M. Freibert
S. Durst Sommersemester 2018

Übungen zur „Differentialgeometrie“

Blatt 7

Abgabe am 04.06.2018. Besprechung in den Übungen am 11.06.2018.

1. Es sei
$$H_n := \left\{ x = (x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \,\middle|\, x_1^2 - x_2^2 - \ldots - x_{n+1}^2 = \langle x, x \rangle_{1,n} = 1,\, x_1 > 0 \right\}.$$
Zeigen Sie, dass H_n eine n-dimensionale zusammenhängende Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^{n+1}$ ist und dass H_n durch die Einschränkung g_{H_n} von $-\langle \cdot, \cdot \rangle_{1,n}$ zu einer riemannschen Mannigfaltigkeit (H_n, g_{H_n}) wird.

2. Es sei ∇ ein Zusammenhang auf einer Mannigfaltigkeit M. Zeigen Sie:
   (a) Die Torsion T^{∇} von ∇ ist $(2,1)$-Tensorfeld auf M.
   (b) Für jede pseudo-riemannsche Metrik g auf M ist $S : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \to C^\infty(M)$, definiert durch
   $$S(X, Y, Z) := X(g(Y, Z)) - g(\nabla_X Y, Z) - g(Y, \nabla_X Z)$$
   für $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$, ein $(3,0)$-Tensorfeld auf M.

3. Es sei (M, g) eine pseudo-riemannsche Mannigfaltigkeit. Zeigen Sie, dass die durch die Koszul-Formel in Satz 2.17 der Vorlesung definierte Abbildung $\nabla^g : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \to \Gamma(TM)$ ein Zusammenhang auf M ist.

4. (a) Es sei M eine Mannigfaltigkeit, $X \in \Gamma(TM)$ und $f \in C^\infty(M)$. Zeigen Sie, dass dann $df_p(X_p) = X_p([f]_p) = X(f)(p)$ für jeden Punkt $p \in M$ mittels der kanonischen Identifikation $T_{f(p)}\mathbb{R} \cong \mathbb{R}$ gilt.
   (b) Zeigen Sie, dass $D : \Gamma(T\mathbb{R}^n) \times \Gamma(T\mathbb{R}^n) \to \Gamma(T\mathbb{R}^n)$, definiert durch
   $$(D_X Y)(x) := dY_x(X_x) = DY(x)(X(x))$$
   für $X, Y : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ und $x \in \mathbb{R}^n$, ein Zusammenhang auf $\mathbb{R}^n$ ist und zwar der Levi-Civita Zusammenhang von $\mathbb{R}^{p,n-p} = (\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle_{p,n-p})$ für jedes $p = 0, \ldots, n$.
   (c) Nun sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$, so dass die Einschränkung von $\langle \cdot, \cdot \rangle_{p,n-p}$ für ein $p \in \{0, \ldots, n\}$ auf M eine pseudo-riemannsche Metrik g definiert. Weiter fassen wir Vektorfelder $X, Y \in \Gamma(TM)$ als differenzierbare Abbildungen $X, Y : M \to \mathbb{R}^n$ auf.
   Zeigen Sie, dass dann der Levi-Civita-Zusammenhang ∇^g von (M, g) durch
   $$\nabla^g_X Y = \mathrm{pr}_{T_x M}(dY_x(X_x))$$
   für $X, Y \in \Gamma(TM)$ gegeben ist, wobei $\mathrm{pr}_{T_x M} : \mathbb{R}^n \to T_x M$ die Orthogonalprojektion auf $T_x M \subseteq \mathbb{R}^n$ bezüglich $\langle \cdot, \cdot \rangle_{p,n-p}$ ist.
   Hinweis: Für die Rechungen empfiehlt es sich um jeden Punkt in M eine Untermannigfaltigkeitskarte von M zu nehmen und manche Vektorfelder bezüglich den zugehörigen lokalen Koordinatenfeldern zu entwickeln und andere bezüglich der Standardbasis $(e_1, \ldots, e_n)$ von $\mathbb{R}^n$.