M. Freibert
S. Durst

Sommersemester 2018

Übungen zur „Differentialgeometrie“

Blatt 12

Abgabe am 09.07.2018. Besprechung in den Übungen am 16.07.2018.

1. Nach Blatt 11, Aufgabe 4 hat der n-dimensionale hyperbolische Raum (H_n, g_{H_n}) konstante Krümmung $\kappa \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass $\kappa = -1$ ist.

2. Es sei (M, g) eine n-dimensionale riemannsche Mannigfaltigkeit, $c : [0, a] \to M$ eine Geodätische von (M, g), $p := c(0)$ und $J \in \Gamma_c(TM)$ ein Jacobifeld längs c.
Zeigen Sie, dass dann
$$g_{c(t)}(J(t), \dot{c}(t)) = g_p(J(0), \dot{c}(0)) + t g_p\left(\tfrac{\nabla J}{dt}(0), \dot{c}(0)\right)$$
für alle $t \in [0, a]$ gilt und folgern sie hieraus, dass der Raum aller Jacobifelder J längs c mit $g_{c(t)}(J(t), \dot{c}(t)) = 0$ für alle $t \in [0, a]$ gerade $(2n-2)$-dimensional ist.

   Hinweis: Sie können diese Aussage direkt ohne Benutzung des Gauß-Lemmas, welches in der Vorlesung für den Spezialfall $J(0) = 0$ benutzt wurde, beweisen.

3. Es sei (M, g) eine flache riemannsche Mannigfaltigkeit, d.h. es gilt $R^g \equiv 0$. Zeigen Sie, dass dann für beliebiges $p \in M$ und $\epsilon > 0$ so klein, dass $\exp_p|_{B^{g_p}_\epsilon(0)} : B^{g_p}_\epsilon(0) \to \exp_p(B^{g_p}_\epsilon(0)) = B^d_\epsilon(p)$ ein Diffeomorphismus ist, $\exp_p|_{B^{g_p}_\epsilon(0)} : B^{g_p}_\epsilon(0) \to B^d_\epsilon(p)$ schon eine Isometrie von $(B^{g_p}_\epsilon(0), g_p)$ nach $(B^d_\epsilon(p), g|_{B^d_\epsilon(p)})$ ist.

   Hinweis: Sie müssen also zeigen, dass $d(\exp_p)_v : T_pM \to T_{\exp_p(v)}M$ für jedes $v \in B^{g_p}_\epsilon(0)$ die Längen von Tangentialvektoren $w \in T_pM$ erhält. Betrachten Sie dazu ein geeignetes Jacobifeld J längs c_v mit $J(0) = 0$ und leiten Sie eine explizite Formel für $t \mapsto \|J(t)\|^2_{c_v(t)}$ her.

4. Es sei (S^n, g_{st}) die n-dimensionale Sphäre versehen mit der Standardmetrik g_{st}, $d : S^n \times S^n \to M$ die von g_{st} auf M induzierte Metrik und $N := e_{n+1}$ der Nordpol von S^n. Finden Sie einen Punkt $p_0 \in S^n \setminus \{N\}$, in dem die Abstandsfunktion
$$S^n \setminus \{N\} \ni p \mapsto d(N, p) \in (0, \infty)$$
zu N nicht differenzierbar ist.