M. Freibert
S. Durst

Sommersemester 2018

Übungen zur „Differentialgeometrie“

Blatt 11

Abgabe am 03.07. oder 04.07.2018 in der Vorlesung. Besprechung in den Übungen am 09.07.2018.

1. Es sei (M,g) eine riemannsche Mannigfaltigkeit, $p\in M$ und (U,φ), $\varphi=(x_1,\ldots,x_n)$ riemannsche Normalkoordinaten um $p\in M$ wie in Blatt 10, Aufgabe 1 (insbesondere also $\varphi(p)=0\in\mathbb{R}^n$). Leiten Sie die Gleichung für Geodätische in riemannschen Normalkoordinaten, die sie in Blatt 10, Aufgabe 1 erhalten haben, nochmals nach t ab und erhalten Sie daraus die Gleichheit
$$\frac{\partial\Gamma_{ij}^k}{\partial l}(p)+\frac{\partial\Gamma_{jl}^k}{\partial i}(p)+\frac{\partial\Gamma_{li}^k}{\partial j}(p)=0$$
für alle $i,j,k,l=1,\ldots,n$. Folgern sie hieraus mit Gleichung (2.2) des Skriptes, dass
$$\frac{\partial\Gamma_{ij}^k}{\partial x_l}=-\tfrac{1}{3}\left(R_{jli}^k(p)+R_{ilj}^k(p)\right)$$
für alle $i,j,k,l=1,\ldots,n$ ist und daraus, dass
$$g_{ij}(\varphi(x))=\delta_{ij}-\sum_{k,l=1}^{n}\tfrac{1}{3}R_{jlk}^i(\varphi(x))\,x_k\,x_l+S(x)$$
für alle $i,j=1,\ldots,n$ und alle $x\in\varphi(U)$ gilt, wobei $S:\varphi(U)\to\mathbb{R}$ gerade $\lim\limits_{x\to 0}\frac{S(x)}{\|x\|^2}=0$ erfüllt.

   Hinweis: Taylorentwicklung in $x=0$, „lokale“ Formel für die Metrizität aus Bemerkung 2.18, Symmetrien von R und $g_p(R_p(\partial_i(p),\partial_j(p))\partial_k(p),\partial_l(p)=R_{ijk}^l(p)$ für alle $i,j,k,l=1,\ldots,n$.

2. Zeigen Sie:

   (a) Ist M eine eindimensionale Mannigfaltigkeit und ∇ ein Zusammenhang auf M, so ist (M,∇) *flach*, d.h. es ist $R^\nabla\equiv 0$.

   (b) Ist (M,g) eine riemannsche Mannigfaltigkeit, $p\in M$, $\sigma\subseteq T_pM$ eine Tangentialebene und sowohl v_1,w_1 als auch v_2,w_2 eine Basis von σ, so gilt
$$\frac{g_p(R_p^g(v_1,w_1)w_1,v_1)}{\|v_1\|_p^2\,\|w_1\|_p^2-g_p(v_1,w_1)^2}=\frac{g_p(R_p^g(v_2,w_2)w_2,v_2)}{\|v_2\|_p^2\,\|w_2\|_p^2-g_p(v_2,w_2)^2}.$$

3. Zeigen Sie, dass die Isometriegruppe $\mathrm{Isom}(S^n,g_{st})$ von $(S^n,g_{st}$ durch $\mathrm{Isom}(S^n,g_{st})=\{f=A|_{S^n}\,|A\in\mathrm{O}(n+1)\}$ gegeben ist.

   Hinweis: Benutzen Sie Blatt 10, Aufgabe 2 (a).

4. Zeigen Sie, dass der n-dimensionale hyperbolische Raum (H_n,g_{H_n}) konstante Krümmung hat.

   Hinweis: Argumentieren Sie wie in Beispiel 2.70 (b) und benutzen Sie statt der Lie-Gruppe $\mathrm{O}(n)$ die Lie-Gruppe $\mathrm{O}(1,n)$ (zur Definition dieser Lie-Gruppe siehe Hinweis/Bemerkung in Aufgabe 4 von Blatt 4).