M. Freibert
S. Durst

Sommersemester 2018

Übungen zur „Differentialgeometrie“

Blatt 5

Abgabe am 14.05.2018. Besprechung in den Übungen am 28.05.2018.

1. Eine diskrete Lie-Gruppe G wirke frei und eigentlich auf einer differenzierbaren n-dimensionalen Mannigfaltigkeit M. Zeigen Sie, dass dann die natürliche Projektion $\pi : M \to M/G$, $\pi(p) := G \cdot p$ für $p \in M$ eine Überlagerung ist und dass man M/G mit einer differenzierbaren Struktur versehen kann, so dass M/G zu einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit und π differenzierbar wird.

2. Zeigen Sie, dass das Tangentialbündel TG einer Lie-Gruppe G trivialisierbar ist.

3. Zeigen Sie, dass das Möbiusband M von Blatt 2, Aufgabe 4 ein nicht-trivialisierbares Vektorbündel über $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ ist.

   Hinweis: Um zu zeigen, dass M nicht trivialisierbar ist, überlegen Sie sich, dass für ein trivialisierbares Vektorbündel E vom Rang 1 über einer zusammenhängenden Mannigfaltigkeit N die offene Teilmenge $\tilde{E} := \bigcup_{p\in N}(E_p \setminus \{0_p\})$ von E nicht zusammenhängend ist.

4. Es sei $B \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ symmetrisch oder anti-symmetrisch und

   $$G_B = \left\{ A \in \mathbb{R}^{n\times n} | A^T BA = B \right\}.$$

   die Lie-Gruppe aus Aufgabe 4, Blatt 4. Zeigen Sie, dass der Tangentialraum

   $$T_{I_n} G_B = \left\{ X \in \mathbb{R}^{n\times n} | X^T B + BX = 0 \right\}$$

   am Einselement I_n von G_B zusammen mit dem *Kommutator* $[\cdot, \cdot]$ von Matrizen, d.h. $[X, Y] := XY - YX$ für $X, Y \in \mathbb{R}^{n\times n}$, eine Lie-Algebra ist.