M. Freibert
S. Durst

Sommersemester 2018

Übungen zur „Differentialgeometrie“

Blatt 6

Abgabe am 28.05.2018. Besprechung in den Übungen am 04.06.2018.

1. Es sei M eine Mannigfaltigkeit. Zeigen Sie, dass der in der Vorlesung definierte Kommutator $[\cdot,\cdot] : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \to \Gamma(TM)$ von Vektorfeldern die Leibnizregel und
$$[fX, gY] = fg[X,Y] + fX(g)Y - gY(f)X.$$
für alle $X, Y \in \Gamma(TM)$ und alle $f, g \in C^\infty(M)$ erfüllt.

   Hinweis: In beiden Fällen und auch in Aufgabe 2 (c) ist es eventuell einfacher mit der in Definition 1.47 erhaltenen Beschreibung von $[X,Y]_p([h]_p)$ für einen Funktionskeim $[h]_p$ in $p \in M$ zu arbeiten. Man bemerke, dass der Beweis der zweiten Rechenregel in einer alten Version des Skriptes eigentlich punktweise und mit Funktionskeimen hätte geschehen müssen.

2. Es seien M und N differenzierbare Mannigfaltigkeiten und $f : M \to N$ eine differenzierbare Abbildung.

   Weiter sei ein Vektorfeld $X \in \Gamma(TM)$ auf M gegeben, welches *f-verwandt* zu einem Vektorfeld $\tilde{X} \in \Gamma(TN)$ auf N ist, d.h. es soll $df \circ X = \tilde{X} \circ f : M \to TN$ gelten.

   Schließlich sei $\Phi^X : U \times I \to M$ ein lokaler Fluss von X sowie $\Phi^{\tilde{X}} : \tilde{U} \times I \to M$ ein lokaler Fluss von $\tilde{X}$ mit $f(U) \subseteq \tilde{U}$.

   Zeigen Sie:

   (a) Es ist $\tilde{X}(h) \circ f = X(h \circ f) \in C^\infty(M)$ für alle $h \in C^\infty(N)$.
   Hinweis: Es empfiehlt sich die Beschreibung des Differentials df_p in $p \in M$ als Abbildung von $\mathrm{Der}_p(M)$ nach $\mathrm{Der}_{f(p)}(N)$ aus Bemerkung 1.21 (ii) zu benutzen.

   (b) Es ist $\Phi^{\tilde{X}}(f(p), t) = f(\Phi^X(p,t))$ für alle $(p,t) \in U \times I$.

   (c) Ist $Y \in \Gamma(TM)$ f-verwandt zu $\tilde{Y} \in \Gamma(TN)$, so ist auch $[X,Y] \in \Gamma(TM)$ f-verwandt zu $[\tilde{X}, \tilde{Y}]$.

3. Es sei G eine n-dimensionale Lie-Gruppe.

   Ein *links-invariantes Vektorfeld* X auf einer Lie-Gruppe G ist ein Vektorfeld $X \in \Gamma(TG)$ auf G, welches zu sich selbst l_g-verwandt ist für jedes $g \in G$, wobei $l_g : G \to G$, $l_g(h) := g \cdot h$ für $h \in G$, die *Linkstranslation mit* $g \in G$ ist.

   (a) Zeigen Sie, dass die Lie-Klammer zweier links-invarianter Vektorfelder wieder links-invariant ist und dass die Abbildung $\Gamma_L(TG) \ni X \mapsto X(e) \in T_eG$ ein Vektorraumisomorphismus ist.
   Bemerkung: $\Gamma_L(TG)$ ist also, zusammen mit der Einschränkung des Kommutators von Vektorfeldern, eine n-dimensionale Lie-Algebra.

   (b) Zeigen Sie, dass jedes links-invariante Vektorfeld X vollständig ist und dass der globale Fluss $\Phi : G \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gerade $\Phi(g,t) = g \cdot \Phi(e,t)$ für alle $(g,t) \in G \times \mathbb{R}$ erfüllt.

4. Bestimmen Sie für jedes der folgenden Vektorfelder X auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit M jeweils die maximalen Integralkurven durch jeden Punkt und entscheiden Sie, ob X vollständig ist:

   (a) $M = \mathbb{R}^2$, $X(x, y) := (y, x)$ für $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

   (b) $M = \mathbb{R}^2$, $X(x, y) := (y, y^3)$ für $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

   (c) $M = \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, $X_N : \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}^{n\times n}$, $X_N(g) := g \cdot N$ für $g \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ mit einem $N \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $N^2 = 0$.

   Bemerke: Man beachte hierbei, dass $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^{n\times n} \cong \mathbb{R}^{n^2}$ ist.