M. Freibert
S. Durst

Sommersemester 2018

Übungen zur „Differentialgeometrie“

Blatt 4

Abgabe am 07.05.2018. Besprechung in den Übungen am 14.05.2018.

1. Für $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sei $F := F_\alpha : \mathbb{R} \to T^2$, $F(t) = (e^{2\pi i t}, e^{2\pi i \alpha t})$. Zeigen Sie:

   (a) $F(\mathbb{R})$ und $T^2 \setminus F(\mathbb{R})$ sind beides *dichte* Teilmengen von T^2, d.h. jede offene Teilmenge von T^2 enthält sowohl Punkte aus $F(\mathbb{R})$ als auch aus $T^2 \setminus F(\mathbb{R})$. Folgern Sie hieraus, dass $F(\mathbb{R})$, ausgestattet mit der Teilraumtopologie, keine Untermannigfaltigkeit von T^2 ist.

   (b) F ist differenzierbar, injektiv und $dF_t : \mathbb{R} \to T_{F(t)}T^2$ ist injektiv für alle $t \in \mathbb{R}$.

2. Eine differenzierbare Gruppenwirkung $\cdot : G \times M \to M$ einer Lie-Gruppe G auf einer Mannigfaltigkeit M heißt *eigentlich*, wenn die Abbildung $P : G \times M \to M \times M$ $P(g, p) := (g \cdot p, p)$ *eigentlich* ist, d.h. wenn Urbilder kompakter Mengen unter P wieder kompakt sind.

   Zeigen Sie:

   (a) Eine eigentliche stetige Abbildung $f : M \to N$ zwischen Mannigfaltigkeiten M und N bildet abgeschlossene Mengen in M auf abgeschlossene Mengen in N ab.

   (b) Wirkt eine Lie-Gruppe G auf einer Mannigfaltigkeit M eigentlich, so ist der Bahnenraum M/G ein Hausdorff-Raum.

   Hinweis: Nutzen Sie in (a) und (b) sowie in der nächsten Aufgabe, dass eine differenzierbare Mannigfaltigkeit M *lokal kompakt* ist, d.h. für jeden Punkt $p \in M$ und jede offene Umgebung U von p gibt es eine offene Umgebung V von p, so dass der *Abschluss* $\overline{V}$ (d.h. die kleinste abgeschlossene Teilmenge von M, die V enthält) kompakt und in U enthalten ist.

3. Eine differenzierbare Gruppenwirkung $\cdot : G \times M \to M$ einer Lie-Gruppe G auf einer Mannigfaltigkeit M heißt *frei*, wenn aus $g \cdot p = p$ für $g \in G$ und $p \in M$ immer $g = e$ folgt.

   Zeigen Sie, dass eine diskrete Lie-Gruppe G auf einer Mannigfaltigkeit M genau dann eigentlich und frei wirkt, wenn folgende beiden Eigenschaften gelten:

   (i) Für jeden Punkt $p \in M$ existiert eine offene Umgebung U von p mit $(g \cdot U) \cap U = \emptyset$ für alle $g \in G \setminus \{e\}$ und

   (ii) für je zwei Punkte $p, q \in M$ mit $q \notin G \cdot p$ existieren offene Umgebungen U von p und V von q mit $(g \cdot U) \cap V = \emptyset$ für alle $g \in G$.

4. Es sei $B \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ symmetrisch oder anti-symmetrisch und

$$G_B := \left\{ A \in \mathbb{R}^{n \times n} | A^T B A = B \right\}.$$

Zeigen Sie, dass G_B eine Lie-Gruppe ist und bestimmen Sie die Dimension der Lie-Gruppe sowie den Tangentialraum $T_{I_n} G_B$ an der Identität I_n von G_B.

Hinweis/Bemerkung: Gehen Sie analog zum Vorgehen in der Vorlesung für $\mathrm{O}(n)$ vor und unterscheiden Sie zwischen B symmetrisch und B anti-symmetrisch.

Für $B = I_{p,n-p} := \mathrm{diag}(1, \ldots, 1, -1, \ldots, -1)$ mit p Einsen erhält man die *indefinite orthogonale Gruppe der Signatur* $(p, n-p)$ $\mathrm{O}(p, n-p)$ und für $n = 2m$ und $B = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -I_m \\ I_m & 0 \end{smallmatrix}\right)$ erhählt man die *(reelle) symplektische Gruppe* $\mathrm{Sp}(n, \mathbb{R})$.