;,$$

haben wir dass $\mathcal{A}$ durchschnittsabgeschlossen ist. Wählen wir nun $\Omega_{i,m}$, so dass $\mu_i(\Omega_{i,m}) < \infty$ und $\cup_m \Omega_{i,m} = \Omega_i$. Wir können annehmen, dass $\Omega_{i,m} \subset \Omega_{i,m+1}$. Dann ist

$$\Omega = \cup_m (\Omega_{1,m} \times \cdots \times \Omega_{n,m}) \;,$$

und $\mu(\Omega_{1,m} \times \cdots \times \Omega_{n,m}) < \infty$. Aus dem Beweis von Satz 1.10 folgt nun die Eindeutigkeit des Masses.

Um die Existenz des Masses zu zeigen, benützen wir Induktion. Wir beginnen mit $n = 2$. Wir zeigen die restlichen Voraussetzungen des Satzes 1.10. Es gilt

$$(B_1 \times B_2) \setminus (A_1 \times A_2) = ((B_1 \setminus A_1) \times B_2) \cup ((B_1 \cap A_1) \times (B_2 \setminus A_2)) \;.$$

Also ist $(B_1 \times B_2) \setminus (A_1 \times A_2)$ eine endliche disjunkte Vereinigung aus $\mathcal{A}$. Es ist klar, dass $\mu(\emptyset) = 0$. Seien nun $(A_1 \times A_2) \cup (B_1 \times B_2) = C_1 \times C_2$ und $(A_1 \times A_2) \cap (B_1 \times B_2) = \emptyset$. Also muss $A_1 \cap B_1 = \emptyset$ oder $A_2 \cap B_2 = \emptyset$ gelten. Wir können annehmen, dass $A_2 \cap B_2 = \emptyset$. Wir schliessen, dass $A_1 = B_1$. Also haben wir

$$\begin{aligned}\mu(A_1 \times (A_2 \cup B_2)) &= \mu_1(A_1)\mu_2(A_2 \cup B_2) = \mu_1(A_1)(\mu_2(A_2) + \mu_2(B_2)) \\ &= \mu_1(A_1)\mu_2(A_2) + \mu_1(A_1)\mu_2(B_2) = \mu(A_1 \times A_2) + \mu(A_1 \times B_2) \;.\end{aligned}$$

Seien nun $(A \times B) \subset \cup_i (A_i \times B_i)$. Wir definieren die Funktion $f(\omega_1) = \mu_2(B)\mathbb{1}_{\omega_1 \in A} = \mu_2((A \times B)_{\omega_1})$. Als Elementarfunktion ist sie messbar. Analog definieren wir $f^k(\omega_1) = \mu_2((A_k \times B_k)_{\omega_1})$. Wir erhalten dann

$$\mu(A \times B) = \int f \, \mathrm{d}\mu_1 \leq \int \sum_k f^k \, \mathrm{d}\mu_1 = \sum_k \mu(A_k \times B_k) \;.$$

Somit existiert das Mass für $n = 2$.

Sei μ^n das Mass auf $\Omega^n = \prod_{i=1}^n \Omega_i$. Sei μ^{n+1} das soeben konstruierte Mass auf $\Omega^n \times \Omega_{n+1}$. Aus

$$\mu^{n+1}(A_1 \times \cdots \times A_n \times A_{n+1}) = \mu^n(A_1 \times \cdots \times A_n)\mu_{n+1}(A_{n+1}) = \prod_{i=1}^{n+1} \mu_i(A_i)$$

folgt, dass das Mass μ^{n+1} die geforderte Eigenschaft hat. □

Beispiel 1.32. Seien $\Omega_i = [0,1]$, $\mathcal{F}_1$ die Borel-σ-Algebra und $\mathcal{F}_2 = 2^{[0,1]}$, μ_1 das Lebesguemass und μ_2 das Zählmass. Wir bemerken, dass $(\Omega_2, \mathcal{F}_2, \mu_2)$ nicht σ-endlich ist. Dann erhalten wir

$$\mu(A_1 \times A_2) = \mu_1(A_1)\mu_2(A_2)\ .$$

Wir können somit das Mass definieren als

$$\mu(A) = \int_0^1 \mu_2(A_{\omega_1})\,\mathrm{d}\omega_1\ ,$$

oder

$$\tilde{\mu}(A) = \sum_{\omega_2 \in [0,1]} \mu_1(A_{\omega_2})\ .$$

Betrachten wir die Diagonale $A = \{(x,x) : x \in [0,1]\}$, so erhalten wir $\mu(A) = 1$ und $\tilde{\mu}(A) = 0$. Somit ist die Fortsetzung des Masses nicht eindeutig. ■

Satz 1.33. (Fubini) *Seien $(\Omega_i, \mathcal{F}_i, \mu_i)$ σ-endliche Massräume und $f : \Omega_1 \times \Omega_2 \to \mathbb{R}$ messbar. Wir bezeichnen mit $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ den Produktmassraum. Ist $f \geq 0$ oder $\int |f|\,\mathrm{d}\mu < \infty$, dann ist die Abbildung*

$$\Omega_1 \to \mathbb{R} \cup \{\infty\},\ \omega_1 \mapsto \int_{\Omega_2} f(\omega_1, \omega_2)\,\mathrm{d}\mu_2(\omega_2)$$

messbar und

$$\int_\Omega f\,\mathrm{d}\mu = \int_{\Omega_1}\int_{\Omega_2} f(\omega_1,\omega_2)\,\mathrm{d}\mu_2(\omega_2)\,\mathrm{d}\mu_1(\omega_1) = \int_{\Omega_2}\int_{\Omega_1} f(\omega_1,\omega_2)\,\mathrm{d}\mu_1(\omega_1)\,\mathrm{d}\mu_2(\omega_2)\ .$$

Beweis. Nehmen wir zuerst an, dass die Masse endlich sind. Sei $\mathcal{H}$ der Raum der beschränkten Funktionen $f : \Omega \to \mathbb{R}$, für die die Aussage gilt. Weiter seien $\mathcal{B}$ die Mengen der Form $A \times B$. Der Raum $\mathcal{H}$ ist dann linear. Wir haben

$$\int_{\Omega_2} \mathbb{1}_{A\times B}\,\mathrm{d}\mu_2 = \mathbb{1}_A \mu_2(B)$$

ist messbar und

$$\int \mathbb{1}_{A\times B} \,\mathrm{d}\mu = \mu_1(A)\mu_2(B) = \int_{\Omega_1} \mathbb{1}_A \mu_2(B) \,\mathrm{d}\mu_1(\omega_1) = \int_{\Omega_1}\int_{\Omega_2} \mathbb{1}_{A\times B} \,\mathrm{d}\mu_2(\omega_2)\,\mathrm{d}\mu_1(\omega_1) \;.$$

Analog gilt $\int \mathbb{1}_{A\times B}\,\mathrm{d}\mu = \int_{\Omega_2}\int_{\Omega_1} \mathbb{1}_{A\times B}\,\mathrm{d}\mu_1(\omega_1)\,\mathrm{d}\mu_2(\omega_2)$. Also ist $\mathbb{1}_{A\times B} \in \mathcal{H}$.

Sei nun $f_1 \le f_2 \le \cdots \le c$ eine Folge aus $\mathcal{H}$ und $f = \lim_n f_n$. Wir haben, dass

$$\int_{\Omega_2} f(\omega_1,\omega_2)\,\mathrm{d}\mu_2(\omega_2) = \lim_{n\to\infty}\int_{\Omega_2} f_n(\omega_1,\omega_2)\,\mathrm{d}\mu_2(\omega_2) = \sup_n \int_{\Omega_2} f_n(\omega_1,\omega_2)\,\mathrm{d}\mu_2(\omega_2)$$

messbar ist. Weiter gilt

$$\begin{aligned}\int_\Omega f\,\mathrm{d}\mu = \lim_n \int_\Omega f_n\,\mathrm{d}\mu &= \lim_n \int_{\Omega_1}\int_{\Omega_2} f_n(\omega_1,\omega_2)\,\mathrm{d}\mu_2(\omega_2)\,\mathrm{d}\mu_1(\omega_1)\\ &= \int_{\Omega_1} \lim_n \int_{\Omega_2} f_n(\omega_1,\omega_2)\,\mathrm{d}\mu_2(\omega_2)\,\mathrm{d}\mu_1(\omega_1)\\ &= \int_{\Omega_1}\int_{\Omega_2} f(\omega_1,\omega_2)\,\mathrm{d}\mu_2(\omega_2)\,\mathrm{d}\mu_1(\omega_1) \;,\end{aligned}$$

und analog

$$\int_\Omega f\,\mathrm{d}\mu = \int_{\Omega_2}\int_{\Omega_1} f(\omega_1,\omega_2)\,\mathrm{d}\mu_1(\omega_1)\,\mathrm{d}\mu_2(\omega_2) \;.$$

Also ist $f \in \mathcal{H}$. Das heisst, die Aussage gilt für alle messbaren beschränkten f.

Sei nun f unbeschränkt. Ist $f \ge 0$, dann folgt aus dem oben bewiesenen, dass die Aussage für $f = \lim_n f \wedge n$ gilt. Ist f integrierbar, dann folgt die Aussage für $f = f^+ - f^-$ aus der Linearität.

Seien nun Ω_i beliebig. Sei nun $\Omega_{i,n}$ Mengen mit endlichem Mass, aufsteigend in n, so dass $\cup_{n\in\mathbb{N}}\Omega_{i,n} = \Omega_i$. Dann gilt die Aussage für $f\mathbb{1}_{\Omega_{1,n}\times\Omega_{2,n}}$. Ist f positiv, folgt die Aussage aus der monotonen Konvergenz. Ist f integrierbar, folgt die Aussage aus der Linearität. □

Beispiel 1.34. Setzen wir $\Omega_i = \mathbb{R}$, $\mathcal{F}_i$ die Borel-σ-Algebra und μ_i das Lebesguemass. Als Funktion wählen wir $f(x,y) = \mathbb{1}_{|xy|<1}\operatorname{sign}(xy)$. Es folgt nun

$$\int_{\mathbb{R}^2} |f(x,y)|\,\mathrm{d}(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-1/|x|}^{1/|x|} |f(x,y)|\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2}{|x|}\,\mathrm{d}x = \infty \;,$$

und somit ist f nicht integrierbar. Aber

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-1/|x|}^{1/|x|} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} 0\,\mathrm{d}x = 0 \;.$$

■

Wir wollen nun auch Produkträume für unendliche Familien von Massräumen konstruieren.

Definition 1.35. *Sei I eine Indexmenge und $(\Omega_i, \mathcal{F}_i)$ seien messbare Räume und $\Omega = \prod_{i\in I} \Omega_i$, $\mathcal{F} = \otimes_{i\in I}\mathcal{F}_i$. Eine Famile $\{\mu_J : J \subset I$ endlich$\}$ von Wahrscheinlichkeitsmassen auf $\Omega_J = \prod_{j\in J}\Omega_j$ heisst* **projektive Familie**, *falls für $K \subset J \subset I$, J endlich gilt, dass $\mu_K = \mu_J \circ {\pi^J_K}^{-1}$, wobei $\pi^J_K : \Omega_J \to \Omega_K$ die Projektionsabbildung bezeichnet.*

Zuerst benötigen wir folgendes Resultat.

Hilfssatz 1.36. *Sei Ω ein polnischer Raum mit der Borel-σ-Algebra $\mathcal{F}$ und μ ein Wahrscheinlichkeitsmass auf $(\Omega, \mathcal{F})$. Sei E eine messbare Menge und $\varepsilon > 0$. Dann gibt es eine kompakte Menge $K \subset E$, so dass $\mu(E \setminus K) < \varepsilon$.*

Beweis. Wir bezeichnen mit $B_r(x) = \{y : d(x, y) < r\}$ die Kugel um x mit Radius r. Dann gibt es eine abzählbare Menge von Punkten x^n_i, so dass $\Omega = \cup_i B_{1/n}(x^n_i)$. Somit existiert eine Zahl N_n, so dass $\mu([\cup_{i=1}^{N_n} B_{1/n}(x^n_i)]^c) < \varepsilon 2^{-n-1}$. Wir setzen nun

$$A = \bigcap_n \bigcup_{i=1}^{N_n} B_{1/n}(x^n_i)$$

und $\tilde K = \bar A$. Insbesondere ist $\tilde K$ kompakt. Wir erhalten

$$\mu(\tilde K^c) \le \mu(A^c) = \mu(\cup_n [\cup_{i=1}^{N_n} B_{1/n}(x^n_i)]^c) < \sum_n \varepsilon 2^{-n-1} = \tfrac12 \varepsilon\ .$$

Setzen wir nun $\tilde E = (E \cap \tilde K)^c$ und bezeichnen mit $\mathcal{A}$ die offenen Mengen von Ω. Dann ist $\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{A})$. Aus dem Beweis des Satzes 1.10 folgt, dass $\mu(\tilde E) = \inf\{\mu(B) : \tilde E \subset B \in \mathcal{A}\}$, da $\mathcal{U}(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$. Insbesondere gibt es eine offene Menge $B \supset \tilde E$, so dass $\mu(B) < \mu(\tilde E) + \frac12\varepsilon$. Setzen wir nun $K = \tilde K \setminus B$, ist K kompakt und $K \subset \tilde K \cap E \subset E$. Wir haben $E \setminus K = (B \setminus \tilde E) \cup (E \setminus \tilde K)$ und $(B \setminus \tilde E) \cap (E \setminus \tilde K) = \emptyset$. Daher gilt

$$\mu(E \setminus K) = \mu(B \setminus \tilde E) + \mu(E \setminus \tilde K) \le \tfrac12\varepsilon + \mu(\tilde K^c) < \tfrac12\varepsilon + \tfrac12\varepsilon = \varepsilon\ .$$

□

Satz 1.37. (Kolmogorovs Erweiterungssatz) *Seien $I = \mathbb{N}$, $(\Omega_i, \mathcal{F}_i)$ für $i \in I$ polnische Räume und $\{\mu_J : J \subset I$ endlich$\}$ eine projektive Familie von Wahrscheinlichkeitsmassen. Dann existiert ein eindeutiges Mass μ, so dass $\mu_J = \mu \circ \pi_J^{-1}$.*

Beweis. Sei $\mathcal{A}$ die Klasse der Mengen $\prod_{j\in J} A_j \times \prod_{j\notin J}\Omega_j$, wobei $J \subset I$ endlich ist und $A_j \in \mathcal{F}_j$. Dann wird $\mathcal{F}$ von $\mathcal{A}$ erzeugt. Weiter ist $\Omega \in \mathcal{A}$. Es ist klar, dass $\mathcal{A}$

durchschnittsabgeschlossen ist und dass $A\backslash B$ sich als endliche disjunkte Vereinigung von Mengen aus $\mathcal{A}$ schreiben lässt. Wir haben $\mu_J(\Omega) = 1$ und $\mu_J(\emptyset) = 0$. Seien nun $A, B \in \mathcal{A}$ mit $A \cup B \in \mathcal{A}$ und $A \cap B = \emptyset$. Dann gibt es J, so dass $A_i = B_i = \Omega_i$ für $i \notin J$. Also haben wir $\mu_J(A \cup B) = \mu_J(A) + \mu_J(B)$. Seien nun $A, A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$, so dass $A \subset \cup_i A_i$. Da $A \cap A_i \in \mathcal{A}$, können wir $A = \cup_i A_i$ anehmen. Wir müssen nun zeigen, dass $\mu(A) \le \sum_i \mu(A_i)$. Wir erweitern das Mass auf endliche disjunkte Vereinigungen von Mengen aus $\mathcal{A}$. Dann müssen wir zeigen, dass

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A \setminus (\cup_{i=1}^n A_i)) = 0 \;.$$

Nehmen wir an, dass

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A \setminus (\cup_{i=1}^n A_i)) = 2\alpha$$

für ein $\alpha > 0$. Wir wissen, dass $A\backslash(\cup_{i=1}^n A_i)$ sich als endliche Vereinigung von Mengen aus $\mathcal{A}$ schreiben lässt. Also gibt es Mengen $A_n^k \in \mathcal{A}$, so dass $A \setminus (\cup_{i=1}^n A_i) = \cup_{k=1}^{N_n} A_n^k$ und $A_n^k \cap A_n^\ell = \emptyset$ für $k \ne \ell$. Setzen wir $B_n^{k,j} = \pi_j(A_n^k)$. Wir können nun

$$A \setminus (\cup_{i=1}^n A_i) = \bigcup_{k=1}^{N_n} \bigcap_{j=1}^{J_n} \pi_j^{-1}(B_n^{k,j})$$

schreiben, wobei J_n die Indexmenge für $\cup_{i=1}^n A_i$ bezeichnet. Nach Hilfssatz 1.36 gibt es eine kompakte Menge $K_n^{kj} \subset B_n^{k,j}$, so dass

$$\mu_j(B_n^{k,j} \setminus K_n^{kj}) < \frac{\alpha}{|J_n|} 2^{-n-k} \;.$$

Setzen wir $K_n^k = \cap_{j=1}^{J_n} \pi_j^{-1}(K_n^{kj})$, so haben wir

$$\mu(A_n^k \setminus K_n^k) \le \sum_{j\in J_n} \mu_j(B_n^{k,j} \setminus K_n^{kj}) < \alpha 2^{-n-k} \;.$$

Setzen wir weiter $K_n = \cup_{k=1}^{N_n} K_n^k$, dann ist $K_n \subset A \setminus (\cup_{i=1}^n A_i)$ und

$$\mu((A \setminus \cup_{i=1}^n A_i) \setminus K_n) = \sum_{k=1}^{N_n} \mu(A_n^k \setminus K_n^k) < \alpha 2^{-n} \;.$$

Insbesondere haben wir für $N \in \mathbb{N}$,

$$\mu(\cap_{n=1}^N K_n) = \mu(A \setminus \cup_{i=1}^N A_i) - \sum_{n=1}^N \mu((A \setminus \cup_{i=1}^n A_i) \setminus K_n) > 2\alpha - \alpha = \alpha \;.$$

Also ist $\cap_{n=1}^N K_n \ne \emptyset$. Wir wählen nun einen Punkt $x_N \in \cap_{n=1}^N K_n$. Wir können annehmen, dass $\pi_i(K_i)$ kompakt ist (Umnummerierung). Da $\pi_1(x_N) \in \pi_1(K_1)$ für

N gross genug, können wir eine Teilfolge wählen, so dass $\pi_1(x_N)$ in $\pi_1(K_1)$ für $N \to \infty$ konvergiert. Aus dieser Teilfolge können wir eine konvergente Folge in $\pi_2(K_2)$ wählen. Auf diese Weise fahren wir fort und wählen dann die Diagonalfolge $\tilde{x}_N$. Dann konvergiert $\pi_n(\tilde{x}_N)$ für alle n. Also ist $\cap_{n=1}^{\infty} K_n \neq \emptyset$. Das ist ein Widerspruch und es folgt, dass $\alpha = 0$. Somit sind die Voraussetzungen von Satz 1.10 erfüllt und es gibt ein eindeutiges Mass, das die Masse μ_J fortsetzt. $\square$

1.7. Stochastische Kerne

Seien $(\Omega_i, \mathcal{F}_i)$, $i = 1, 2$, messbare Räume und $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$, $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2$ der Produktraum.

Definition 1.38. *Eine Abbildung* $K : \Omega_1 \times \mathcal{F}_2 \to [0, 1]$ *heisst* **stochastischer Kern** *oder* **Übergangswahrscheinlichkeit**, *falls*

i) $K(s_1, \cdot)$ *ist eine Wahrscheinlichkeitsverteilung auf* $(\Omega_2, \mathcal{F}_2)$ *für jedes* $s_1 \in \Omega_1$.

ii) $K(\cdot, A_2)$ *ist messbar auf* $(\Omega_1, \mathcal{F}_1)$ *für jedes* $A_2 \in \mathcal{F}_2$.

Satz 1.39. *Sei* $\mathbb{P}_1$ *eine Wahrscheinlichkeitsverteilung auf* $(\Omega_1, \mathcal{F}_1)$ *und* $K : \Omega_1 \times \mathcal{F}_2 \to [0, 1]$ *ein stochastischer Kern. Dann gibt es genau eine Wahrscheinlichkeitsverteilung* $\mathbb{P}$ *auf* $(\Omega, \mathcal{F})$ *mit*

$$\mathbb{P}[A_1 \times A_2] = \int_{A_1} K(s_1, A_2)\mathbb{P}_1[\mathrm{d}s_1] \; .$$

Weiter gilt für jede messbare Funktion f

$$\int f \;\mathrm{d}\mathbb{P} = \iint f(s_1, s_2)K(s_1, \;\mathrm{d}s_2)\mathbb{P}_1[\mathrm{d}s_1] \; .$$

Beweis. Wir wollen zeigen, dass die Voraussetzungen von Satz 1.10 erfüllt sind. Sei $\mathcal{A} = \{A_1 \times A_2 : A_1 \in \mathcal{F}_1, A_2 \in \mathcal{F}_2\}$. Ist $A = A_1 \times A_2 \in \mathcal{A}$, $B = B_1 \times B_2 \in \mathcal{A}$, mit $A \cap B = \emptyset$ und $A \cup B \in \mathcal{A}$, dann ist $A_1 = B_1$ oder $A_2 = B_2$. Ist $A_1 = B_1$ und $A_2 \cap B_2 = \emptyset$, dann haben wir

$$\int_{A_1} K(s_1, A_2 \cup B_2)\mathbb{P}_1[\mathrm{d}s_1] = \int_{A_1} K(s_1, A_2)\mathbb{P}_1[\mathrm{d}s_1] + \int_{A_1} K(s_1, B_2)\mathbb{P}_1[\mathrm{d}s_1] \; .$$

Ist $A_2 = B_2$ und $A_1 \cap B_1 = \emptyset$, dann haben wir

$$\int_{A_1 \cup B_1} K(s_1, A_2) \mathbb{P}_1[\mathrm{d}s_1] = \int_{A_1} K(s_1, A_2) \mathbb{P}_1[\mathrm{d}s_1] + \int_{B_1} K(s_1, A_2) \mathbb{P}_1[\mathrm{d}s_1] \;.$$

Sind $A \times B \in \mathcal{A}$, $A_i \times B_i \in \mathcal{A}$, so dass $A \times B \subset \cup_{i=1}^\infty A_i \times B_i$, so haben wir

$$\begin{aligned} \iint \mathbb{I}_{A \times B} K(s_1, \mathrm{d}s_2) \mathbb{P}_1[\mathrm{d}s_1] &\le \iint \sum_{i=1}^\infty \mathbb{I}_{A_i \times B_i} K(s_1, \mathrm{d}s_2) \mathbb{P}_1[\mathrm{d}s_1] \\ &= \sum_{i=1}^\infty \iint \mathbb{I}_{A_i \times B_i} K(s_1, \mathrm{d}s_2) \mathbb{P}_1[\mathrm{d}s_1] \;. \end{aligned}$$

Somit sind die Voraussetzungen von Satz 1.10 erfüllt und es gibt ein eindeutiges Mass. Der letzte Teil des Satzes folgt aus Satz 1.21 und den Eigenschaften des Integrals. □

1.8. Zerlegungssätze

Definition 1.40. *Seien μ und ν zwei Masse auf $(\Omega, \mathcal{F})$. Wir sagen*

i) *ν ist **absolutstetig** bezüglich μ (kurz $\nu \ll \mu$), falls $A \in \mathcal{F}$, $\mu(A) = 0 \Longrightarrow \nu(A) = 0$.*

ii) *ν und μ heissen **äquivalent**, falls $\nu \ll \mu$ und $\mu \ll \nu$.*

iii) *ν und μ sind **singulär** (kurz $\nu \perp \mu$), falls es eine Menge $A \in \mathcal{F}$ gibt, mit $\nu(A) = \mu(A^c) = 0$.*

iv) *ν hat eine Dichte f bezüglich μ, falls f messbar ist und $\nu(A) = \int f \mathbb{I}_A \,\mathrm{d}\mu$. Wir schreiben $f = \mathrm{d}\nu / \mathrm{d}\mu$.*

Hat ν eine Dichte bezüglich μ, dann ist offenbar $\nu \ll \mu$.

Hilfssatz 1.41. *Sei ν σ-endlich. Sind f_1 und f_2 Dichten von ν bezüglich μ, dann ist $\mu(f_1 \neq f_2) = 0$.*

Beweis. Sei $\Omega_n \in \mathcal{F}$ wachsend mit $\cup_n \Omega_n = \Omega$, so dass $\nu(\Omega_n) < \infty$. Sei $A_n = \Omega_n \cap \{f_1 > f_2\}$. Dann gilt

$$\int (f_1 - f_2) \mathbb{I}_{A_n} \,\mathrm{d}\mu = \nu(A_n) - \nu(A_n) = 0 \;.$$

Da $(f_1 - f_2) > 0$ auf A_n, folgt $\mu(A_n) = 0$. Lassen wir $n \to \infty$, haben wir $\mu(f_1 > f_2) = 0$. Vertauschen der Rollen von f_1 und f_2 beweist die Aussage. □

Zum Beweis des nächsten Resulates benötigen wir

Hilfssatz 1.42. *Seien μ und ν zwei endliche Masse auf $(\Omega, \mathcal{F})$. Dann gibt es Mengen $\Omega' \in \mathcal{F}$ und $\Omega'' = \Omega'^c$, so dass $\mu(A) \geq \nu(A)$ für alle $\mathcal{F} \ni A \subset \Omega'$ und $\mu(A) \leq \nu(A)$ für alle $\mathcal{F} \ni A \subset \Omega''$.*

Beweis. Sei $\alpha = \sup_{A \in \mathcal{F}} \mu(A) - \nu(A)$. Dann gibt es Mengen A_n, so dass $\mu(A_n) + n^{-1} > \nu(A_n) + \alpha$. Wir setzen $A = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$. Setzen wir $A_n^1 = A_n$ und $A_n^0 = A \setminus A_n$, dann ist

$$\mathcal{Z}_n := \{\cap_{k=1}^{n} A_k^{s_i} : s_i \in \{0,1\}\}$$

eine endliche disjunkte Zerlegung von A_n, so dass auch die Mengen A_k $(k \leq n)$ durch Mengen aus $\mathcal{Z}_n$ zerlegt werden können. Wir setzen nun

$$\mathcal{Z}'_n = \{B \in \mathcal{Z}_n : \mu(B) \geq \nu(B)\}$$

und $E_n = \cup_{B \in \mathcal{Z}'_n} B$. Wir haben offensichtlich $\mu(E_n) + n^{-1} > \nu(E_n) + \alpha$. Aus der Konstruktion werden die Zerlegungen feiner. Wir können daher annehmen, dass $\{E_n\}$ eine fallende Folge ist (betrachte $\cup_{m \geq n} E_m$). Wir setzen nun $\Omega' = \cap E_n$. Dann gilt wegen der monotonen Konvergenz

$$\mu(\Omega') = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n) + n^{-1} \geq \lim_{n\to\infty} \nu(E_n) + \alpha = \nu(\Omega') + \alpha\ .$$

Sei nun $\mathcal{F} \ni B \subset \Omega'$. Wäre $\mu(B) < \nu(B)$, so wäre

$$\mu(\Omega' \setminus B) = \mu(\Omega') - \mu(B) > \nu(\Omega') + \alpha - \nu(B) = \nu(\Omega' \setminus B) + \alpha\ ,$$

was ein Widerspruch wäre. Sei $\mathcal{F} \ni B \subset \Omega''$. Wäre $\mu(B) > \nu(B)$, so hätten wir

$$\mu(\Omega' \cup B) = \mu(\Omega') + \mu(B) > \nu(\Omega') + \alpha + \nu(B) = \nu(\Omega' \cup B) + \alpha\ ,$$

was auch ein Widerspruch wäre. □

Satz 1.43. (Zerlegungssatz von Lebesgue) *Seien μ und ν σ-endliche Masse auf $(\Omega, \mathcal{F})$. Dann lässt sich ν eindeutig zerlegen in*

$$\nu = \nu_a + \nu_s\ , \qquad \nu_a \ll \mu\ ,\ \nu_s \perp \mu\ .$$

ν_a hat eine Dichte bezüglich μ und $\mu(\mathrm{d}\nu_a/\mathrm{d}\mu = \infty) = 0$.

Beweis. Es gibt eine wachsende Folge $\{\Omega_n\}$ von Mengen die gegen Ω konvergiert, so dass $\mu(\Omega_n) < \infty$ und $\nu(\Omega_n) < \infty$. Zeigen wir zuerst die Eindeutigkeit. Sei $\nu = \nu_a + \nu_s = \nu'_a + \nu'_s$ und $A, A' \in \mathcal{F}$ mit $\mu(A) = \nu_s(A^c) = \mu(A') = \nu'_s(A'^c) = 0$. Nach Hilfssatz 1.42 gibt es Mengen $\Omega' \subset \Omega_n$ und $\Omega'' = \Omega_n \setminus \Omega'$, so dass $\nu_s(B) \ge \nu'_s(B)$ für alle $\mathcal{F} \ni B \subset \Omega'$ und $\nu_s(B) \le \nu'_s(B)$ für alle $\mathcal{F} \ni B \subset \Omega''$. Wir können annehmen, dass $\Omega' \subset A' \cup A$. Dann ist $\mu(\Omega') = 0$ und damit auch $\nu_a(\Omega') = \nu'_a(\Omega') = 0$. Sei $\mathcal{F} \ni B \subset \Omega_n$. Dann erhalten wir

$$\begin{aligned}\nu_a(B) - \nu'_a(B) &= \nu_a(B \cap \Omega'') - \nu'_a(B \cap \Omega'')\\ &= \nu(B \cap \Omega'') - \nu_s(B \cap \Omega'') - \nu(B \cap \Omega'') + \nu'_s(B \cap \Omega'')\\ &= \nu'_s(B \cap \Omega'') - \nu_s(B \cap \Omega'') \ge 0\ .\end{aligned}$$

Also ist $\nu_a(B) \ge \nu'_a(B)$. Aus Symmetriegründen ist auch $\nu'_a(B) \ge \nu_a(B)$. Für ein beliebiges $B \in \mathcal{F}$ gilt

$$\nu_a(B) = \lim_{n\to\infty} \nu_a(B \cap \Omega_n) = \lim_{n\to\infty} \nu'_a(B \cap \Omega_n) = \nu'_a(B)\ .$$

Also ist $\nu_a = \nu'_a$ und damit ist die Zerlegung eindeutig.

Wir zeigen nun die Existenz. Nehmen wir zuerst an, dass μ und ν endlich sind. Wir betrachten die Menge der Funktionen

$$\mathcal{H} = \left\{g : \Omega \to [0,\infty] : g \text{ messbar},\ \int_A g \,\mathrm{d}\mu \le \nu(A),\ \forall A \in \mathcal{F}\right\}.$$

Sei $\gamma = \sup_{g\in\mathcal{H}} \int g \,\mathrm{d}\mu$. Es ist klar, dass $0 \in \mathcal{H}$. Sind $f, g \in \mathcal{H}$, so gilt für $B = \{f \ge g\}$

$$\int_A f \vee g \,\mathrm{d}\mu = \int_{A\cap B} f \,\mathrm{d}\mu + \int_{A\setminus B} g \,\mathrm{d}\mu \le \nu(A \cap B) + \nu(A \setminus B) = \nu(A)\ .$$

Wir nehmen nun eine Folge $\{g_n\} \subset \mathcal{H}$, so dass $\lim_{n\to\infty} \int g_n \,\mathrm{d}\mu = \gamma$. Setzen wir $f_n = \vee_{i=1}^n g_i$ und $f = \sup_n f_n$, so haben haben wir wegen der monotonen Konvergenz $\int f \,\mathrm{d}\mu = \gamma$ und $\int_A f \,\mathrm{d}\mu \le \nu(A)$. Wir setzen nun $\nu_a(A) = \int_A f \,\mathrm{d}\mu$ und $\nu_s(A) = \nu(A) - \nu_a(A)$. Es ist klar, dass ν_a absolutstetig ist.

Es gibt eine Zerlegung (Hilfssatz 1.42) E'_n und E''_n für die Masse ν_s und μ/n. Sei $M = \cap_n E''_n$. Wir haben dann $\nu_s(M) \le \mu(M)/n$ für alle n, also $\nu_s(M) = 0$. Nehmen wir nun $\mu(M^c) > 0$ an. Also gibt es n, so dass $\mu(E'_n) > 0$. Sei $\varepsilon = n^{-1}$. Dann ist $\nu_s(A) \ge \varepsilon\mu(A)$ für alle $A \subset E'_n$. Wir setzen nun $g = f + \varepsilon 1\!\!1_{E'_n}$. Dann gilt für $B \in \mathcal{F}$

$$\int_B g \,\mathrm{d}\mu = \nu_a(B) + \varepsilon\mu(B \cap E'_n) \le \nu_a(B) + \nu_s(B \cap E'_n) \le \nu(B)\ .$$

Also ist $g \in \mathcal{H}$, aber $\int g \, \mathrm{d}\mu = \gamma + \varepsilon\mu(E'_n)$. Dies ist ein Widerspruch und es folgt, dass $\nu_s \perp \mu$.

Für beliebige μ und ν konstruieren wir die Masse ν_a^n und ν_s^n, so dass $\nu(\cdot \cap \Omega_n) = \nu_a^n + \nu_s^n$. Die zugehörige Dichte f_n ist dann eine wachsende Folge und konvergiert punktweise gegen eine Funktion f. Sei M_n, so dass $\nu_s^n(M_n) = \mu(\Omega_n \setminus M_n) = 0$ und setzen wir $M = \cap_n M_n$. Dann ist $\mu(M^c) = 0$. Wir definieren $\nu_s = \lim_n \nu_s^n$ und $\nu_a = \nu - \nu_s$. Dann hat ν_a die Dichte f. Weiter gilt

$$\nu_s(M) = \lim_{n\to\infty} \nu_s^n(M) = 0 \, .$$

Also sind ν_s und μ singulär. Weiter haben wir

$$\nu(\Omega_n) \geq \nu_a^n(f_n = \infty) = \int_{f_n=\infty} f_n \, \mathrm{d}\mu > \infty \cdot \mu(f_n = \infty) \, .$$

Somit ist $\mu(f_n = \infty) = 0$. Also gilt

$$\mu(f = \infty) = \lim_{n\to\infty} \mu(\{f_n = \infty\}) = 0 \, ,$$

da $f_n = f \mathbb{1}_{\Omega_n}$. □

Korollar 1.44. (Satz von Radon–Nikodym) *Seien ν und μ σ-endliche Masse auf $(\Omega, \mathcal{F})$. Dann gilt*

$$\nu \ll \mu \qquad \Longleftrightarrow \qquad \nu \textit{ hat eine Dichte bezüglich } \mu.$$

Beweis. Hat ν eine Dichte, dann ist ν offensichtlich absolutstetig. Ist ν absolutstetig, dann ist in der Zerlegung von Satz 1.43 $\nu_s = 0$ und $\nu = \nu_a$. Somit hat ν eine Dichte bezüglich μ. □