M. Freibert
S. Durst

Sommersemester 2018

Übungen zur „Differentialgeometrie“

Blatt 10

Abgabe am 25.06.2018. Selbstständige Besprechung in den Übungen am 02.07.2018.

1. Es sei (M, g) eine riemannsche Mannigfaltigkeit, $p \in M$ und U eine normale Umgebung von p in M sowie V eine offene Umgebung von 0_p in T_pN, so dass $\exp_p|_V$ ein Diffeomorphismus aufs Bild $\exp_p(V) = U$ ist. Sei weiter $F : (T_pM, g_p) \to (\mathbb{R}^n, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ eine lineare Isometrie. Wir definieren eine Karte (U, φ) („riemannsche Normalkoordinaten“) von M um p mit Kartenabbildung $\varphi := F \circ (\exp_p|_V)^{-1}$, $\varphi = (x_1, \ldots, x_n)$. Zeigen Sie, dass bezüglich dieser Karte
$$g_{ij}(p) = \delta_{ij}, \qquad \Gamma_{ij}^k(p) = 0, \qquad \tfrac{\partial g_{ij}}{\partial x_k}(p) = 0$$
für alle $i, j, k = 1, \ldots, n$ gilt.

   Hinweis: Betrachten Sie zum Beweis der zweiten Gleichung die Geodätischengleichung für $t \mapsto \exp_p(tv)$ in riemannschen Normalkoordinaten.

2. Es seien (M, g) und (N, h) zusammenhängende pseudo-riemannsche Mannigfaltigkeiten. Zeigen Sie:

   (a) Sind $f, g : M \to N$ zwei Isometrien von (M, g) nach (N, h) und existiert ein Punkt $p \in M$ mit $f(p) = g(p)$ und $df_p = dg_p$, so ist bereits $f = g$.
   Hinweis: Betrachten Sie die Menge aller Punkte $q \in M$ mit $f(q) = g(q)$ und $df_q = dg_q$ und verwenden Sie Blatt 9, Aufgabe 2 (c).

   (b) Ist Γ eine diskrete Lie-Gruppe von Isometrien von (M, g), die auf M frei und eigentlich wirkt, so gibt es auf der Mannigfaltigkeit M/Γ genau eine pseudo-riemannsche Metrik $\tilde{g}$, so dass die natürliche Projektion $\pi : (M, g) \to (M/\Gamma, \tilde{g})$ eine *pseudo-riemannsche Überlagerung* ist, d.h. π ist eine Überlagerung, differenzierbar und $g = \pi^*\tilde{g}$.

3. Es sei $M := \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ versehen mit der Lorentz-Metrik
$$g_{(x,y)}((v_1, v_2), (w_1, w_2)) := \tfrac{2(v_1w_2+v_2w_1)}{x^2+y^2}$$
für $(x, y) \in M$, $(v_1, v_2), (w_1, w_2) \in T_{(x,y)}M = \mathbb{R}^2$.

   Zeigen Sie, dass $f : M \to M$, $f(x, y) = 2(x, y)$ eine Isometrie von (M, g) ist, dass $\Gamma := \{\, f^n | \, n \in \mathbb{Z}\}$ auf M eigentlich und frei agiert und dass M/Γ diffeomorph zu T^2 ist. Versehen sie dann M/Γ mit der eindeutigen pseudo-riemannschen Metrik $\tilde{g}$, die die natürliche Projektion $\pi : M \to M/\Gamma$ zu einer pseudo-riemannschen Überlagerung macht und zeigen Sie, dass $(M/\Gamma, \tilde{g}) = (T^2, \tilde{g})$ („Clifton-Pohl-Torus“) eine Geodätische besitzt, deren maximales Existenzintervall nicht ganz $\mathbb{R}$ ist.

4. Es sei (M, g) eine geodätisch vollständige riemannsche Mannigfaltigkeit und (N, h) eine zusammenhängende riemannsche Mannigfaltigkeit.

   Zeigen Sie, dass es keine echte offene Teilmenge U von N gibt, so dass (M, g) isometrisch zu $(U, h|_U)$ ist.

   Bemerkung: Zusammenhängende geodätische vollständige riemannsche Mannigfaltigkeiten können also nicht „zusammenhängend erweitert“ werden.