M. Freibert
S. Durst

Sommersemester 2018

Übungen zu „Differentialgeometrie“

Blatt 1

Keine Abgabe. Besprechung in den Übungen am 16.04.2018 und 23.04.2018.

1. Zeigen Sie: Eine differenzierbare Mannigfaltigkeit ist genau dann zusammenhängend, wenn Sie wegzusammenhängend ist.

2. Zeigen Sie, dass S^1 eine Lie-Gruppe ist und folgern Sie, dass dann auch der n-Torus $T^n = \underbrace{S^1 \times \ldots \times S^1}_{n\text{-mal}}$ eine Lie-Gruppe ist, indem Sie allgemein zeigen, dass das Produkt $G \times H$ zweier Lie-Gruppen G und H wieder eine Lie-Gruppe ist.

3. Es seien M und N Mannigfaltigkeiten und $p \in M$ sowie $q \in N$ gegeben. Zeigen Sie, dass die Inklusionsabbildungen $\iota_q : M \to M \times \{q\}$ und $\iota_p : N \to \{q\} \times N$ Einbettungen von M bzw. N in $M \times N$ sind und dass dann $T_{(p,q)}M = d\iota_q(T_pM) \oplus d\iota_p(T_qN)$ gilt.

4. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n := \mathbb{R}^n/\sim$, wobei $x \sim y$ für $x, y \in \mathbb{R}^n$ genau dann gilt, wenn $x - y \in \mathbb{Z}^n$ gilt. Versehen Sie $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$, ausgestattet mit der Quotiententopologie, mit der Struktur einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit und zeigen Sie, dass $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ diffeomorph zum n-Torus T^n ist.

5. Eine *Überlagerung* ist eine stetige surjektive Abbildung $p : X \to Y$ zwischen zusammenhängenden topologischen Räumen X und Y, so dass es zu jedem Punkt $y \in Y$ eine offene Umgebung U von y gibt, so dass das Urbild $p^{-1}(U)$ eine Vereinigung offener disjunkter Mengen von X sind und die Einschränkung von p auf eine dieser offenen Mengen einen Homöomorphismus aufs Bild U liefert. Eine *Decktransformation von p* ist ein Homöomorphismus $f : X \to X$ mit $p \circ f = p$.

   Sei nun $p : X \to Y$ eine Überlagerung. Dann gilt:

   (a) Die natürliche Projektion $\pi : \mathbb{R}^n \to T^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ ist eine differenzierbare Überlagerung.

   (b) Die Menge der Decktransformationen $\mathrm{Deck}(p)$ bildet eine Gruppe.

   (c) Es sei nun Y eine zusammenhängende Mannigfaltigkeit sowie $y \in Y$ und $x \in p^{-1}(y)$ gegeben. Dann ist die Abbildung $\mathrm{Deck}(p) \ni f \mapsto f(x) \in p^{-1}(y)$ injektiv.

   (d) Bestimmen Sie alle Decktransformationen von $\pi : \mathbb{R}^n \to T^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$.