M. Freibert
S. Durst

Sommersemester 2018

Übungen zu „Differentialgeometrie“

Blatt 3

Abgabe am 30.04.2018. Besprechung in den Übungen am 07.05.2018.

1. Ess sei $F : \mathbb{R}P^2 \to \mathbb{R}^4$, $F([x : y : z]) = \frac{(x^2-y^2,xy,xz,yz)}{x^2+y^2+z^2}$. Zeigen Sie:

   (a) F ist differenzierbar, injektiv und ein Homöomorphismus aufs Bild $F(\mathbb{R}P^2)$.
   Hinweis: Eine stetige bijektive Abbildung eines kompakten topologischen Raumes in einen Hausdorff-Raum ist automatisch ein Homöomorphismus.

   (b) Zeigen Sie, dass $dF_p : T_p\mathbb{R}P^2 \to \mathbb{R}^4$ für jedes $p \in \mathbb{R}P^2$ injektiv ist.

   Bemerkung: In der Vorlesung zeigen wir, dass die in dieser Aufgabe gezeigten Eigenschaften implizieren, dass $F : \mathbb{R}P^2 \to \mathbb{R}^4$ eine Einbettung und somit insbesondere $F(\mathbb{R}P^2)$ eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^4$ ist.

2. Eine *(differenzierbare) Wirkung* einer Lie-Gruppe G auf einer Mannigfaltigkeit M ist eine differenzierbare Abbildung $\cdot : G \times M \to M$ mit

$$e \cdot p = p, \qquad g_1 \cdot (g_2 \cdot p) = (g_1 \cdot g_2) \cdot p$$

   für alle $g_1, g_2 \in G$ und alle $p \in M$. Eine *G-Bahn* ist eine Teilmenge von M der Form $G \cdot p := \{g \cdot p | \, g \in G\}$ für ein $p \in M$. Der *Bahnenraum* M/G ist definiert durch $M/G := M/ \sim = \{G \cdot p | p \in M\}$, ausgestattet mit der Quotiententopologie, wobei $p \sim q$ für $p, q \in M$ genau dann gilt, wenn $q \in G \cdot p$ ist.

   Zeigen Sie:

   (a) $\sim$ ist tatsächlich eine Äquivalenzrelation auf M.

   (b) Die kanonische Projektion $\pi : M \to M/G$ ist offen und der topologische Raum M/G erfüllt das zweite Abzählbarkeitsaxiom.

3. Eine *diskrete* Lie-Gruppe ist eine Lie-Gruppe ausgestattet mit der diskreten Topologie. Zeigen Sie:

   (a) Eine abstrakte Gruppe G, ausgestattet mit der diskreten Topologie, ist genau dann eine diskrete Lie-Gruppe, wenn die Mächtigkeit von G höchstens abzählbar ist.

   (b) Eine Lie-Gruppe ist genau dann diskret, wenn sie null-dimensional ist.

   (c) Eine Abbildung $\cdot : G \times M \to M$ mit G eine diskrete Lie-Gruppe und M eine Mannigfaltigkeit ist genau dann eine differenzierbare Wirkung von G auf M, wenn $L_g : M \to M$, $L_g(p) := g \cdot p$, für jedes $g \in G$ ein Diffeomorphismus von M ist und $G \ni g \to L_g \in \mathrm{Diff}(M)$ ein Gruppenhomomorphismus ist.

4. (a) Die Lie-Gruppe S^1 wirkt auf der Mannigfaltigkeit S^2 durch $q \cdot (z, x) = (q \cdot z, x)$ für $q \in S^1 \subseteq \mathbb{C}$ und $(z, x) \in S^2 = \{(w, y) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R} | \, |w|^2 + y^2 = 1\}$ (dies müssen sie nicht zeigen). Zeigen Sie, dass der Bahnenraum S^2/S^1 homöomorph zum Intervall $[-1, 1]$ ist.

   (b) Zeigen Sie, dass die diskrete Lie-Gruppe $\mathbb{Q}$ auf $\mathbb{R}$ durch $\mathbb{Q} \times \mathbb{R} \ni (q, x) \mapsto q + x \in \mathbb{R}$ differenzierbar wirkt und der Bahnenraum $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ kein Hausdorff-Raum ist.