Lösung der Klausur

1. Die Inverse der Kovarianzmatrix wird

$$\mathbf{\Sigma}^{-1} = \begin{pmatrix} 3.2 & -0.8 & -0.8 \\ -0.8 & 1.2 & 0.2 \\ -0.8 & 0.2 & 0.7 \end{pmatrix} .$$

Für die Nebenbedingungen benötigen wir

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\mu}^\top \mathbf{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu} &= \begin{pmatrix} 0.64 & 1.04 & 0.84 \end{pmatrix} \boldsymbol{\mu} = 3.568 , \\ \boldsymbol{\mu}^\top \mathbf{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{e} = \boldsymbol{e}^\top \mathbf{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu} &= \begin{pmatrix} 1.6 & 0.6 & 0.1 \end{pmatrix} \boldsymbol{\mu} = 2.52 , \\ \boldsymbol{e}^\top \mathbf{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{e} &= \begin{pmatrix} 1.6 & 0.6 & 0.1 \end{pmatrix} \boldsymbol{e} = 2.3 . \end{aligned}$$

Somit müssen wir das Gleichungssystem

$$3.568\varepsilon_1 + 2.52\varepsilon_2 = r , \qquad 2.52\varepsilon_1 + 2.3\varepsilon_2 = 1$$

lösen, was

$$\varepsilon_1 = -1.35776 + 1.23922r , \qquad \varepsilon_2 = 1.92241 - 1.35776r$$

ergibt. Wir erhalten also

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} &= (-1.35776 + 1.23922r) \begin{pmatrix} 0.64 \\ 1.04 \\ 0.84 \end{pmatrix} + (1.92241 - 1.35776r) \begin{pmatrix} 1.6 \\ 0.6 \\ 0.1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2.20689 - 1.37932r \\ -0.258624 + 0.474133r \\ -0.948277 + 0.905169r \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

2. Für ein äquivalentes Martingalmass muss $\tilde{S}_n = S_n r^{-n}$ ein Martingal sein. Sei nun $\mathbb{P}^*[Z_n = u] = \tilde{p}$ und $\mathbb{P}^*[Z_n = d] = \tilde{q}$. Dann muss

$$\frac{u}{r}\tilde{p} + \frac{d}{r}\tilde{q} + 1(1 - \tilde{p} - \tilde{q}) = 1$$

sein. Also $(u - r)\tilde{p} + (d - r)\tilde{q} = 0$, was für $\tilde{p} \in (0, 1)$

$$\tilde{q} = \frac{u - r}{r - d}\tilde{p} > 0$$

ergibt. Aus $\tilde{p}+\tilde{q}<1$, folgern wir, dass

$$\frac{u-d}{r-d}\tilde{p}<1\ ,$$

und damit $\tilde{p}\in(0,(r-d)/(u-d))$. Damit gilt auch $\tilde{q}\in(0,1)$. Da es ein äquivalentes Martingalmass gibt, ist der Markt arbitragefrei. Da das Mass nicht eindeutig ist, ist der Markt nicht vollständig.

3. Zum Zeitpunkt τ haben wir eine europäische Call-Option mit Ausübungspreis S_τ. Somit ist der Preis zur Zeit τ

$$S_\tau\Phi\Big(\frac{(r+\frac{1}{2}\sigma^2)\sqrt{T-\tau}}{\sigma}\Big)-S_\tau\mathrm{e}^{-r(T-\tau)}\Phi\Big(\frac{(r-\frac{1}{2}\sigma^2)\sqrt{T-\tau}}{\sigma}\Big)\ .$$

Zur Zeit $\tau\le t<T$ gilt die Black–Scholes Formel

$$V_t=S_t\Phi\Big(\frac{\log\frac{S_t}{S_\tau}+(r+\frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\Big)-S_\tau\mathrm{e}^{-r(T-t)}\Phi\Big(\frac{\log\frac{S_t}{S_\tau}+(r-\frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\Big)\ .$$

Die zugehörige Strategie ist

$$\begin{aligned}\phi_t&=\Phi\Big(\frac{\log\frac{S_t}{S_\tau}+(r+\frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\Big)\ ,\\ \phi_t^0&=-S_\tau\mathrm{e}^{-rT}\Phi\Big(\frac{\log\frac{S_t}{S_\tau}+(r-\frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\Big)\ .\end{aligned}$$

Für $0\le t<\tau$ erhalten wir

$$V_t=S_t\Big\{\Phi\Big(\frac{(r+\frac{1}{2}\sigma^2)\sqrt{T-\tau}}{\sigma}\Big)-\mathrm{e}^{-r(T-\tau)}\Phi\Big(\frac{(r-\frac{1}{2}\sigma^2)\sqrt{T-\tau}}{\sigma}\Big)\Big\}\ .$$

Somit wird die Strategie

$$\phi_t=\Phi\Big(\frac{(r+\frac{1}{2}\sigma^2)\sqrt{T-\tau}}{\sigma}\Big)-\mathrm{e}^{-r(T-\tau)}\Phi\Big(\frac{(r-\frac{1}{2}\sigma^2)\sqrt{T-\tau}}{\sigma}\Big)\ ,\quad \phi_t^0=0\ .$$