M. Freibert
S. Durst

Sommersemester 2018

Übungen zu „Differentialgeometrie“

Blatt 2

Abgabe am 23.04.2018. Besprechung in den Übungen am 30.04.2018.

1. Es sei G eine differenzierbare Mannigfaltigkeit ausgestattet mit einer Gruppenstruktur, so dass die Abbildung $G \times G \ni (g, h) \to gh^{-1} \in G$ differenzierbar ist. Zeigen Sie, dass G eine Lie-Gruppe ist.

2. Zeigen Sie, dass die natürliche Projektion $\pi : S^n \to \mathbb{R}P^n$ eine differenzierbare Überlagerung ist und bestimmen Sie die Menge $\mathrm{Deck}(\pi)$ aller Decktransformationen von π.

3. Es sei $\mathrm{DK} := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 = z^2\} \subseteq \mathbb{R}^3$ der *Doppelkegel*, ausgestattet mit der Teilraumtopologie, M und N Mannigfaltigkeiten und $f : M \to N$ differenzierbar. Zeigen Sie:

   (a) DK ist keine topologische Mannigfaltigkeit.

   (b) Der Graph $\mathrm{graph}(f) := \{(x, f(x)) | x \in M\} \subseteq M \times N$ von f ist eine Untermannigfaltigkeit von $M \times N$.

4. Es sei $M := [0, 1] \times \mathbb{R}/\sim$ das sogenannte *Möbiusband*, wobei $\sim$ die Äquivalenzrelation auf $[0, 1] \times \mathbb{R}$ ist, die $(0, t)$ mit $(1, -t)$ für $t \in \mathbb{R}$ identifiziert. Zeigen Sie, dass M, ausgestattet mit der Quotiententopologie, eine differenzierbare Mannigfaltigkeit ist.