5. Irrfahrten

Seien $\{X_k\}$ iid. mit Verteilungsfunktion $F(x)$. Wir setzen $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$. Dieser Prozess heisst **Irrfahrt**. Bei einer klassischen Irrfahrt haben wir $\mathbb{P}[X_k = 1] = \mathbb{P}[X_k = -1] = \frac{1}{2}$.

Wir kennen in ein paar Spezialfällen bereits das asymptotische Verhalten von $\{S_n\}$. Ist nämlich $\mathbb{E}[X] > 0$ (bzw. $\mathbb{E}[X] < 0$), so besagt das Gesetz der grossen Zahl, dass $n^{-1}S_n \to \mathbb{E}[X]$. Somit konvergiert $\{S_n\}$ nach Unendlich ($-\infty$). Ist $\mathbb{E}[X] = 0$ und $\mathrm{Var}[X] < \infty$, dann oszilliert S_n, da aus dem Gesetz des iterierten Logarithmus folgt, dass $\overline{\lim}_n S_n = -\underline{\lim}_n S_n = \infty$. Wir werden hier dieses Resultat mit anderen Methoden beweisen.

Das Studium der Irrfahrt wird vor allem auf den Leiterhöhen und Leiterepochen basieren, das sind neue Rekorde. Wir machen die folgenden Definitionen.

$$\tau_1^+ = \inf\{n \ge 1 : S_n > 0\} , \qquad \mathcal{H}_1^+ = S_{\tau_1^+} .$$

Die Variable $\mathcal{H}_1^+$ ist nur definiert, falls $\tau_1^+ < \infty$. Diese Grössen heissen **stark aufsteigende Leiterepoche** und **stark aufsteigende Leiterhöhe**. Wir bezeichnen die gemeinsame Verteilung mit

$$H_n^+(x) = \mathbb{P}[\tau_1^+ = n, \mathcal{H}_1^+ \le x] , \qquad H_+(x) = \mathbb{P}[\tau_1^+ < \infty, \mathcal{H}_1^+ \le x] = \sum_{n=1}^\infty H_n^+(x) .$$

Wir haben dann $1 - H_+(\infty) = \mathbb{P}[\tau_1^+ = \infty]$.

Da die Irrfahrt sich nach der Zeit τ_1^+ gleich verhält, wie nach der Anfangszeit, können wir weitere Leiterzeitpunkte und Leiterhöhen definieren. Wir setzen, falls $\tau_n^+ < \infty$,

$$\tau_{n+1}^+ = \inf\{m > \tau_n^+ : S_m > S_{\tau_n^+}\} , \qquad \mathcal{H}_{n+1}^+ = S_{\tau_{n+1}^+} - S_{\tau_n^+} ;$$

letzteres falls $\tau_{n+1}^+ < \infty$.

Falls $H_+(\infty) = 1$, gibt es unendlich viele Leiterepochen. Ist $H_+(\infty) < 1$, so hat die Anzahl Leiterepochen eine geometrische Verteilung $(1 - H_+(\infty))H_+(\infty)^n$. Die Variable $S_{\tau_n^+}$ hat die Verteilung $H_+^{*n}(x)$. Der Prozess der Leiterhöhen ist ein Erneuerungsprozess und wir bezeichnen das Erneuerungsmass mit $\psi(x) = \sum_{n=0}^\infty H_+^{*n}(x)$.

Analog können wir absteigende Leiterhöhen definieren. Es erweist sich als vorteilhaft, eine Leiterhöhe der Höhe Null zuzulassen. Wir definieren die **schwach absteigenden Leiterepochen** und **Leiterhöhen**

$$\tau_1^- = \inf\{n \ge 1 : S_n \le 0\} , \qquad \mathcal{H}_1^- = S_{\tau_1^-} .$$

Analog haben wir die Verteilungen $H_n^-(x) = \mathbb{P}[\tau_1^- = n, \mathcal{H}_1^- \le x]$ und $H_-(x) = \mathbb{P}[\tau_1^- < \infty, \mathcal{H}_1^- \le x]$.

Für festes n können wir die Variablen $X_k^* = X_{n-k+1}$ und die dazugehörende duale Irrfahrt $S_k^* = \sum_{j=1}^k X_j^* = S_n - S_{n-k}$ betrachten. Zum Beispiel erhalten wir daraus

$$\mathbb{P}[S_1^* < 0, \ldots, S_{n-1}^* < 0, S_n^* = 0] = \mathbb{P}[S_{n-1} > 0, \ldots, S_1 > 0, S_n = 0] \; .$$

Somit ist die Wahrscheinlichkeit einer schwach absteigenden Leiterepoche mit Leiterhöhe 0 gleich gross wie die Wahrscheinlichkeit einer schwach aufsteigenden Leiterepoche mit Leiterhöhe 0. Wir bezeichnen diese Wahrscheinlichkeit mit ζ.

Wir wenden die duale Irrfahrt auf die stark aufsteigenden Leiterzeitpunkte an. Wir haben

$$\mathbb{P}[S_n^* > S_{n-1}^*, \ldots, S_n^* > S_1^*, S_n^* \in I] = \mathbb{P}[S_1 > 0, \ldots, S_{n-1} > 0, S_n \in I] \; .$$

Das Erneuerungsmass ψ hat daher zwei Interpretationen. Für endliches I ist $\psi(I) - \mathbb{1}_I(0)$

- die erwartete Anzahl Leiterpunkte in I.
- die erwartete Anzahl Besuche in I, bevor die Irrfahrt die negativen Werte besucht.

Betrachten wir zum Beispiel die klassische Irrfahrt, so ist $\mathbb{P}[S_n = k \text{ für ein } n] = 1 = \mathbb{E}[\sum_{n=1}^{\tau_1^-} \mathbb{1}_{S_n = k}]$. Summieren wir über k, erhalten wir, dass $\mathbb{E}[\tau_1^-] = \infty$.

Hilfssatz 5.1. *Es gibt nur zwei Typen von Irrfahrten.*

i) **Oszillierender Typ** *Es gibt sowohl unendlich viele aufsteigende Leiterhöhen wie auch unendlich viele absteigende Leiterhöhen. Das heisst, es gilt der Grenzwert* $\overline{\lim}_n S_n = -\underline{\lim}_n S_n = \infty$. *Weiter gilt* $\mathbb{E}[\tau_1^+] = \mathbb{E}[\tau_1^-] = \infty$.

ii) **Transiente Irrfahrt** $\{S_n\}$ *konvergiert nach* ∞ *oder nach* $-\infty$. *Konvergiert* $\{S_n\}$ *nach* $-\infty$, *so hat* $\{S_n\}$ *ein endliches Maximum* $M \ge 0$. *Es gilt*

$$\mathbb{E}[\tau_1^-] = \psi(\infty) = \frac{1}{1 - H_+(\infty)} \; .$$

Es ist $H_+(\infty) < 1$ *und es gilt*

$$\mathbb{P}[M \le x] = (1 - H_+(\infty))\psi(x) \; .$$

Beweis. Wegen der Dualität haben wir

$$\mathbb{P}[S_n > S_k, 0 \le k < n] = \mathbb{P}[S_k > 0, 0 < k \le n] = \mathbb{P}[\tau_1^- > n] \;.$$

Addieren wir Gleichung von $n = 0$ bis ∞, erhalten wir auf der linken Seite die erwartete Anzahl Leiterepochen plus eins, auf der rechten den Erwartungswet von τ_1^-. Also haben wir $\mathbb{E}[\tau_1^-] = \psi(\infty) = (1 - H_+(\infty))^{-1}$. Ist also $H_+(\infty) < 1$, so erhalten wir, dass der aufsteigende Leiterprozess abbrechend ist und der absteigende Leiterprozess nicht abbricht. In diesem Fall konvergiert der Prozess gegen $-\infty$. Wir erhalten dann

$$\mathbb{P}[M \le x] = (1 - H_+(\infty)) \sum_{n=0}^{\infty} H_+^{*n}(x) = (1 - H_+(\infty))\psi(x) \;.$$

Insbesondere haben wir gezeigt, dass mindestens ein Leiterprozess nicht abbrechend ist. □

Wir haben nun folgende Spezialfälle.

Korollar 5.2.

- *Ist* $\mathbb{E}[X] = 0$*, dann ist die Irrfahrt oszillierend und* $\mathbb{E}[\tau_1^+] = \mathbb{E}[\tau_1^-] = \infty$.
- *Ist* $\mathbb{E}[X] > 0$ ($\mathbb{E}[X] < 0$)*, so konvergiert die Irrfahrt nach* ∞ $(-\infty)$*. Wir haben dann* $\mathbb{E}[\mathcal{H}_1^+] = \mathbb{E}[\tau_1^+]\mathbb{E}[X]$ $(\mathbb{E}[\mathcal{H}_1^-] = \mathbb{E}[\tau_1^-]\mathbb{E}[X])$ *und die Erwartungswerte sind endlich.*
- *Ist* $\mathbb{E}[X] = \infty$ $(\mathbb{E}[X] = -\infty)$*, dann konvergiert die Irrfahrt nach* ∞ $(-\infty)$ *und* $\mathbb{E}[\mathcal{H}_1^+] = \infty$, $(\mathbb{E}[\mathcal{H}_1^-] = -\infty)$.

Beweis. Bricht der aufsteigende Leiterprozess nicht ab, so erhalten wir, dass

$$\frac{\mathcal{H}_1^+ + \cdots + \mathcal{H}_k^+}{\tau_k^+} = \frac{(\mathcal{H}_1^+ + \cdots + \mathcal{H}_k^+)/k}{\tau_k^+/k} \to \frac{\mathbb{E}[\mathcal{H}_1^+]}{\mathbb{E}[\tau_1^+]} \;.$$

Ist $\mathbb{E}[X]$ wohldefiniert, so konvergiert die linke Seite nach $\mathbb{E}[X]$.

Ist nun $\mathbb{E}[X] = 0$, so konvergiert die linke Seite nach Null. Also muss $\mathbb{E}[\tau_1^+] = \infty$ gelten. Insbesondere ist $H_-(\infty) = 1$. Weiter ist der absteigende Leiterprozess nie abbrechend. Betrachten wir die Irrfahrt $\{-S_n\}$, so folgt auch $H_+(\infty) = 1$ und der aufsteigende Leiterprozess ist nie abbrechend.

Ist $\mathbb{E}[X] > 0$, so konvergiert wegen dem starken Gesetz der grossen Zahl $\{S_n\}$ nach Unendlich. Insbesondere ist der absteigende Leiterprozess abbrechend. Es folgt, dass $\mathbb{E}[\tau_1^+] < \infty$. Die Aussage für $\mathbb{E}[X] = \infty$ folgt analog. □

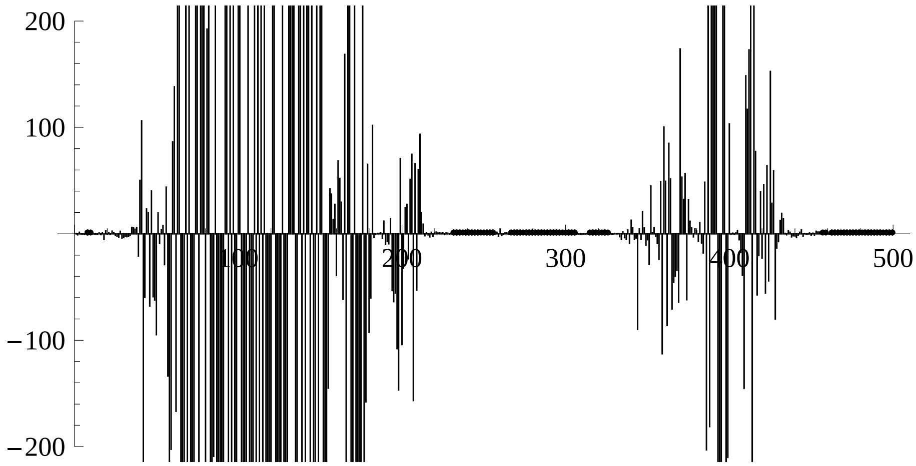

Abbildung 5.1: *Der Prozess* $\{Y_n\}$ *für* $\beta = 1.9$

Beispiel 5.3. Die Variable Y_0 sei standard-normalverteilt. Gegeben $\mathcal{F}_n$, definiert als $\mathcal{F}_n = \sigma(Y_0, Y_1, \ldots, Y_n)$, sei Y_{n+1} normalverteilt mit Mittelwert 0 und Varianz $\beta^2 Y_n^2$, wobei $\beta > 0$. Wir können den Prozess $\{Y_n\}$ folgendermassen konstruieren. Seien $\{Z_n\}$ iid standard-normalverteilte Zufallsvariablen. Wir setzen $Y_0 = Z_0$ und $Y_{n+1} = \beta Y_n Z_{n+1}$. Wir wollen nun das Verhalten von $\{Y_n\}$ untersuchen. Dazu betrachten wir die Variablen $S_n = \log Y_n^2$. Wir erhalten dann

$$S_n = \log \beta^2 + \log Y_{n-1}^2 + \log Z_n^2 = \sum_{k=0}^{n} \log Z_k^2 + n \log \beta^2 \ .$$

$\{S_n\}$ ist dann also eine Irrfahrt. Setzen wir $\beta_0 = \exp\{-\mathbb{E}[\log Z_n^2]/2\} \approx 1.88736$. Wir nennen β_0 den kritischen Wert. Ist $\beta < \beta_0$, dann driftet $\{S_n\}$ nach $-\infty$. Das bedeutet, dass $\{Y_n^2\}$ gegen Null konvergiert. Der Prozess $\{Y_n\}$ wird dann immer kleiner werden. Ist $\beta > \beta_0$, dann konvergiert $\{S_n\}$ gegen Unendlich, das heisst $\{Y_n^2\}$ konvergiert gegen Unendlich. Das heisst, $\{Y_n\}$ explodiert. Nimmt $\beta = \beta_0$ den kritischen Wert an, dann oszilliert $\{S_n\}$. Das heisst, es gibt Perioden, wo Y_n^2 sehr gross wird, es also aussieht, als ob Y_n explodiert, und Perioden, wo Y_n^2 sehr klein wird, es also aussieht, als ob Y_n verschwinden würde. ∎

Wir machen nun folgende Definitionen.

$$\psi_n(I) = \mathbb{P}[S_1 > 0, \ldots, S_n > 0, S_n \in I] \ ,$$
$$\rho_n(I) = \mathbb{P}[S_1 > 0, \ldots S_{n-1} > 0, S_n \le 0, S_n \in I] \ .$$

Wir haben dann $\psi(I) = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n(I)$ und $H_-(I) = \sum_{n=1}^{\infty} \rho_n(I)$.

Proposition 5.4. *Es gilt die Formel $H_- + \psi = \psi_0 + \psi * F$. Dies ist äquivalent zur* **Wiener–Hopf-Zerlegung**

$$F = H_+ + H_- - H_+ * H_- \; .$$

Bemerkung. Ist F absolutstetig, so sind auch die Leiterhöhenverteilungen absolutstetig und damit gilt für die Dichten

$$f = h_+ + h_- - h_+ * h_- \; .$$

■

Beweis. Ist $I \subset (-\infty, 0]$, so erhalten wir aus der Definition

$$\rho_{n+1}(I) = \int_{0-}^{\infty} F(I - y) \, \mathrm{d}\psi_n(y) \; .$$

Ist $I \subset (0, \infty)$, so gilt

$$\psi_{n+1}(I) = \int_{0-}^{\infty} F(I - y) \, \mathrm{d}\psi_n(y) \; .$$

Es folgt mittels Induktion, dass $\psi_n(I)$ und $\rho_n(I)$ endlich sind. Addieren wir die obigen Formeln von $n = 0$ bis ∞, erhalten wir für $I \subset (-\infty, 0]$

$$H_-(I) = \int_{0-}^{\infty} F(I - y) \, \mathrm{d}\psi(y) \; , \tag{5.1}$$

und für $I \subset (0, \infty)$

$$\psi(I) = \int_{0-}^{\infty} F(I - y) \, \mathrm{d}\psi(y) \; .$$

Ist nun $I \subset (-\infty, 0)$, so ist $\psi(I) = \psi_0(I) = 0$ und somit gilt

$$H_-(I) + \psi(I) = H_-(I) = \psi_0(I) + \psi * F(I) \; .$$

Weiter gilt

$$H_-(\{0\}) + \psi(\{0\}) = H_-(\{0\}) + 1 = \psi_0(\{0\}) + \psi * F(\{0\}) \; .$$

Und für $I \subset (0, \infty)$ erhalten wir aus $H_-(I) = \psi_0(I) = 0$

$$H_-(I) + \psi(I) = \psi(I) = \psi_0(I) + \psi * F(I) \; .$$

Somit gilt die erste Formel.

Wir bemerken nun, dass ψ die Erneuerungsgleichung $\psi(I) = \psi_0(I) + \psi * H_+$ erfüllt. Somit erhalten wir

$$\begin{aligned}\psi - \psi_0 + H_- * H_+ &= \psi * H_+ + H_- * H_+ = (\psi + H_-) * H_+ = H_+ + \psi * H_+ * F \\ &= H_+ + \psi * F - F = H_+ - F + \psi + H_- - \psi_0 \;.\end{aligned}$$

Dies ist äquivalent zur Wiener–Hopf-Zerlegung. Gilt umgekehrt die Wiener–Hopf-Zerlegung, erhalten wir

$$\psi * F = \psi * H_+ + \psi * H_- - \psi * H_+ * H_- = \psi - \psi_0 + H_- + \psi * H_+ * H_- - \psi * H_+ * H_- \;.$$

Also sind die beiden Ausdrücke äquivalent. □

Beispiel 5.5. Nehmen wir an, dass $F(x) = 1 - \mathrm{e}^{-\alpha x}(1 - F(0))$ für $x \ge 0$. Also, bedingt auf $X_k > 0$ ist X_k exponential verteilt mit Parameter α. Wir schliessen daraus (bedingen auf $S_{\tau_1^+ - 1}$), dass $H_+(x) = H_+(\infty)(1 - \mathrm{e}^{-\alpha x})$. Wir erhalten dann für $x \ge 0$

$$\begin{aligned}H_+^{*n}(x) &= H_+^n(\infty)\int_0^x \frac{\alpha^n}{(n-1)!} y^{n-1}\mathrm{e}^{-\alpha y}\,\mathrm{d}y = H_+^n(\infty)\Bigl(1 - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{\alpha^k}{k!}x^k\mathrm{e}^{-\alpha x}\Bigr) \\ &= H_+^n(\infty)\sum_{k=n}^{\infty}\frac{\alpha^k}{k!}x^k\mathrm{e}^{-\alpha x} \;.\end{aligned}$$

Betrachten wir zuerst den Fall $H_+(\infty) = 1$, das heisst $\mathbb{E}[X] \ge 0$. Dann ist

$$\psi(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=n}^{\infty}\frac{\alpha^k}{k!}x^k\mathrm{e}^{-\alpha x} = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\frac{\alpha^k}{k!}x^k\mathrm{e}^{-\alpha x} = 1 + \alpha x$$

für $x \ge 0$. Dieses Resultat hätten wir auch aus den Eigenschaften des Poisson-Prozesses erhalten können. Es gilt somit für $x \le 0$

$$H_-(x) = F(x) + \alpha\int_0^\infty F(x-y)\,\mathrm{d}y = F(x) + \alpha\int_{-\infty}^x F(y)\,\mathrm{d}y \;,$$

siehe (5.1). Insbesondere haben wir

$$H_-(0) = F(0) + \alpha\int_{-\infty}^0 F(y)\,\mathrm{d}y = 1 - \alpha\Bigl(\frac{1 - F(0)}{\alpha} - \mathbb{E}[X^-]\Bigr) = 1 - \alpha\mathbb{E}[X] \;.$$

Ist $H_+(\infty) < 1$, das heisst $\mathbb{E}[X] < 0$, dann erhalten wir

$$\begin{aligned}\psi(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} H_+^n(\infty)\sum_{k=n}^{\infty}\frac{\alpha^k}{k!}x^k\mathrm{e}^{-\alpha x} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\alpha^k}{k!}x^k\mathrm{e}^{-\alpha x}\frac{1 - H_+^{k+1}(\infty)}{1 - H_+(\infty)} \\ &= \frac{1 - H_+(\infty)\mathrm{e}^{-\alpha(1 - H_+(\infty))x}}{1 - H_+(\infty)} \;.\end{aligned}$$

Also erhalten wir aus (5.1) für $x \le 0$

$$\begin{aligned}H_-(x) &= F(x) + \int_0^\infty F(x-y)\alpha H_+(\infty)\mathrm{e}^{-\alpha(1-H_+(\infty))y}\,\mathrm{d}y \\ &= F(x) + \int_{-\infty}^x F(y)\alpha H_+(\infty)\mathrm{e}^{\alpha(1-H_+(\infty))y}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{e}^{-\alpha(1-H_+(\infty))x} \\ &= \frac{1}{1-H_+(\infty)}F(x) - \frac{H_+(\infty)\mathrm{e}^{-\alpha(1-H_+(\infty))x}}{1-H_+(\infty)}\int_{-\infty}^x \mathrm{e}^{\alpha(1-H_+(\infty))y}\,\mathrm{d}F(y)\;.\end{aligned}$$

Setzen wir $x = 0$, ergibt sich

$$1 = \frac{F(0)}{1-H_+(\infty)} - \frac{H_+(\infty)}{1-H_+(\infty)}\int_{-\infty}^0 \mathrm{e}^{\alpha(1-H_+(\infty))y}\,\mathrm{d}F(y)\;.$$

Wir wissen, dass

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{\alpha(1-H_+(\infty))y}\,\mathrm{d}F(y) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{\alpha(1-H_+(\infty))y}(1-F(0))\alpha\mathrm{e}^{-\alpha y}\,\mathrm{d}y = \frac{1-F(0)}{H_+(\infty)}\;.$$

Somit gilt die Gleichung

$$\int_{-\infty}^\infty \mathrm{e}^{\alpha(1-H_+(\infty))y}\,\mathrm{d}F(y) = 1\;.$$

Betrachten wir die Funktion $\kappa(r) = \int_{-\infty}^\infty \mathrm{e}^{ry}\,\mathrm{d}F(y)$, die für $r \in [0,\alpha)$ endlich ist. Wir haben $\kappa''(r) = \int_{-\infty}^\infty y^2\mathrm{e}^{ry}\,\mathrm{d}F(y) > 0$. Also ist $\kappa(r)$ eine konvexe Funktion. Da $\kappa(0) = 1$, $\kappa'(r) = \mathbb{E}[X] < 0$ und $\lim_{r\uparrow\alpha}\kappa(r) = \infty$, muss es also eine eindeutige zweite Lösung $R > 0$ geben, so dass $\kappa(R) = 1$. Wir erhalten dann $H_+(\infty) = 1 - R/\alpha$. ■

Beispiel 5.6. (Assoziierte Irrfahrt) Nehmen wir an, es existiert eine Lösung $R \ne 0$ der Gleichung $\kappa(r) = \mathbb{E}[\mathrm{e}^{rX}] = \int_{-\infty}^\infty \mathrm{e}^{ry}\,\mathrm{d}F(y) = 1$. Wir haben im Beispiel 5.5 gesehen, dass $\kappa(r)$ konvex ist. Dann ist $\{\mathrm{e}^{RS_n}\}$ ein Martingal mit Mittelwert 1. Ändern wir das Mass $\tilde{\mathbb{P}}[A] = \mathbb{E}[\mathrm{e}^{RS_n}; A]$ auf $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1,\dots,X_n)$, so ist unter $\tilde{\mathbb{P}}$

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbb{P}}[X_k \in A_k, 1 \le k \le n] &= \mathbb{E}[\mathrm{e}^{R(X_1+\cdots+X_n)}; X_k \in A_k, 1 \le k \le n] \\ &= \prod_{k=1}^n \mathbb{E}[\mathrm{e}^{RX_k}; X_k \in A]\;.\end{aligned}$$

Somit ist $\{S_n\}$ eine Irrfahrt mit der zugehörigen Verteilung der Summanden $\tilde{F}(x) = \int_{-\infty}^x \mathrm{e}^{Ry}\,\mathrm{d}F(y)$. Da die Funktion $\kappa(r)$ konvex ist und $\tilde{\mathbb{E}}[X] = \int_{-\infty}^\infty y\mathrm{e}^{Ry}\,\mathrm{d}F(y) = \kappa'(R)$, hat $\{S_n\}$ unter $\tilde{\mathbb{P}}$ verglichen mit $\mathbb{P}$ die entgegengesetzte Drift. Die Irrfahrt unter $\tilde{\mathbb{P}}$ heisst **assoziierte Irrfahrt**. Aus

$$\tilde{\mathbb{P}}[S_n \in A] = \mathbb{E}[\mathrm{e}^{RS_n}; S_n \in A] = \int_A \mathrm{e}^{rx}\,\mathrm{d}F^{*n}(x)\;,$$

ist auch $\mathrm{d}\tilde{F}^{*n}(x) = \mathrm{e}^{Rx}\,\mathrm{d}F^{*n}(x)$ assoziiert. Weiter gilt

$$\tilde{H}_+(x) = \tilde{\mathbb{P}}[S_{\tau_1^+} \le x] = \mathbb{E}[\mathrm{e}^{RS_{\tau_1^+}}; S_{\tau_1^+} \le x] = \int_0^x \mathrm{e}^{Ry}\,\mathrm{d}H_+(y)\;,$$

also ist $\tilde{H}_+$ auch assoziiert. Analog erhalten wir, dass $\tilde{H}_-$ assoziert ist. Insbesondere, ist $\mathbb{E}[X] < 0$, dann ist $R > 0$ und $1 = \tilde{H}_+(\infty) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{Ry}\,\mathrm{d}H_+(y)$. Ist $\mathbb{E}[X] > 0$, so ist $R < 0$ und $\tilde{H}_+(\infty) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{Ry}\,\mathrm{d}H_+(y) < 1$.

Betrachten wir das Erneuerungsmass $\tilde{\psi}(x)$, so erhalten wir

$$\begin{aligned}\tilde{\psi}_n(x) &= \tilde{\mathbb{P}}[S_1 > 0, \ldots, S_{n-1} > 0, 0 < S_n \le x] \\ &= \mathbb{E}[\mathrm{e}^{RS_n}; S_1 > 0, \ldots, S_{n-1} > 0, 0 < S_n \le x] = \int_0^x \mathrm{e}^{Ry}\,\mathrm{d}\psi_n(y)\;.\end{aligned}$$

Also ist $\tilde{\psi}_n(x)$ und damit auch das Erneuerungsmass $\tilde{\psi}(x)$ assoziiert. ■

Hilfssatz 5.7. *Es gibt genau ein Paar (H_+, H_-) von Verteilungsfunktionen mit $H_+((-\infty, 0]) = H_-((0, \infty)) = 0$, das die Wiener–Hopf-Gleichung löst.*

Beweis. Seien $\psi' \ge \psi_0$ und ρ' zwei Masse, die $\rho' + \psi' = \psi_0 + \psi' * F$ erfüllen, wobei $\rho'(\mathbb{R}) = \rho'((-\infty, 0]) \le 1$ und $\psi'((-\infty, 0)) = 0$. Für $I \subset (0, \infty)$ folgt mittels Induktion

$$\psi'(I) = \int \psi'(I - y)\,\mathrm{d}F(y) \ge \int \sum_{k=0}^{n} \psi_k(I - y)\,\mathrm{d}F(y) = \sum_{k=1}^{n+1} \psi_k(I)\;,$$

also $\psi' \ge \sum_{k=0}^\infty \psi_n = \psi$. Somit ist $\psi'' = \psi' - \psi$ ein Mass auf $[0, \infty)$. Damit folgt auch für $I \subset (-\infty, 0)$

$$\rho'(I) = \int \psi'(I - y)\,\mathrm{d}F(y) \ge \int \psi(I - y)\,\mathrm{d}F(y) = H_-(I)\;.$$

Also ist auch $\rho'' = \rho' - H_-$ ein Mass auf $(-\infty, 0)$. Wir haben dann $\psi'' + \rho'' = \psi'' * F$. Nehmen wir zuerst an, dass $H_-(0) < 1$. Dann konvergiert die Irrfahrt nach Unendlich. Wir haben dann für ein endliches Intervall I

$$\psi''(I) \le \psi''(I) + \rho''(I) = \int \psi''(I - y)\,\mathrm{d}F(y) \le \int \psi''(I - y)\,\mathrm{d}F^{*n}(y)\;.$$

Lassen wir $n \to \infty$, dann konvergiert das Mass F^{*n} zu einem Punktmass in Unendlich. Somit konvergiert die rechte Seite nach Null und $\psi''(I) = 0$. Insbesondere ist dann auch $\rho'' = 0$.

Nehmen wir an, dass $H_-(0) = 1$. Also ist $\rho'' = 0$, da $1 = H_-(0) \le \rho'(0) \le 1$. Wir haben

$$\psi''(I+t) = \int \psi''(I+t-y)\, \mathrm{d}F^{*n}(y)\ .$$

Ist t so gewählt, dass $I + t \subset (-\infty, 0)$, so folgt, dass $\psi''(I+t-y) = 0$, falls y ein Punkt ist, an dem $F^{*n}(y)$ für ein n wächst. Das ist nur möglich, falls $\psi'' = 0$, da es ein $y_0 < 0$ mit der obigen Eigenschaft gibt und die Aussage dann auch für t ersetzt durch $t + y_0$ gilt. Da $\psi = \psi_0 + \psi * H_+$, gilt $\psi * (H_+ - H_+') = 0$. Damit muss $H_+ = H_+'$ sein, da ψ an allen Wachstumsstellen von H_+ beziehungsweise H_+' wächst. □

Nehmen wir nun $\mathbb{E}[X] < 0$ an. Betrachten wir die Variable $M = \sup_{n\ge0} S_n$ und bezeichnen wir die Verteilung von M mit $F_M(x)$. Wir erhalten dann die Überlebenswahrscheinlichkeit

$$\mathbb{P}[M \le x] = \sum_{n=0}^{\infty} H_+^{*n}(x)(1 - H_+(\infty)) = \frac{\psi(x)}{\psi(\infty)}\ .$$

Falls man H_+ kennt, kann man also die Verteilung von M berechnen. Falls die eine Flanke eine Exponentialfunktion ist, haben wir im Beispiel 5.5 gezeigt, wie man $H_+(x)$ berechnet.

Beispiel 5.6 (Fortsetzung). Betrachten wir die assoziierte Irrfahrt mit $\mathbb{E}[X] < 0$. Wir können dann die Verteilung von M schreiben als

$$\mathrm{d}F_M(x) = (1 - H_+(\infty))\, \mathrm{d}\psi(x) = (1 - H_+(\infty))\mathrm{e}^{-Rx}\, \mathrm{d}\tilde{\psi}(x)\ .$$

Aus dem Blackwell'schen Erneuerungssatz wissen wir, dass $\mathrm{d}\tilde{\psi}(x) \sim \beta\, \mathrm{d}x$, wobei $\beta^{-1} = \int_0^\infty y\, \mathrm{d}\tilde{H}_+(y) = \int_0^\infty y\mathrm{e}^{Ry}\, \mathrm{d}H_+(y)$. Also erhalten wir

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[M > x] &= (1 - H_+(\infty)) \int_x^\infty \mathrm{d}\psi(y) \sim (1 - H_+(\infty)) \int_x^\infty \mathrm{e}^{-Ry}\beta\, \mathrm{d}y \\ &= \frac{\beta(1 - H_+(\infty))}{R}\mathrm{e}^{-Rx}\ .\end{aligned}$$

Dies ist unter der Voraussetzung, dass $\beta > 0$. Sonst haben wir nur $\mathbb{P}[M > x] = o(\mathrm{e}^{-Rx})$. ■

Beschäftigen wir uns nun mit den Leiterepochen. Sei nun $h_n = \mathbb{P}[\tau_1^+ = n]$. Die Erzeugendenfunktion von τ_1^+ ist dann $h(x) = \sum_{n=1}^\infty h_n x^n$. Bevor wir $h(x)$ bestimmen, benötigen wir den folgenden kombinatorischen Hilfssatz.

Hilfssatz 5.8. *Seien $x_1, \ldots, x_n$ Zahlen und permutieren wir die Folge zyklisch $(x_{k+1}, \ldots, x_n, x_1, \ldots, x_k) = (x_1^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)})$. Wir setzen $s_\ell^{(k)} = \sum_{m=1}^{\ell} x_m^{(k)}$ und nehmen an, dass $s_n^{(0)} > 0$. Sei r die Anzahl der Irrfahrten $s_\ell^{(k)}$, bei denen n ein Leiterpunkt ist. Dann ist $r \geq 1$ und jede der Irrfahrten mit n als Leiterpunkt hat genau r Leiterpunkte.*

Beweis. Sei $s_k = s_k^{(0)}$. Wir haben dann, dass $s_m^{(k)} = s_{m+k} - s_k$, falls $m \leq n-k$ und $s_m^{(k)} = s_n - s_k + s_{m+k-n}$ sonst. Wählen wir k, so dass s_k maximal wird. Falls k nicht eindeutig ist, wählen wir den kleinsten Index k. Wir haben dann $s_m^{(k)} \leq 0$ für $m \leq n-k$, und $s_m^{(k)} < s_n = s_n^{(k)}$ für $m > n-k$. Also ist $r \geq 1$. Wir können jetzt also annehmen, dass n ein Leiterpunkt in $\{s_m\}$ ist. Also ist $s_n > s_m$ für alle m und $k = n$. Die ℓ-te Permutation hat genau dann n als Leiterpunkt, falls $s_\ell > 0$ und $s_{m+\ell-n} < s_\ell$ für $m > n - \ell$. Also genau dann, falls ℓ ein Leiterpunkt ist. Also hat s_ℓ genau r Leiterpunkte. Dieses Argument gilt für alle Permutationen, bei denen n ein Leiterpunkt ist. Somit hat jede solche Permutation genau r Leiterpunkte. □

Wir haben dann folgendes Resultat.

Satz 5.9. (Sparre Andersen) *Es gilt für $x \in [0, 1)$*

$$-\log(1 - h(x)) = \sum_{n=1}^{\infty} x^n \frac{\mathbb{P}[S_n > 0]}{n} .$$

Bemerkung. Wie wir im Beweis sehen können, gilt die analoge Aussage auch für schwach aufsteigende Leiterepochen, wobei man h_n und $h(x)$ durch die entsprechenden schwachen Grössen und $\mathbb{P}[S_n > 0]$ durch $\mathbb{P}[S_n \geq 0]$ ersetzen muss. ■

Beweis. Permutieren wir die Irrfahrt zyklisch, das heisst, betrachten wir die Irrfahrt mit $\{S_\ell^{(k)}\}$. Falls n ein Leiterzeitpunkt ist, dann ist $S_n > 0$. Sei $r \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Die Variable $Y^{(k)}$ soll 1 sein, falls $\tau_r^{+(k)} = n$, also n der r-te Leiterzeitpunkt für die k-te Permutation ist; sonst Null. Wir haben dann, dass $\mathbb{P}[Y^{(0)} = 1] = h_n^{*r}$. Wir haben dann also

$$h_n^{*r} = \mathbb{E}[Y^{(0)}] = n^{-1}\mathbb{E}\Bigl[\sum_{k=0}^{n-1} Y^{(k)}\Bigr] .$$

Aus Lemma 5.8 schliessen wir, dass $\sum_{k=0}^{n-1} Y^{(k)} \in \{0, r\}$ und

$$\frac{1}{r} h_n^{*r} = \frac{1}{n}\mathbb{P}\Bigl[\sum_{k=0}^{n-1} Y^{(k)} = r\Bigr] .$$

Wir erhalten dann also

$$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{h_n^{*r}}{r} = \frac{1}{n} \sum_{r=1}^{\infty} \mathbb{P}\Big[\sum_{k=0}^{n-1} Y^{(k)} = r\Big] = \frac{\mathbb{P}[S_n > 0]}{n} \ .$$

Dies ergibt nun

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \mathbb{P}[S_n > 0] = \sum_{n=1}^{\infty} x^n \sum_{r=1}^{\infty} \frac{h_n^{*r}}{r} = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{h(x)^r}{r} = -\log(1 - h(x)) \ .$$

□

Korollar 5.10. *Sei $F(x)$ stetig und symmetrisch bezüglich des Nullpunktes. Dann ist $h(x) = 1 - \sqrt{1-x}$.*

Beweis. Wir haben $\mathbb{P}[S_n > 0] = \frac{1}{2}$ und damit $-\log(1 - h(x)) = -\frac{1}{2} \log(1-x)$.

□

Korollar 5.11. *Die Irrfahrt driftet genau dann nach $-\infty$, falls $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} \mathbb{P}[S_n > 0] < \infty$.*

Beweis. Die Irrfahrt driftet genau dann gegen $-\infty$, falls $h(1) = H_+(\infty) < 1$, also wenn $-\log(1 - h(1)) < \infty$. Das heisst, genau dann, wenn die Summe konvergiert.

□

Korollar 5.12. *Nehmen wir an, die Irrfahrt konvergiert nach Unendlich. Dann gilt*

$$\log \mathbb{E}[\tau_1^+] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbb{P}[S_n \le 0]}{n} \ .$$

Beweis. Wir haben

$$\log \frac{1 - h(x)}{1 - x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \mathbb{P}[S_n > 0] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \mathbb{P}[S_n \le 0] \ .$$

Die Regel von Bernoulli-Hôpital besagt, dass die linke Seite nach $\log h'(1)$ konvergiert, falls $x \to 1$. Die Aussage folgt nun, da $h'(1) = \mathbb{E}[\tau_1^+]$. □