M. Freibert
S. Durst

Sommersemester 2018

Übungen zur „Differentialgeometrie“

Blatt 9

Abgabe am 18.06.2018. Besprechung in den Übungen am 25.06.2018.

1. Es sei M eine Mannigfaltigkeit und ∇ ein Zusammenhang auf M. Zeigen Sie:

   (a) Ist A ein schief-symmetrisches $(2,1)$-Tensorfeld, so hat $\nabla + A$ die gleichen Geodätischen wie ∇.

   (b) Ist g eine pseudo-riemannsche Metrik auf M und ∇^g der Levi-Civita-Zusammenhang von g sowie ∇ metrisch so dass
   $$\Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \ni (X,Y,Z) \mapsto g(T^\nabla(X,Y),Z) \in C^\infty(M)$$
   schief-symmetrisch in allen Einträgen ist, so hat ∇ die gleichen Geodätischen wie ∇^g.

2. Es seien (M,g) und (N,h) pseudo-riemannsche Mannigfaltigkeiten, $f : M \to N$ eine Isometrie sowie $c : [a,b] \to M$ eine differenzierbare Kurve in M. Zeigen Sie:

   (a) Es ist $df \circ (\frac{\nabla^g}{dt} X) = \frac{\nabla^h}{dt}(df \circ X)$ für jedes Vektorfeld $X \in \Gamma_c(TM)$ längs c, wobei wir auf M die kovariante Ableitung längs c und auf N die kovariante Ableitung längs $f \circ c$ betrachten.

   (b) Es ist $df_{c(b)} \circ P^g_c = P^h_{f\circ c} \circ df_{c(a)}$.

   (c) c ist genau dann eine Geodätische von (M,g), wenn $f \circ c$ eine Geodätische von (N,h) ist.

3. Für $n \in \mathbb{N}$ sei (H_n, g_n) der n-dimensionale hyperbolische Raum und (H,g) sei die zweidimensionale riemannsche Mannigfaltigkeit von Blatt 8, Aufgabe 4. Zeigen Sie:

   (a) Zeigen Sie, dass für jedes $v \in T_{e_1} H_n$ mit $v \neq 0$ die differenzierbare Kurve
   $$c_v : \mathbb{R} \to H_n, \quad c_v(t) := \cosh(\|v\|\, t) e_1 + \sinh(\|v\|\, t) \tfrac{v}{\|v\|}$$
   die eindeutige Geodätische mit $c_v(0) = e_1$ und $\dot{c}_v(0) = v$ ist, wobei $\|v\| := \sqrt{(g_{H_n})_{e_1}(v,v)}$ ist.

   (b) Zeigen Sie, dass
   $$f : H \to H_2, \quad f(x,y) := \tfrac{1}{4y}\left(x^2 + y^2 + 4, x^2 + y^2 - 4, 4x\right)$$
   eine Isometrie von (H,g) nach (H_2, g_2) ist.

   (c) Zeigen Sie, dass die Menge aller Geodätischen c von (H,g) mit $c(0) = 2$ durch
   $$\left\{ \mathbb{R} \ni t \mapsto \tfrac{2}{\cosh(at) - \sinh(at)\cos(\alpha)} \left(\sinh(at)\sin(\alpha), 1\right) \,\middle|\, a \in \mathbb{R}, \alpha \in [0, 2\pi) \right\}$$
   gegeben ist und zeigen Sie, dass es eine solche Geodätische mit Spur gleich der positiven y-Achse und eine mit Spur gleich dem oberen (offenen) Halbkreis in $\mathbb{R}^2$ vom Radius 2 gibt.

   Hinweis: Wenden Sie f auf jede dieser differenzierbaren Kurven c an und zeigen Sie, dass $f \circ c$ eine Geodätische von (H_2, g_2) ist.

4. Es sei

$$\mathbb{R}^{n\times n} \ni X \mapsto e^X := \sum_{i=1}^{\infty} \tfrac{X^i}{i!} \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$$

die *Matrix-Exponentialabbildung.* Diese ist wohldefiniert (d.h. die Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{X^i}{i!}$ konvergiert in $\mathbb{R}^{n\times n}$ und landet in $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$), erfüllt $e^X \cdot e^Y = e^{X+Y}$ für alle $X, Y \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $XY = YX$ sowie $\frac{d}{dt}e^{tX} = Xe^{tX} = e^{tX}X$ für alle $t \in \mathbb{R}$ und alle $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$ (dies müssen Sie alles nicht zeigen!).

Versehen Sie den $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^{n\times n} \cong \mathbb{R}^{n^2}$ mit dem Skalarprodukt $\langle X, Y\rangle := \mathrm{tr}(XY^T) = \sum_{i,j=1}^{n} x_{ij}y_{ij}$ für alle $X = (x_{ij})_{i,j}$, $Y = (Y_{ij})_{i,j} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ als konstanter riemannscher Metrik und betrachten Sie $\mathrm{O}(n)$ als riemannsche Untermannigfaltigkeit $(\mathrm{O}(n), g)$ von $(\mathbb{R}^{n\times n}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$.

Zeigen Sie, dass dann folgendes gilt:

(a) Für jedes $A \in \mathrm{O}(n)$ ist

$$T_A\mathrm{O}(n) = \left\{ AX \in \mathbb{R}^{n\times n} \,\middle|\, X \in \mathbb{R}^n,\ X^T = -X \right\} = \left\{ XA \in \mathbb{R}^{n\times n} \,\middle|\, X \in \mathbb{R}^n,\ X^T = -X \right\}$$

(b) $\exp(X) \in \mathrm{O(n)}$ für jedes Element $X \in T_{I_n}\mathrm{O}(n)$.

(c) $\exp|_{T_{I_n}\mathrm{O}(n)} : T_{I_n}\mathrm{O}(n) \to \mathrm{O}(n)$ ist die Exponentialabbildung von $(\mathrm{O}(n), g)$ in $I_n \in \mathrm{O}(n)$.

Bemerkung: Das Besondere an der riemannschen Metrik g ist, dass g eine *bi-invariante* riemannsche Metrik auf der Lie-Gruppe $\mathrm{O}(n)$ ist, d.h. es gilt $l_A^* g = g = r_A^* g$ für jedes $A \in \mathrm{O}(n)$. Für solch eine riemannsche Metrik g auf einer Lie-Gruppe G stimmt immer die Exponentialabbildung von (M, g) im Einselement e mit der *lie-theoretischen Exponentialabbildung* $\exp : \mathfrak{g} = T_eG \to G$ überein (die wir im Rahmen dieser Vorlesung nicht einführen werden), welche wiederum für Matrix-Lie-Gruppen immer mit der Matrix-Exponentialabbildung übereinstimmt.