2. Zufallsvariablen und ihre Verteilungen

2.1. Definition der Zufallsvariablen

Definition 2.1. *Seien $(\Omega, \mathcal{F})$ und $(\Omega', \mathcal{F}')$ messbare Räume und $\mathbb{P}$ ein Wahrscheinlichkeitsmass auf $(\Omega, \mathcal{F})$. Eine messbare Abbildung $X : \Omega \mapsto \Omega'$ heisst Ω'-wertige* **Zufallsvariable**. *Falls $(\Omega', \mathcal{F}') = (\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$ oder $(\Omega', \mathcal{F}') = (\bar{\mathbb{R}}, \mathfrak{B}(\bar{\mathbb{R}}))$, sagen wir einfach Zufallsvariable. Wir nennen $\mathbb{P}_X = \mathbb{P} \circ X^{-1}$ die* **Verteilung** *von X. Für eine reelle Zufallsvariable nennen wir die Funktion $F_X : \mathbb{R} \to [0,1], x \mapsto \mathbb{P}_X[[-\infty, x]]$ die* **Verteilungsfunktion** *von X. Wir schreiben oft X für $X(\omega)$. Ist I eine Indexmenge und $\Omega' = \prod_{i \in I} \Omega_i$, $\mathcal{F}' = \otimes_{i \in I} \mathcal{F}_i$ und $\boldsymbol{X} = \{X_i : \Omega \to \Omega_i : i \in I\}$ eine Familie von Zufallsvariablen, dann ist $\boldsymbol{X}$ eine Ω'-wertige Zufallsvariable. Die Verteilung $\mathbb{P}_{\boldsymbol{X}}$ heisst gemeinsame Verteilung von $\{X_i : i \in I\}$. Sei $\boldsymbol{X}_J = \{X_j : j \in J\}$ für $J \subset I$. Die Klasse der Verteilungen $\{\mathbb{P}_{\boldsymbol{X}_J} : J \subset I,\ endlich\}$ heisst endlich-dimensionale Verteilungen von $\boldsymbol{X}$. Sind die Zufallsvariablen reell, heisst die Funktion $F_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}) = \mathbb{P}_{\boldsymbol{X}}[\otimes_{i \in I}[-\infty, x_i]]$ die (gemeinsame)* **Verteilungsfunktion** *von $\boldsymbol{X}$.*

Folgendes Resultat wurde in der Einführung in die Stochastik bewiesen.

Hilfssatz 2.2. *Eine Funktion $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ ist genau dann eine Verteilungsfunktion, falls $F(x)$ wachsend und rechtsstetig ist sowie $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ und $\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$ gilt.* □

Definition 2.3. *Eine Familie $\{A_i : i \in I\}$ von Ereignissen heisst* **unabhängig**, *falls*

$$\mathbb{P}[\cap_{j \in J} A_j] = \prod_{j \in J} \mathbb{P}[A_j] \qquad \forall J \subset I \text{ endlich.}$$

Eine Familie von Mengensystemen $\{\mathcal{E}_i : i \in I\}$ heisst unabhängig, falls für jede Wahl von Ereignissen $A_i \in \mathcal{E}_i$ die Ereignisse $\{A_i\}$ **unabhängig** *sind. Eine Familie $\{X_i : i \in I\}$ von Zufallsvariablen heisst* **unabhängig**, *falls die Mengensysteme $\sigma(X_i) = \{\{X_i \in B_i\} : B_i \in \mathcal{F}_i\}$ unabhängig sind.*

Seien $\{X_i : i \in I\}$ relle Zufallsvariablen mit (gemeinsamer) Verteilungsfunktion F. Für $J \subset I$ endlich bezeichnen wir mit F_J die endlich-dimensionale Verteilungsfunktion. Dann folgt aus der Unabhängigkeit von $\{X_i\}$, dass

$$F_J(\boldsymbol{x}) = \prod_{j \in J} F_j(x_j)\ . \tag{2.1}$$

Nehmen wir an, dass für alle endlichen $J \subset I$ (2.1) gilt. Da die Mengen $\otimes_{j\in J}[-\infty, x_j]$ die σ-Algebra $\mathfrak{B}(\bar{\mathbb{R}}^J)$ erzeugen, folgt, dass die $\{X_j : j \in J\}$ und damit $\{X_i : i \in I\}$ unabhängig sind. Wir nennen eine Verteilung **absolutstetig**, falls für jedes $J \subset I$ endlich eine messbare Funktion f_J existiert, genannt **Dichte**, so dass

$$F_J(\boldsymbol{x}) = \int_{-\infty}^{x_1} \cdots \int_{-\infty}^{x_n} f_J(\boldsymbol{y}) \,\mathrm{d}y_n \cdots y_1 \;,$$

wobei $n = |J|$. Dann sind alle F_j absolutstetig mit Dichte

$$f_j(x_j) = \int_{y_1=-\infty}^{\infty} \cdots \int_{y_{j-1}=-\infty}^{\infty} \int_{y_{j+1}=-\infty}^{\infty} \cdots \int_{y_n=-\infty}^{\infty} f_J(\boldsymbol{y}) \,\mathrm{d}y_n \cdots y_{j+1} \,\mathrm{d}y_{j-1} \cdots y_1 \;,$$

wobei $y_j = x_j$. Es folgt dann, dass $\{X_i : i \in I\}$ genau dann unabhängig sind, falls $f_J(\boldsymbol{x}) = \prod_{j\in J} f_j(x_j)$ für alle endlichen $J \subset I$.

Das folgende Resultat wurde in der Einführung in die Stochastik bewiesen.

Proposition 2.4. (Borel–Cantelli-Lemma) *Seien $\{A_i \in \mathcal{F} : i \in \mathbb{N}\}$ und $A_\infty = \cap_n \cup_{k\ge n} A_k$ (unendlich viele A_n treffen ein). Dann gilt.*

i) *Ist $\sum_{i=1}^\infty \mathbb{P}[A_i] < \infty$. Dann ist $\mathbb{P}[A_\infty] = 0$.*

ii) *Ist $\sum_{i=1}^\infty \mathbb{P}[A_i] = \infty$ und sind die A_i unabhängig, dann gilt $\mathbb{P}[A_\infty] = 1$.* □

Beispiel 2.5. Seien N und $\{X_i : i \in \mathbb{N}\}$ unabhängige Zufallsvariablen. N sei **Poisson-verteilt** mit Parameter λ, das heisst,

$$\mathbb{P}[N = n] = \frac{\lambda^n}{n!}\mathrm{e}^{-\lambda}$$

für $n \in \mathbb{N}$. Die $\{X_i\}$ seien unabhängig und identisch verteilt. Die Verteilung der Zufallsvariable

$$S = \sum_{i=1}^N X_i$$

heisst **zusammengesetzte Poisson-Verteilung**. ■

2.2. Der Erwartungswert und der Raum $\mathcal{L}^p$

Sei X eine Zufallsvariable. Der Wert

$$\mathbb{E}[X] = \int X \, \mathrm{d}\mathbb{P}$$

heisst **Erwartungswert** der Zufallsvariable X, falls $\mathbb{E}[X]$ wohldefiniert ist. Da für eine messbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(X)$ eine Zufallsvariable ist, gilt $\mathbb{E}[f(X)] = \int f(X) \, \mathrm{d}\mathbb{P} = \int f \circ X \, \mathrm{d}\mathbb{P}$. Wir sagen, $f(X)$ ist **integrierbar**, falls das Integral endlich ist, das heisst, dass $\int |f(X)| \, \mathrm{d}\mathbb{P} < \infty$. Wir werden in Zukunft $\int_{\mathbb{R}} f(x) \, \mathrm{d}F_X(x)$ für das Integral $\int f(X) \, \mathrm{d}\mathbb{P}$ schreiben.

Besondere Erwartungswerte sind die folgenden:

- ***p*-tes Moment** Das p-te absolute Moment ist $\mathbb{E}[|X|^p]$ für $p \ge 0$. Ist $X \ge 0$ oder $p \in \mathbb{N}$, dann lässt sich auch das p-te Moment $\mu_p = \mathbb{E}[X^p]$ definieren. Existiert das zweite Moment, dann nennen wir

  $$\mathrm{Var}[X] = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$$

  die **Varianz**.

- Existieren die zweiten Momente von X und Y, so nennen wir

  $$\mathrm{Cov}[X, Y] = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])] = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$$

  die **Kovarianz** von X und Y. Man sieht aus der Definition, dass $\mathrm{Cov}[X, X] = \mathrm{Var}[X]$, $\mathrm{Cov}[X, Y] = \mathrm{Cov}[Y, X]$, $\mathrm{Cov}[X, \alpha Y + \beta Z] = \alpha \,\mathrm{Cov}[X, Y] + \beta \,\mathrm{Cov}[X, Z]$. Ist $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[Y] = 0$, so erhalten wir aus

  $$\mathrm{Var}[X]\,\mathrm{Var}[Y] - (\mathrm{Cov}[X, Y])^2 = \mathbb{E}\Big[\Big(\sqrt{\mathrm{Var}[Y]}X - \frac{\mathrm{Cov}[X, Y]}{\sqrt{\mathrm{Var}[Y]}}Y\Big)^2\Big] \ge 0 ,$$

  dass $(\mathrm{Cov}[X, Y])^2 \le \mathrm{Var}[X]\,\mathrm{Var}[Y]$. Wir definieren die **Korrelation**

  $$\mathrm{Cor}[X, Y] = \frac{\mathrm{Cov}[X, Y]}{\sqrt{\mathrm{Var}[X]\,\mathrm{Var}[Y]}} \in [-1, 1] .$$

  Aus der binomischen Formel erhält man sofort die Gleichung

  $$\mathrm{Var}[X + Y] = \mathrm{Var}[X] + \mathrm{Var}[Y] + 2\,\mathrm{Cov}[X, Y] .$$

  Sind X und Y unkorreliert ($\mathrm{Cov}[X, Y] = 0$), so erhalten wir die einfache Formel $\mathrm{Var}[X + Y] = \mathrm{Var}[X] + \mathrm{Var}[Y]$.

- **Charakteristische Funktion** Die Funktion

$$\varphi_X : \mathbb{R} \to \mathbb{C},\ r \mapsto \mathbb{E}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}rX}] = \mathbb{E}[\cos rX] + \mathrm{i}\mathbb{E}[\sin rX]$$

  ist wohldefiniert und heisst charakteristische Funktion.

- **Momentenerzeugende Funktion** Die Funktion $M_X(r) = \mathbb{E}[\mathrm{e}^{rX}]$ heisst momentenerzeugende Funktion. Falls $X \geq 0$, dann ist $M_X(r) < \infty$ für $r \leq 0$. Es kann aber sein, dass $M_X(r) \neq \infty$ nur für $r = 0$. Wir haben im komplexen $M_X(r) = \varphi_X(-\mathrm{i}r)$.

- **Laplace-Transformierte** Die Funktion $\ell_X(r) = M_X(-r)$ heisst Laplace-Transformation.

- **Erzeugendenfunktion** Für $x > 0$ heisst die Funktion $\eta_X(x) = M_X(\log x) = \mathbb{E}[x^X]$ (Wahrscheinlichkeits-) Erzeugendenfunktion. Sie wird vor allem benutzt, falls $\mathbb{P}[X \in \mathbb{N}] = 1$.

Hilfssatz 2.6. *Es gilt für alle integrierbaren Zufallsvariablen X*

$$\mathbb{E}[X] = \int_0^\infty (1 - F(x))\,\mathrm{d}x - \int_{-\infty}^0 F(x)\,\mathrm{d}x\ .$$

Beweis. Dies folgt aus dem Satz von Fubini

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= \int_0^\infty x\,\mathrm{d}F(x) + \int_{-\infty}^0 x\,\mathrm{d}F(x) = \int_0^\infty \int_0^x \mathrm{d}y\,\mathrm{d}F(x) - \int_{-\infty}^0 \int_x^0 \mathrm{d}y\,\mathrm{d}F(x) \\
&= \int_0^\infty \int_y^\infty \mathrm{d}F(x)\,\mathrm{d}y - \int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^y \mathrm{d}F(x)\,\mathrm{d}y \\
&= \int_0^\infty (1 - F(y))\,\mathrm{d}y - \int_{-\infty}^0 F(y)\,\mathrm{d}y\ .
\end{aligned}$$

□

Hilfssatz 2.7. *Zwei Zufallsvariablen X und Y sind genau dann unabhängig, falls für alle messbaren beschränkten Funktionen f und g gilt, dass $\mathbb{E}[f(X)g(Y)] = \mathbb{E}[f(X)]\mathbb{E}[g(Y)]$.*

Beweis. Da $f = \mathbb{1}_A$ und $g = \mathbb{1}_B$ messbare Funktionen sind, ist die eine Richtung trivial. Sind X und Y unabhängig, dann gilt die Aussage für $f = \mathbb{1}_A$ und $g = \mathbb{1}_B$. Sei $\mathcal{H}$ der Raum der messbaren Funktionen f, für die die Aussage mit $g = \mathbb{1}_B$ gilt. $\mathcal{H}$

ist ein linearer Raum, enthält die Indikator- und die konstanten Funktionen. Seien nun $f_1, f_2, \dots$ beschränkte Funktionen aus $\mathcal{H}$ mit $f_1 \le f_2 \le \cdots$, $\sup_n f_n \le c$ und $f = \lim_n f_n$. Dann ist $f_n(X)\mathbb{1}_B(Y)$ eine monotone Folge und somit gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[f(X)\mathbb{1}_B(Y)] &= \mathbb{E}[\lim_n f_n(X)\mathbb{1}_B(Y)] = \lim_n \mathbb{E}[f_n(X)\mathbb{1}_B(Y)] \\ &= \lim_n \mathbb{E}[f_n(X)]\mathbb{E}[\mathbb{1}_B(Y)] = \mathbb{E}[f(X)]\mathbb{E}[\mathbb{1}_B(Y)] \;.\end{aligned}$$

Somit enthält $\mathcal{H}$ nach Satz 1.21 alle beschränkten messbaren Funktionen. Setzen wir nun $\mathcal{H}'$ den Raum der messbaren beschränkten Funktionen g, für die die Aussage für alle messbaren beschränkten f gilt. Dann folgt analog, dass $\mathcal{H}'$ alle messbaren beschränkten Funktionen enthält. □

Sind nun X und Y unabhängig, so erhalten wir $\varphi_{X+Y}(r) = \varphi_X(r)\varphi_Y(r)$. Analoge Aussagen gelten für $M_X(r)$, $\ell_X(r)$ und $\eta_X(x)$. Existieren die zweiten Momente von X und Y, so erhalten wir $\operatorname{Cov}[X,Y] = \operatorname{Cor}[X,Y] = 0$. Die Umkehrung gilt nicht. Ist X eine symmetrische Zufallsvariable, das heisst, $F(x) = 1-F(x-)$ für alle x, so dass $\mathbb{E}[|X|^3] < \infty$, dann ist $\mathbb{E}[X] = 0$. Setzen wir $Y = X^2$, so ist $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X^3] = 0$ (wegen der Symmetrie) und damit sind X und Y unkorreliert. Ist aber Y nicht deterministisch, dann gibt es ein x_0, so dass $\frac{1}{2} < \mathbb{P}[X \le x_0] < 1$ und damit

$$\mathbb{P}[X > x_0, Y > x_0^2] = \mathbb{P}[X > x_0] \ne \mathbb{P}[X > x_0]^2 = \mathbb{P}[X > x_0]\mathbb{P}[Y > x_0^2] \;.$$

Somit sind X und Y abhängig.

Hilfssatz 2.8. *Sei $\mathbb{P}[X \in \mathbb{N}] = 1$. Dann ist $\eta(x)$ unendlich oft in $(0,1)$ differenzierbar und*

$$\lim_{x \to 1} \eta^{(n)}(x) = \sum_{k=n}^{\infty} k(k-1)\cdots(k-n+1)\mathbb{P}[X = k]$$

(**faktorielle Momente**) *und*

$$\lim_{x \to 0} \eta^{(n)}(x) = \mathbb{P}[X = n] \;.$$

Insbesondere ist die Verteilung von X durch $\eta(x)$ eindeutig festgelegt.

Beweis. Dies folgt sofort aus der Theorie der Potenzreihen. □

Beispiel 2.9. Sei X eine Zufallsvariable mit $\mathbb{P}[X \in \mathbb{N}] = 1$ und setzen wir $p(n) = \mathbb{P}[X = n]$. Die **Panjer-Klasse** sind die Verteilungen, bei denen es Zahlen a und b gibt, so dass

$$p(n+1) = \Bigl(a + \frac{b}{n+1}\Bigr)p(n) .$$

Multiplizieren wir die Gleichung mit $(n+1)x^n$ und addieren die Gleichungen, erhalten wir

$$\sum_{n=0}^\infty (n+1)x^n p(n+1) = a\sum_{n=0}^\infty (n+1)x^n p(n) + b\sum_{n=0}^\infty x^n p(n) .$$

Dies können wir schreiben als

$$\eta'(x) = (ax\eta(x))' + b\eta(x) ,$$

also

$$(1-ax)\eta'(x) = (a+b)\eta(x) .$$

Ist $a = 0$ erhalten wir $\eta(x) = p(0)\mathrm{e}^{bx}$. Mit Hilfe von $\eta(1) = 1$ finden wir $\eta(x) = \mathrm{e}^{-b(1-x)}$. Da $\mathrm{e}^{-b} = \eta(0) \le 1$, muss $b \ge 0$ gelten. Aus der Taylorformel erhalten wir die Poisson-Verteilung $p(n) = b^n \mathrm{e}^{-b}/n!$, falls $b \ne 0$.

Ist $a \ne 0$, erhalten wir $\eta(x) = p(0)(1-ax)^{-(a+b)/a}$. Also haben wir

$$\eta(x) = \Bigl(\frac{1-a}{1-ax}\Bigr)^{(a+b)/a} .$$

Ist $a + b = 0$, so ist $\eta(x) = 1$, also $p(0) = 1$ und $p(n) = 0$ für alle $n \ge 1$. Nehmen wir also $a + b \ne 0$ an. Da $\eta(x)$ für $x \in [0,1]$ wohldefiniert ist, muss $a \le 1$ gelten. Da $\eta(x) = 0$ keine Erzeugendenfunktion ist, können wir auch $a = 1$ ausschliessen. Da $\eta(x)$ wachsend ist, folgern wir, dass $a+b > 0$. Wir erhalten aus der Taylorentwicklung

$$p(n) = (1-a)^{(a+b)/a}\binom{-(a+b)/a}{n}(-a)^n = \binom{n+b/a}{n}(1-a)^{(a+b)/a}a^n ,$$

wobei wir hier den Binomialkoeffizienten als

$$\binom{y}{n} = \frac{y(y-1)\cdots(y-n+1)}{n!}$$

definieren. Ist $a > 0$, ist dies die **Negativbinomialverteilung**. Ist $a < 0$, sehen wir, dass $p(n)$ negativ wird, ausser wenn $n_0 = -b/a - 1 \in \mathbb{N}$. Wir schreiben dann

$$p(n) = \binom{n_0}{n}\Bigl(\frac{-a}{1-a}\Bigr)^n\Bigl(\frac{1}{1-a}\Bigr)^{n_0-n} .$$

Dies ist die Binomialverteilung. ■

Ist die momentenerzeugende Funktion auf einem Intervall definiert, dann ist auch die Verteilung eindeutig festgelegt. Dies werden wir in Proposition 9.3 beweisen.

Beispiel 2.10. Sei X standard normalverteilt. Dann ist die momentenerzeugende Funktion

$$M_X(r) = \mathbb{E}[\mathrm{e}^{rX}] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{rx}\mathrm{e}^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-(x-r)^2/2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{e}^{r^2/2} = \mathrm{e}^{r^2/2}\;.$$

Ist X normalverteilt mit Mittelwert μ und Varianz σ^2, dann ist $(X-\mu)/\sigma$ standardnormalverrteilt. Also erhalten wir

$$M_X(r) = \mathbb{E}[\mathrm{e}^{rX}] = \mathbb{E}[\mathrm{e}^{(r\sigma)[(X-\mu)/\sigma]}]\mathrm{e}^{r\mu} = \mathrm{e}^{r\mu+r^2\sigma^2/2}\;.$$

Eine momentenerzeugende Funktion, deren Logarithmus eine quadratische Funktion ist, gehört somit zu einer Normalverteilung. ■

Die folgenden Ungleichungen wurden in der Einführung in die Stochastik bewiesen.

Hilfssatz 2.11. (Jensens Ungleichung) *Sei X eine Zufallsvariable mit endlichem Erwartungswert und $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine konvexe Funktion, so dass $\mathbb{E}[u(X)]$ existiert. Dann gilt $\mathbb{E}[u(X)] \ge u(\mathbb{E}[X])$. Ist $\mathbb{P}[X = \mathbb{E}[X]] < 1$ und $u(x)$ strikt konvex, dann gilt die strikte Ungleichung.* □

Hilfssatz 2.12. *Sei $h(x)$ eine positive wachsende Funktion. Dann gilt*

$$h(c)\mathbb{P}[X \ge c] \le \mathbb{E}[h(X)]\;.$$

Insbesondere gelten die **Markov-Ungleichung**

$$\mathbb{P}[|X| \ge c] \le c^{-1}\mathbb{E}[|X|]$$

und die **Chebychev-Ungleichung**

$$\mathbb{P}[|X - \mathbb{E}[X]| \ge c] \le c^{-2}\,\mathrm{Var}[X]\;.$$

□

Wir erhalten insbesondere: ist $X \ge 0$ mit $\mathbb{E}[X] = 0$, so ist $\mathbb{P}[X \ge c] = 0$ für alle $c > 0$, also $\mathbb{P}[X = 0] = 1$. Ist $\mathrm{Var}[X] = 0$, so ist $\mathbb{P}[X = \mathbb{E}[X]] = 1$.

Wir sagen $X \in \mathcal{L}^p$, falls $\mathbb{E}[|X|^p] < \infty$ für $p \in (0,\infty)$. Wir sagen $X \in \mathcal{L}^\infty$, falls $\mathbb{P}[|X| \le c] = 1$ für eine Konstante $c \in \mathbb{R}$. Wir definieren $\|X\|_p = (\mathbb{E}[|X|^p])^{1/p}$ für $p \in (0,\infty)$ und $\|X\|_\infty = \inf\{c \in \mathbb{R} : \mathbb{P}[|X| \le c] = 1\}$. Aus Jensens Ungleichung folgern wir für $0 < q < p < \infty$, dass

$$\mathbb{E}[|X|^q] = \mathbb{E}[(|X|^p)^{q/p}] \le \mathbb{E}[|X|^p]^{q/p}\;.$$

Daraus folgt, dass $\|X\|_q \le \|X\|_p$. Es folgt einfach, dass die Aussage auch für $p = \infty$ gilt.

Hilfssatz 2.13. (Hölder'sche Ungleichung) *Seien $p, q \in [1, \infty]$, so dass $p^{-1} + q^{-1} = 1$, $X \in \mathcal{L}^p$ und $Y \in \mathcal{L}^q$. Dann ist $XY \in \mathcal{L}^1$ und $\|XY\|_1 \le \|X\|_p \|Y\|_q$.*

Beweis. Die Aussage ist für $p \in \{1, \infty\}$ trivial. Nehmen wir also $p \in (1, \infty)$ an. Ist $\|X\|_p = 0$, so folgt, dass $X = 0$ (fast sicher). In diesem Fall gilt die Aussage. Wir können also $\|X\|_p > 0$ und $\|Y\|_q > 0$ annehmen. Sei zuerst $\|X\|_p = \|Y\|_q = 1$. Da die Funktion $f(x, y) = p^{-1}x^p + q^{-1}y^q - xy$ für $x, y > 0$ ihr Minimum in $f(1, 1) = 0$ annimmt, folgern wir, dass

$$\mathbb{E}[|XY|] \le \mathbb{E}[|X|^p/p + |Y|^q/q] = p^{-1} + q^{-1} = 1 = \|X\|_p \|Y\|_q \; .$$

Die Aussage gilt also in diesem Fall. Da $\|X/\|X\|_p\|_p = 1$, folgt nun die Aussage im allgemeinen Fall. □

Hilfssatz 2.14. (Minkowski-Ungleichung) *Für $p \in [1, \infty]$ und $X, Y \in \mathcal{L}^p$ gilt*

$$\|X + Y\|_p \le \|X\|_p + \|Y\|_p \; .$$

Beweis. Für $p = \infty$ folgt die Aussage aus der Dreiecksungleichung für $\mathbb{R}$. Sei also $p < \infty$. Aus $|X + Y|^p \le 2^p(|X|^p + |Y|^p)$ folgern wir, dass $X + Y \in \mathcal{L}^p$. Da $|X + Y| \le |X| + |Y|$, können wir $X, Y \ge 0$ annehmen. Wir haben nun für $q = p/(p - 1)$,

$$\begin{aligned}
\|X + Y\|_p^p &= \mathbb{E}[(X + Y)^p] = \mathbb{E}[(X + Y)(X + Y)^{p-1}] \\
&\le (\|X\|_p + \|Y\|_p)\|(X + Y)^{p-1}\|_q = (\|X\|_p + \|Y\|_p)\mathbb{E}[(X + Y)^p]^{(p-1)/p} \\
&= (\|X\|_p + \|Y\|_p)\|X + Y\|_p^{p-1} \; ,
\end{aligned}$$

wobei wir die Hölder-Ungleichung verwendet haben. Dies ist äquivalent zur Aussage. □

Identifizieren wir also alle Variablen, die fast sicher gleich sind, so haben wir einen normierten Raum. Wir zeigen nun als nächstes, dass $\mathcal{L}^p$ ein Banachraum ist.

Proposition 2.15. *Sei $p \in [1, \infty]$. Dann ist der Raum $\mathcal{L}^p$ ein Banachraum.*

Beweis. Wir müssen nun noch zeigen, dass der Raum vollständig ist. Sei nun $\{X_i\}$ eine Cauchyfolge. Sei $\{n_k\}$ eine wachsende Folge, so dass $\|X_m - X_{n_k}\|_p < k^{-2}$ für alle $m > n_k$. Setzen wir $Y_k = X_{n_{k+1}} - X_{n_k}$. Dann ist

$$\Big\| \sum_{k=1}^n |Y_k| \Big\|_p \le \sum_{k=1}^n \|Y_k\|_p \le \sum_{k=1}^n k^{-2} \; .$$

Monotone Konvergenz ergibt, dass $\mathbb{E}[\sum_{k=1}^\infty |Y_k|] \le \mathbb{E}[(\sum_{k=1}^\infty |Y_k|)^p] < \infty$. Also ist $\sum_{k=1}^\infty Y_k$ fast sicher absolut konvergent. Es existiert ein Grenzwert $X = X_{n_1} + \sum_{k=1}^\infty Y_k$ von $\{X_{n_k}\}$. Da $\|X\|_p \le \|X_{n_1}\|_p + \sum_{k=1}^\infty \|Y_k\|_p < \infty$, ist $X \in \mathcal{L}^p$. Sei $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$. Dann gibt es ein $m > \varepsilon^{-1}$, so dass $\sum_{k=m}^\infty k^{-2} < \varepsilon/2$. Sei $n > n_m$. Dann ist

$$\|X_n - X\|_p \le \|X_n - X_{n_m}\|_p + \Big\|\sum_{k=m}^\infty Y_k\Big\|_p < m^{-2} + \sum_{k=m}^\infty k^{-2} < \varepsilon\;.$$

Somit konvergiert X_n nach X in $\mathcal{L}^p$. Damit ist $\mathcal{L}^p$ vollständig. □

Korollar 2.16. *Für $X, Y \in \mathcal{L}^2$ sei $(X, Y) := \mathbb{E}[XY]$. Dann ist (X, Y) ein Skalarprodukt auf $\mathcal{L}^2$. Der Raum $\mathcal{L}^2$ ist ein Hilbertraum.*

Beweis. Dass $(X, Y) = (Y, X)$ und $(X, \alpha Y + Z) = \alpha(X, Y) + (X, Z)$ ist klar. Aus $(X, X) = \mathbb{E}[X^2] \ge 0$ folgt die Positivität. Ist $(X, X) = 0$, so ist $\mathbb{E}[X^2] = 0$ und damit $X = 0$ (f.s). Also haben wir ein Skalarprodukt. Da $\|X\|_2 = \sqrt{(X, X)}$, wird die Norm auf $\mathcal{L}^2$ vom Skalarprodukt erzeugt. Die Vollständigkeit haben wir in Proposition 2.15 gezeigt. □

2.3. Konvergenzbegriffe

Seien nun $\{X_i\}$ und X Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Wir definieren nun verschiedene Arten von Konvergenz von X_n nach X.

- **Stochastische Konvergenz** Wir sagen X_n konvergiert stochastisch gegen X, $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$, falls
$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}[|X_n - X| \ge \varepsilon] = 0$$
für alle $\varepsilon > 0$.

- **Fast sichere Konvergenz** Wir sagen X_n konvergiert fast sicher gegen X, $X_n \to X$, falls
$$\mathbb{P}[\{\omega : \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\}] = 1\;.$$

- **$\mathcal{L}^p$-Konvergenz**, $p \ge 1$ Wir sagen, X_n konvergiert in $\mathcal{L}^p$ gegen X, falls
$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[|X_n - X|^p] = 0\;.$$

- **Konvergenz in Verteilung** Wir sagen X_n konvergiert in Verteilung gegen X, $X_n \stackrel{\mathrm{d}}{\to} X$, falls
$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}[X_n \le x] = \mathbb{P}[X \le x]$$
für alle $x \in \mathbb{R}$, an denen $F_X(x)$ stetig ist. Dieser Konvergenzbegriff betrachtet nur die Verteilungen. Zum Beispiel sind $\{X_k\}$ unabhängig und identisch verteilt, dann konvergiert X_n in Verteilung gegen X_1. Dieser Konvergenzbegriff kann daher nur verwendet werden, wenn wir uns nicht für $\lim_{n\to\infty} X_n$ interessieren, sondern für die Verteilungen.

Wir wollen die Konvergenzbegriffe nun vergleichen. Wir konzentrieren uns dabei auf die ersten drei Begriffe, da der letzte Konvergenzbegriff von einer anderen Art ist.

Proposition 2.17.

i) *"Fast sichere Konvergenz" impliziert "stochastische Konvergenz."*

ii) *"$\mathcal{L}^p$-Konvergenz" impliziert "stochastische Konvergenz."*

iii) *Für $q > p$ impliziert "$\mathcal{L}^q$-Konvergenz" die "$\mathcal{L}^p$-Konvergenz."*

iv) *Ist $\mathbb{E}[(\sup_n |X_n|)^p] < \infty$, so folgt die "$\mathcal{L}^p$-Konvergenz" aus der "fast sicheren Konvergenz."*

v) *Sei für jedes $\varepsilon > 0$*
$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}[|X_n - X| \ge \varepsilon] < \infty\;.$$
Dann konvergiert X_n sowohl stochastisch als auch fast sicher gegen X. Insbesondere hat jede stochastisch konvergente Folge eine fast sicher konvergente Teilfolge.

Beweis. i) Die fast sichere Konvergenz ist gleichbedeutend mit
$$\mathbb{P}[\cap_k \cup_m \cap_{n\ge m}\{|X_n - X| \le k^{-1}\}] = 1$$
(für alle k gibt es ein m, so dass für alle $n \ge m$, $|X_n - X| \le k^{-1}$ gilt). Also gilt
$$\mathbb{P}[\cup_m \cap_{n\ge m} \{|X_n - X| \le \ell^{-1}\}] \ge \mathbb{P}[\cap_k \cup_m \cap_{n\ge m}\{|X_n - X| \le k^{-1}\}] = 1\;.$$
Wegen der Monotonie in m haben wir weiter
$$1 = \mathbb{P}[\cup_m \cap_{n\ge m} \{|X_n - X| \le k^{-1}\}] = \lim_{m\to\infty} \mathbb{P}[\cap_{n\ge m}\{|X_n - X| \le k^{-1}\}]$$

für alle k. Wir können k^{-1} durch ε ersetzen. Also haben wir

$$\lim_{m\to\infty} \mathbb{P}[|X_m - X| \le \varepsilon] \ge \lim_{m\to\infty} \mathbb{P}[\cap_{n\ge m}\{|X_n - X| \le \varepsilon\}] = 1 \;.$$

Dies ist die stochastische Konvergenz.

ii) Dies folgt sofort mittels der Markov-Ungleichung aus

$$\mathbb{P}[|X_n - X| \ge \varepsilon] = \mathbb{P}[|X_n - X|^p \ge \varepsilon^p] \le \frac{\mathbb{E}[|X_n - X|^p]}{\varepsilon^p} \;.$$

iii) Dies folgt sofort aus der Ordnung der $\mathcal{L}^p$ Normen.

iv) Dies folgt aus der Eigenschaft der beschränkten Konvergenz.

v) Aus dem Borel–Cantelli-Lemma folgt, dass

$$\mathbb{P}[\{|X_n - X| \ge \varepsilon \text{ unendlich oft}\}] = 0 \;.$$

Sei nun $\{\varepsilon_m\}$ eine Folge von echt positiven Zahlen, die monoton gegen Null konvergiert. Dann ist

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[\cup_m\{|X_n - X| \ge \varepsilon_m \text{ unendlich oft}\}] &\le \sum_m \mathbb{P}[\{|X_n - X| \ge \varepsilon_m \text{ unendlich oft}\}]\\ &= 0 \;.\end{aligned}$$

Also konvergiert X_n fast sicher gegen X.

Konvergiert X_n stochastisch gegen X, so wählen wir eine wachsende Folge n_k, so dass $\mathbb{P}[|X_{n_k} - X| \ge k^{-1}] < k^{-2}$. Dann erfüllt $\{X_{n_k} : k \in \mathbb{N}\}$ die Bedingung und konvergiert somit fast sicher gegen X. □

2.4. Gesetze der Grossen Zahl

Seien $\{X_i\}$ Zufallsvariablen und $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$.

Satz 2.18. (Schwaches Gesetz der grossen Zahl) *Seien X_i Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}[X_i] = \mu_i$, so dass*

$$\sup_n \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \operatorname{Var}[X_i] < \infty \;.$$

Sind die $\{X_i\}$ paarweise unkorreliert, dann gilt für alle $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\Bigl[\frac{1}{n}\Bigl|\sum_{i=1}^n (X_i - \mu_i)\Bigr| > \varepsilon\Bigr] = 0 \;.$$

Beweis. Wegen der Unkorreliertheit gilt

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{Var}\Bigl[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i\Bigr] = \lim_{n\to\infty} n^{-2}\sum_{i=1}^n \operatorname{Var}[X_i] = 0 \;.$$

Somit folgt die Aussage aus der Chebychev-Ungleichung. □

Folgendes Resultat wurde in der Einführung in die Stochastik bewiesen.

Satz 2.19. (Starkes Gesetz der grossen Zahl) *Seien $\{X_k\}$ unabhängig mit festem Erwartungswert $\mathbb{E}[X_k] = \mu$. Weiter gelte eine der folgenden Bedingungen:*

i) *$\{X_k\}$ seien identisch verteilt.*

ii) *Es gelte $\sup_k \mathbb{E}[X_k^4] < \infty$.*

Dann gilt

$$\mathbb{P}[\lim_{n\to\infty} n^{-1}S_n = \mu] = 1 .$$

□

Korollar 2.20. (Satz von Glivenko–Cantelli) *Seien $\{X_k\}$ identisch verteilt. Die* **empirische Verteilungsfunktion** *ist definiert als $F_n(x) = n^{-1}\sum_{k=1}^n \mathbb{1}_{X_k\le x}$. Dann konvergiert $\sup_{x\in\mathbb{R}} |F_n(x) - F(x)|$ fast sicher nach 0.*

Beweis. Wir nehmen im Beweis an, dass die Verteilung stetig ist. Für den nicht-stetigen Fall können wir den Beweis einfach anpassen. Sei $\varepsilon > 0$ und $m > 4\varepsilon^{-1} + 1$. Wählen wir $x_0 < x_1 < \cdots < x_m$, so dass $F(x_0) < \varepsilon/4$ und $1 - F(x_m) < \varepsilon/4$ und $0 < F(x_k) - F(x_{k-1}) \le \varepsilon/4$ für $1 \le k \le m$. Da nach Satz 2.19 $F_n(x_k)$ nach $F(x_k)$ konvergiert, gibt es ein n_0, so dass $\max\{|F_n(x_k) - F(x_k)| : 0 \le k \le m\} < \varepsilon/4$. Somit gilt für $x < x_0$,

$$|F_n(x) - F(x)| \le F_n(x_0) + F(x_0) \le |F_n(x_0) - F(x_0)| + 2F(x_0) < 3\varepsilon/4 .$$

Analog ist für $x > x_m$,

$$|F_n(x) - F(x)| \le 1 - F_n(x_m) + 1 - F(x_m) \le |F_n(x_m) - F(x_m)| + 2(1 - F(x_m)) < 3\varepsilon/4 .$$

Für $x_{k-1} \le x \le x_k$, $k = 1, \ldots, m$, erhalten wir im Falle $F_n(x) \ge F(x)$,

$$F_n(x) - F(x) \le |F_n(x_k) - F(x_k)| + F(x_k) - F(x) < 2\varepsilon/4 ,$$

und im Falle $F_n(x) < F(x)$,

$$F(x) - F_n(x) \le F(x) - F(x_{k-1}) + |F(x_{k-1}) - F_n(x_{k-1}) < 2\varepsilon/4 .$$

Also gilt $\sup_{x\in\mathbb{R}} |F_n(x) - F(x)| \le 3\varepsilon/4 < \varepsilon$. Da ε beliebig war, folgt die Aussage. □

Um das nächste Resultat zu beweisen benötigen wir

Hilfssatz 2.21. *Seien $\{Y_i\}$ unabhängige Zufallsvariablen, so dass $\mathbb{E}[|Y_i|^2] < \infty$ und $\mathbb{E}[Y_i] = 0$. Sei $\{b_i\}$ eine wachsende Folge von streng positiven Zahlen, die gegen unendlich konvergiert, so dass $\sum_{k=1}^{\infty} b_k^{-2}\mathbb{E}[Y_k^2] < \infty$. Dann konvergiert die Summe $\sum_{k=1}^{\infty} b_k^{-1} Y_k$ fast sicher und $b_n^{-1}\sum_{k=1}^{n} Y_k$ konvergiert nach 0.*

Beweis. Sei $n > m$ und $A_{m,n}(\varepsilon) = \{\exists k \in [m,n) : |\sum_{i=k+1}^{n} b_i^{-1}Y_i| > \varepsilon\}$. Dann folgt aus der Chebychev-Ungleichung

$$\mathbb{P}[A_{m,n}(\varepsilon)] \le \varepsilon^{-2}\operatorname{Var}\Big[\sum_{i=m+1}^{n} b_i^{-1}Y_i\Big] = \varepsilon^{-2}\sum_{i=m+1}^{n} b_i^{-2}\mathbb{E}[Y_i^2]\,.$$

Lassen wir $n \to \infty$, erhalten wir

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\Big[\exists k, n,\, m \le k < n, \Big|\sum_{i=k+1}^{n} b_i^{-1}Y_i\Big| > \varepsilon\Big] &\le \varliminf_{n\to\infty} \mathbb{P}[A_{m,n}(\varepsilon/2)] \\ &\le 4\varepsilon^{-2}\sum_{i=m+1}^{\infty} b_i^{-2}\mathbb{E}[Y_i^2]\,.\end{aligned}$$

Wir können eine Teilfolge $\{m_k\}$ finden, so dass die Summe über die rechte Seite konvergiert. Nach dem Borel–Cantelli-Lemma tritt somit das Ereignis auf der linken Seite nur für endlich viele m_k ein. Es folgt also, dass $\sum_{k=1}^{m} b_k^{-1}Y_k$ eine Cauchy-Folge ist und daher konvergiert. Sei $\rho_k = \sum_{i=k+1}^{\infty} b_i^{-1}Y_i$ und r so, dass $|\rho_k| < \varepsilon$ für $k \ge r$. Dann haben wir

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} Y_i}{b_n} = -\rho_n + b_n^{-1}\sum_{k=1}^{n-1}\rho_k(b_{k+1} - b_k) + b_n^{-1}b_1\rho_1\,.$$

Mit $n \to \infty$ konvergieren die Terme $-\rho_n$, $b_n^{-1}\sum_{k=1}^{r}\rho_k(b_{k+1}-b_k)$ und $b_n^{-1}b_1\rho_1$ nach Null. Die restlichen Terme sind durch ε beschränkt. Dies beweist den Hilfssatz. □

Proposition 2.22. *Seien die $\{X_n\}$ unabhängig und identisch verteilt. Sei $p \in (0,2)$. Dann gilt*

$$\lim_{n\to\infty} n^{-1/p}(S_n - an) = 0 \tag{2.2}$$

für eine Konstante a genau dann, wenn $\mathbb{E}[|X|^p] < \infty$. Falls (2.2) für ein $p \in [1,2)$ erfüllt ist, dann ist $a = \mu$. Ist $p < 1$, dann kann a beliebig gewählt werden.

Beweis. Aus Satz 2.19 folgt, dass $a = \mathbb{E}[X]$, falls $p \geq 1$. Ist $p < 1$, kann a beliebig gewählt werden. Wir nehmen daher $a = 0$ an. Gilt (2.2), dann haben wir, dass $\{|X_n| > n^{1/p}\}$ nur endlich oft eintritt. Somit tritt $\{|X_n|^p > n\}$ nur endlich oft ein. Nach dem Borel–Cantelli-Lemma muss dann

$$\mathbb{E}[|X|^p] \leq \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}[|X_n|^p > n] < \infty$$

gelten ($|X|^p$ auf ganze Zahlen aufrunden).

Nehmen wir nun $\mathbb{E}[|X|^p] < \infty$ an. Sei $X_n' = X_n \mathbb{1}_{|X_n| \leq n^{1/p}}$ und $X_n'' = X_n \mathbb{1}_{|X_n| > n^{1/p}}$. Da $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}[|X_n|^p > n] \leq \mathbb{E}[|X|^p]$, tritt nach dem Borel–Cantelli-Lemma $\{X_n'' \neq 0\}$ nur endlich oft ein. Insbesondere gilt

$$\lim_{n\to\infty} n^{-1/p} \sum_{k=1}^{n} X_k'' = 0 \; .$$

Wir erhalten

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} k^{-2/p} \mathbb{E}[{X_k'}^2] &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{k} \int_{(j-1)^{1/p} < |x| \leq j^{1/p}} x^2 \, \mathrm{d}F(x) k^{-2/p} \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \int_{(j-1)^{1/p} < |x| \leq j^{1/p}} x^2 \, \mathrm{d}F(x) \sum_{k=j}^{\infty} k^{-2/p} \; .\end{aligned}$$

Die innere Summe ist durch $Cj^{-2/p+1}$ beschränkt, wobei C eine geeignete Konstante ist. Also

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} k^{-2/p} \mathbb{E}[{X_k'}^2] &\leq C \sum_{j=1}^{\infty} \int_{(j-1)^{1/p} < |x| \leq j^{1/p}} j \Big(\frac{x}{j^{1/p}}\Big)^2 \, \mathrm{d}F(x) \\ &\leq C \sum_{j=1}^{\infty} (j^{1/p})^p [F(j^{1/p}) - F((j-1)^{1/p}) + F(-(j-1)^{1/p}) - F(-j^{1/p})] \\ &\leq C + 2C\mathbb{E}[|X|^p] < \infty \; .\end{aligned}$$

Aus Hilfssatz 2.21 folgt, dass $n^{-1/p}(S_n' - \mathbb{E}[S_n']) \to 0$. Da auch

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{-2/p} \mathbb{E}[X_k']^2 \leq \sum_{k=1}^{\infty} k^{-2/p} \mathbb{E}[{X_k'}^2] < \infty \; ,$$

folgern wir, dass $n^{-1/p}\mathbb{E}[S_n'] \to 0$. □

2.5. Die Laplace-Transformation

Sei X eine Zufallsvariable. Mit $\ell_X(r) = \mathbb{E}[\mathrm{e}^{-rX}]$ bezeichnen wir die **Laplace–Stieltjes-Transformation**. Wir nehmen nun an, dass es ein $r \neq 0$ gibt, so dass $\ell_X(r) < \infty$. Nehmen wir für den Moment an, dass $X \geq 0$. Dann existiert $\ell_X(r)$ für alle $r \geq 0$ und $\ell_X(r)$ ist eine stetige fallende Funktion. Existiert $\ell_X(r)$ für ein $r < 0$, so existiert $\ell_X(s)$ für alle $s \in [r, \infty)$. Wir erhalten mit Hilfe des Satzes von Fubini

$$\ell_X(r) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-rx} \,\mathrm{d}F(x) = \int_0^\infty \int_x^\infty r\mathrm{e}^{-ry} \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}F(x) = r\int_0^\infty \mathrm{e}^{-ry} F(y) \,\mathrm{d}y \;.$$

Dies ist eine klassische Laplace-Transformation. Man weiss, dass wenn zwei Funktionen die selbe Laplace-Transformierte haben, dann sind die Funktionen Lebesgue fast sicher identisch, siehe auch Abschnitt 9.1. Da F steigend und rechtsstetig ist, ist die Verteilung also durch die Laplace–Stieltjes-Transformation eindeutig festgelegt. Diese Aussage gilt auch für X, die auf $\mathbb{R}$ verteilt sind, sofern es ein $r \neq 0$ gibt, für das $\ell_X(r) < \infty$.

Seien nun X und Y unabhängige Variablen. Dann erhalten wir

$$\ell_{X+Y}(r) = \mathbb{E}[\mathrm{e}^{-r(X+Y)}] = \mathbb{E}[\mathrm{e}^{-rX}\mathrm{e}^{-rY}] = \mathbb{E}[\mathrm{e}^{-rX}]\mathbb{E}[\mathrm{e}^{-rY}] = \ell_X(r)\ell_Y(r) \;.$$

Durch Standard-Abschätzungen der Exponentialfunktion erhalten wir in der folgenden Rechnung, dass man Erwartungswert und Ableitung vertauschen darf.

$$\ell_X^{(n)}(r) = \frac{\mathrm{d}^n \ell_X}{\mathrm{d}r^n}(r) = \mathbb{E}\Big[\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}r^n}\mathrm{e}^{-rX}\Big] = (-1)^n \mathbb{E}[X^n \mathrm{e}^{-rX}] \;.$$

Also hat man $\mathbb{E}[X^n] = (-1)^n \ell_X^{(n)}(0)$.

Ist N eine diskrete Variable, so erhalten wir

$$\ell_N(r) = \mathbb{E}[\mathrm{e}^{-rN}] = \mathbb{E}[(\mathrm{e}^{-r})^N] = \eta_N(\mathrm{e}^{-r}) \;.$$

Wir können also $\ell_N(r)$ mit Hilfe der Erzeugendenfunktion ausdrücken.

Betrachten wir eine affine Transformation $Y = a + bX$, so folgt sofort, dass $\ell_Y(r) = \mathrm{e}^{-ra}\ell_X(rb)$. Somit genügt es, Grundtypen von Verteilungen zu betrachten. Wir betrachten nun ein paar Beispiele.

- **Exponentialverteilung:** Hier erhalten wir einfach die Formel $\ell_X(r) = \alpha/(\alpha + r)$.

- **Normalverteilung:** Für die Standard-Normalverteilung folgt

$$\ell_X(r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-rx} \mathrm{e}^{-x^2/2} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-(x+r)^2/2} \, \mathrm{d}x \; \mathrm{e}^{r^2/2} = \mathrm{e}^{r^2/2} \; .$$

Insbesondere folgt für $N(\mu, \sigma^2)$, $\ell_X(r) = \mathrm{e}^{-r\mu + \sigma^2 r^2/2}$.

- **Gamma-Verteilung:** Hier erhalten wir

$$\ell_X(r) = \frac{\alpha^\gamma}{\Gamma(\gamma)} \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-rx} x^{\gamma-1} \mathrm{e}^{-\alpha x} \, \mathrm{d}x = \frac{\alpha^\gamma}{\Gamma(\gamma)} \, \frac{\Gamma(\gamma)}{(\alpha + r)^\gamma} = \left(\frac{\alpha}{\alpha + r}\right)^\gamma \; .$$