M. Freibert
S. Durst

Sommersemester 2018

# Übungen zur „Differentialgeometrie“

## Blatt 8

Abgabe am 11.06.2018. Besprechung in den Übungen am 18.06.2018.

1. Es sei $M$ eine Mannigfaltigkeit und $\nabla$ ein Zusammenhang auf $M$. Zeigen Sie:

   (a) Die Menge $\mathcal{C}$ aller Zusammenhänge auf $M$ ist durch
   $$\mathcal{C} = \{\nabla + A \,|\, A \textit{ ist ein } (2,1)\textit{-Tensorfeld auf } M\}$$
   gegeben.

   (b) Es ist $T^{\nabla+A}(X,Y) = T^{\nabla}(X,Y) + A(X,Y) - A(Y,X)$ für jedes $(2,1)$-Tensorfeld $A$ auf $M$ und alle $X,Y \in \Gamma(TM)$ und somit $T^{\nabla+A} = T^{\nabla}$ genau dann, wenn $A$ symmetrisch ist. Weiter ist $\nabla - \frac{1}{2}T^{\nabla}$ ein torsionsfreier Zusammenhang.

   (c) Ist $g$ eine pseudo-riemannsche Metrik auf $M$ und $\nabla$ metrisch, so ist $\nabla + A$ genau dann metrisch, wenn
   $$g(A(X,Y),Z) = -g(A(X,Z),Y)$$
   für alle $X,Y,Z \in \Gamma(TM)$ gilt.

2. Es sei $(M,g)$ eine $n$-dimensionale riemannsche Mannigfaltigkeit, $\nabla^g$ der Levi-Civita-Zusammenhang von $g$ und $(U,\varphi)$, $\varphi = (x_1,\ldots,x_n)$, eine Karte von $M$. Zeigen Sie, dass dann für die Christoffelsymbole $(\Gamma_{ij}^k)_{i,j,k=1,\ldots,n}$ von $\nabla^g$ bezüglich $\varphi$ die Gleichheit
   $$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n} g^{kl}\left(\frac{\partial g_{lj}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{il}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_l}\right)$$
   für alle $i,j,k = 1,\ldots,n$ gilt, wobei $(g^{ij}(p))_{i,j=1,\ldots,n} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ die inverse Matrix von $(g_{ij}(p))_{i,j=1,\ldots,n} := (g(\partial_i,\partial_j)(p))_{i,j=1,\ldots,n} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ für jedes $p \in M$ ist.

   *Hinweis*: Koszul-Formel.

3. Es seien $M$ und $N$ zwei Mannigfaltigkeiten sowie $f: M \to N$ ein Diffeomorphismus. Für ein Vektorfeld $X \in \Gamma(TN)$ auf $N$ setzen wir $f^*X := df^{-1} \circ X \circ f$ und bemerken, dass $f^*X$ ein Vektorfeld auf $M$ ist. Zeigen Sie:

   (a) Für alle $X,Y \in \Gamma(TN)$ und $h \in C^\infty(N)$ gilt $f^*(h\cdot X) = (h\circ f)\cdot f^*X$, $(f^*X)(h\circ f) = X(h)\circ f$ und $f^*[X,Y] = [f^*X, f^*Y]$.

   (b) Ist $g$ eine pseudo-riemannsche Metrik auf $M$ und $h$ eine pseudo-riemannsche Metrik auf $N$ und $f$ eine *Isometrie*, d.h. ist
   $$g_p(v,w) = (f^*h)_p(v,w) := h_{f(p)}(df_p(v), df_p(w))$$
   für alle $p \in M$ und alle $v,w \in T_pM$, so gilt für die Levi-Civita-Zusammenhänge $\nabla^g$ von $g$ und $\nabla^h$ von $h$ die Gleichheit
   $$f^*(\nabla_X^h Y) = \nabla_{f^*X}^g f^*Y$$
   für alle $X,Y \in \Gamma(TN)$.

4. Es sei $H := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | y > 0\}$ die obere Halbebene versehen mit der riemannschen Metrik $g_{(x,y)}(v,w) = \frac{\langle v,w \rangle}{y^2}$, wobei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$ ist.

   (a) Berechnen Sie die Christoffelsymbole des Levi-Civita-Zusammenhangs $\nabla^g$ von $g$ bezüglich der Standardkarte $(H, \mathrm{id}_H)$.

   (b) Es sei $c : \mathbb{R} \to H$, $c(t) := (t, 1)$ und $v := (0, 1)$. Berechnen Sie $P^g_{c|_{[0,t]}}(v)$ für alle $t \in (0, \infty)$.