Differentialgeometrie

Marco Freibert

18. Juli 2018

Inhaltsverzeichnis

Vorbemerkung:

Diese Skript folgt vor allem am Anfang stark dem „Differentialgeometrie“-Skript von Prof. Dr. Oliver Goertsches (Philipps-Universität Marburg), dessen Skript auf der von ihm besuchten Vorlesung von Prof. Dr. Gudlaugur Thorbergsson an der Universität zu Köln aufbaut. Desweiteren werde ich in späteren Kapitel teilweise auch dem „Differentialgeometrie“- bzw. dem „differenzierbare Mannigfaltigkeiten“-Skript von Prof. Dr. Hartmut Weiß (Christian-Albrechts-Universität zu Kiel) folgen. Prof. Dr. Oliver Goertsches und Prof. Dr. Hartmut Weiß danke ich für die Bereitstellung ihrer Skripte.

Kapitel 1

Differenzierbare Mannigfaltigkeiten

1.1 Topologische Grundbegriffe

Zur Definition einer (differenzierbaren) Mannigfaltigkeit als auch zur Behandlung einiger einfacher Eigenschaften benötigen wir zunächst einige wenige topologische Grundbegriffe wie sie in jeder (mengentheoretischen) Topologie in den ersten paar Vorlesungsstunden oder eventuell auch schon im Rahmen der Analysis-Grundvorlesung behandelt wurden. Da wohl nicht alle Studierenden diese Voraussetzungen haben, fassen wir diese in diesem Abschnitt kurz zusammen werden sie aber nicht in der Vorlesung besprechen.
Eine Mannigfaltigkeit wird ein *topologischen Raum* sein (mit weiteren Zusatzeigenschaften), der „lokal wie der $\mathbb{R}^n$ aussieht".

Definition. Es sei X eine Menge. Eine *Topologie auf* X ist eine Menge von Teilmengen von X, d.h. $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{P}(X)$, für die die folgenden drei Eigenschaften gelten:

(i) $\emptyset \in \mathcal{O}$, $X \in \mathcal{O}$.

(ii) Ist $U_i \in \mathcal{O}$ für alle $i \in I$, I beliebige Indexmenge, so auch $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{O}$.

(iii) Sind $U_1, U_2 \in \mathcal{O}$, so auch $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{O}$.

In diesem Fall nennen wir das Paar $(X, \mathcal{O})$ einen *topologischen Raum* und die Mengen $U \in \mathcal{O}$ *offen*. Weiter nennen wir eine Teilmenge $A \subseteq X$ von X *abgeschlossen*, falls $X \setminus A$ offen ist. Wir werden im Folgenden oft, vor allem bei Mannigfaltigkeiten, bei einem topologischen Raum die Topologie nicht mitnotieren.
Ist $\mathcal{O}'$ eine weitere Topologie auf X, so nennen wir $\mathcal{O}'$ *feiner* als $\mathcal{O}$ und $\mathcal{O}$ *gröber* als $\mathcal{O}'$, falls $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{O}'$ ist, d.h. jede bezüglich $\mathcal{O}$ offene Menge ist auch offen bezüglich $\mathcal{O}'$.

Die Relation „feiner"(„gröber") definiert auf der Menge aller Topologien auf einer Menge X eine Halbordnung die im Allgemeinen jedoch keine Totalordnung ist. Trotzdem gibt es immer ein eindeutiges größtes und kleinstes Element, also eine *feinste* und *gröbste*

Topologie auf X die sogenannte *diskrete Topologie* $\mathcal{O} = \mathcal{P}(X)$ (d.h. alle Teilmengen von X sind offen) und die sogenannte *indiskrete Topologie* $\mathcal{O} = \{\emptyset, X\}$ (d.h. nur die leere Menge $\emptyset$ und der gesamte Raum X sind offen).
Eine für unsere Zwecke wichtigere Klasse von topologischen Räumen werden von metrischen Räumen induziert:

Definition. Es sei (X, d) ein metrischer Raum. Dann *induziert* d auf X wie folgt eine Topologie $\mathcal{O}_d$: Es ist $U \in \mathcal{O}_d$ genau dann, wenn gilt: $\forall x \in U\, \exists \epsilon > 0 : B^d_\epsilon(x) := \{y \in X | d(x, y) < \epsilon\} \subseteq U$ (die offenen Mengen hier sind also genau die Mengen eines metrischen Raumes die man im Rahmen einer Analysis-Vorlesung „offen“ genannt hat).
Allgemein nennen wir einen topologischen Raum $(Y, \mathcal{V})$ *metrisierbar*, falls er wie oben von einer Metrik auf Y induziert wird.

Beispiel.
- Wir statten im Folgenden $\mathbb{R}^n$ immer mit der Topologie aus, die durch den euklidischen Abstand $d(x, y) := \|x - y\|$ induziert wird.
- Die diskrete Topologie auf einer Menge X ist immer metrisierbar durch die Metrik $d(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x \neq y \\ 0, & \text{falls } x = y \end{cases}$. Hingegen ist die indiskete Topologie auf X (außer für $|X| \leq 1$) nie metrisierbar.

Wir werden später zeigen, dass jede Mannigfaltigkeit metrisierbar ist. Um dies zeigen zu können, muss sie die folgende wichtige Eigenschaft metrischer Räume besitzen:

Definition. Es sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum. Eine *(offene) Umgebung von* $x \in X$ ist eine offene Menge $U \in \mathcal{O}$ mit $x \in U$. Wir sagen, dass $(X, \mathcal{O})$ ein *Hausdorff-Raum* ist, falls es zu je zwei verschiedenen Punkten $x, y \in X$, $x \neq y$ Umgebungen U von x und V von y mit $U \cap V = \emptyset$ gibt („Man kann je zwei verschiedene Punkte durch offene disjunkte Umgebungen trennen“).

Wie schon erwähnt ist offensichtlich jeder metrische Raum (X, d) (mit der induzierten Topologie) ein Hausdorff-Raum, denn für je zwei Punkte $x, y \in X$ mit $x \neq y$ sind offensichtlich $B^d_{\frac{d(x,y)}{2}}(x)$ und $B^d_{\frac{d(x,y)}{2}}(y)$ Umgebungen von x und y mit $B^d_{\frac{d(x,y)}{2}}(x) \cap B^d_{\frac{d(x,y)}{2}}(y) = \emptyset$.
Eine weitere Eigenschaft die wir für unsere Mannigfaltigkeiten fordern wollen, ist, dass diese das sogenannte *zweite Abzählbarkeitsaxiom* erfüllen:

Definition. Es sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum.

- Eine Teilmenge $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{O}$ heißt *Basis* von $\mathcal{O}$, falls jede offene Menge $U \in \mathcal{O}$ in X eine Vereinigung von Elementen aus $\mathcal{B}$ ist.
- $(X, \mathcal{O})$ erfüllt das *zweite Abzählsaxiom*, falls $(X, \mathcal{O})$ eine abzählbare Basis besitzt.

Bemerkung. In einem metrischen Raum (X, d) ist $\left\{B^d_q(x) | x \in X,\, q \in \mathbb{Q}\right\}$ eine Basis der induzierten Topologie $\mathcal{O}_d$. Gibt es nun eine dichte abzählbare Teilmenge Y in (X, d), d.h. (X, d) is *separabel*, so ist offensichtlich $\left\{B^d_q(y) | y \in Y,\, q \in \mathbb{Q}\right\}$ eine abzählbare Basis der

Topologie $\mathcal{O}_d$, d.h. separable metrische Räume erfüllen das zweite Abzählbarkeitsaxiom. Die ist z.B. für $\mathbb{R}^n$ (und damit auch für alle offenen Teilmengen von $\mathbb{R}^n$) mit dem euklidischen Abstand der Fall, da $\mathbb{Q}^n$ eine solche dichte abzählbare Teilmenge ist.
Man kann zeigen, dass metrische Räume genau dann das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllen, wenn sie separabel sind. Sie erfüllen jedoch immer das *erste Abzählbarkeitsaxiom*: Jeder Punkt $x \in X$ hat eine abzählbare *Umgebungsbasis*, wobei eine Menge $\mathcal{B}_x$ von Umgebungen von $x \in X$ eine *Umgebungsbasis* ist, wenn für jede Umgebung U von x eine Umgebung $V \in \mathcal{B}_x$ von x existiert mit $V \subseteq U$.
Man bemerke, dass für einen beliebigen topologischen Raum $(X, \mathcal{O})$ die Gültigkeit des zweiten Abzählbarkeitsaxioms die Gültigkeit des ersten Abzählbarkeitsaxioms impliziert.

Als nächstes betrachten wir *stetige* Abbildungen zwischen topologischen Räumen:

Definition. Es seien $(X, \mathcal{O}_X)$, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ topologische Räume und $f : X \to Y$ eine Abbildung. f heißt *stetig*, falls das Urbild jeder offenen Menge in Y unter f auch offen in X ist, d.h. $\forall U \in \mathcal{O}_Y : f^{-1}(U) \in \mathcal{O}_X$. f heißt *Homöomorphismus*, falls f stetig und bijektiv ist und die Umkehrabbildung $f^{-1} : Y \to X$ ebenfalls stetig ist.

Bemerkung.

- f wie in der vorherigen Definition ist stetig genau dann, wenn das Urbild jeder abgeschlossenen Menge in Y unter f auch abgeschlossen in X ist.
- Man überlegt sich leicht, dass eine Abbildung zwischen metrischen Räumen (X, d_X) und (Y, d_Y) aufgefasst als topologische Räume im obigen Sinne stetig ist genau dann, wenn f im bekannten Sinne (ϵ-δ-Kriterium oder auch Folgenkriterium) als Abbildung zwischen metrischen Räumen stetig ist.

Als nächstes wollen wir aus gegebenen topologischen Räumen neue basteln. Die erste Möglichkeit ist eine Teilmenge eines topologischen Raumes zu nehmen:

Definition. Es sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum und $Y \subseteq X$ eine beliebige Teilmenge. Die *Teilraumtopologie* auf Y besteht aus alldenjenigen Teilmengen U von Y die sich als $U = \widetilde{U} \cap Y$ mit einer in X offenen Menge $\widetilde{U} \in \mathcal{O}$ schreiben lassen.

Wir versehen im Folgenden Teilmengen eines topologischen Raumes immer mit der Teilraumtopologie. Z.B. sind dann für die Teilmenge $[0, 1]$ in $\mathbb{R}$ die Mengen $(0, 1)$, $[0, 1)$, $(0, 1]$ und $[0, 1]$ alle offen in $[0, 1]$ bezüglich der Teilraumtopologie.
Bemerkung. Es seien $(X, \mathcal{O}_X)$ und $(Y, \mathcal{O}_Y)$ topologische Räume und $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung. Es sei weiter $A \subseteq X$ eine beliebige Teilmenge von X und $B \subseteq Y$ eine Teilmenge von Y mit $f(X) \subseteq B$. Dann sieht man leicht ein, dass auch die Einschränkung $f|_A : A \to Y$ stetig ist und dass auch f aufgefasst als Abbildung $f : X \to B$ stetig ist.
Als nächstes bilden wir Produkte von topologischen Räumen:

Definition. Es seien $(X, \mathcal{O}_X)$, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ topologische Räume. Dann wird auch $X \times Y$ durch die *Produkttopologie*

$$\mathcal{O}_{X \times Y} := \left\{ \bigcup_{i \in I} U_i \times V_I | I \text{ Menge}, \forall i \in I : U_i \in \mathcal{O}_X, V_i \in \mathcal{O}_Y \right\}$$

zu einem topologischen Raum.

Bemerkung. Die Produkttopologie auf $X \times Y$ ist also gerade die Topologie auf $X \times Y$, für die eine Basis durch die Produkte offener Mengen aus X und Y gegeben ist oder die kleinste Topologie, die alle Produkte offener Mengen aus X und Y enthält. Man bemerke, dass es nicht langt, einfach nur diese Produkte zu nehmen, da beliebige Vereinigungen solcher Produkte im Allgemeinen nicht mehr Produktgestalt haben.

Nun wenden wir uns Quotienten topologischer Räume zu:

Definition. Es sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum und $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X. Sei $X/\sim := \{[x] | x \in X\}$ die Menge aller Äquivalenzklassen von $\sim$ auf X und $\pi : X \to X/\sim$ die *kanonische Projektion*, d.h. $\pi(x) := [x]$ für $x \in X$. Dann sei die *Quotiententopologie* auf $X/\sim$ die feinste Topologie, für die $\pi : X \to X/\sim$ stetig ist, d.h. $U \subseteq X/\sim$ ist per Definition offen in $X/\sim$ genau dann, wenn $\pi^{-1}(U)$ offen in X ist.

Stetige Abbildungen sind mit der Quotientenbildung in folgendem Sinne verträglich:

Lemma. *Es seien $(X, \mathcal{O}_X)$ und $(Y, \mathcal{O}_Y)$ topologische Räume, $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X, $X/\sim$ mit der Quotiententopologie ausgestattet und $\pi : X \to X/\sim$ die kanonische Projektion. Dann ist eine Abbildung $f : X/\sim \to Y$ genau dann stetig, wenn $f \circ \pi : X \to Y$ stetig ist.*

Beweis. Ist $f : X/\sim \to Y$ stetig, so auch $f \circ \pi : X \to Y$ als Verknüpfung stetiger Funktionen.
Sei umgekehrt $f \circ \pi : X \to Y$ stetig und sei $U \subseteq Y$ offen. Dann ist $(f \circ \pi)^{-1}(U) = \pi^{-1}(f^{-1}(U))$ offen in X und daher nach Definition der Quotiententopologie gerade $f^{-1}(U)$ offen in $X/\sim$. Dies zeigt die Stetigkeit von f. $\square$

Am Ende sammeln wir noch einige wichtige Eigenschaften die ein topologischer Raum besitzen kann und die im Verlaufe der Vorlesung immer wieder auftauchen werden:

Definition. Es sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum. $(X, \mathcal{O})$ heißt

- *kompakt*, falls jede *offene Überdeckung* $(U_i)_{i \in I}$ *von* X (d.h. $X = \bigcup_{i \in I} U_i$) eine *endliche Teilüberdeckung* $(U_{i_1}, \ldots, U_{i_k})$ (d.h. $\exists i_1, \ldots, i_k \in I : X = U_{i_1} \cup \ldots \cup U_{i_k}$) besitzt,
- *zusammenhängend*, falls aus $X = U \cup V$ für offene Menge $U, V \in \mathcal{O}$ mit $U \cap V = \emptyset$ stets $U = X$ oder $V = X$ folgt („X lässt sich nicht in zwei echte disjunkte offene Teilmengen zerlegen“) und
- *wegzusammenhängend*, falls zu je zwei Punkten $x, y \in X$ eine stetige Abbildung $c : [0,1] \to X$ mit $c(0) = x$ und $c(1) = y$ existiert („je zwei Punkte in X lassen sich durch einen stetigen Weg verbinden“).

Bemerkung. Man kann zeigen, dass jeder wegzusammenhängende topologische Raum auch zusammenhängend ist. Es gibt jedoch zusammenhängende Räume, die nicht wegzusammenhängend sind. Wir werden jedoch später in den Übungen sehen, dass die Begriffe für Mannigfaltigkeiten zusammenfallen.

Mithilfe der Teilraumtopologie können wir dann auch von kompakten Teilmengen eines topologischen Raumes sprechen. Man bemerke, dass eine solche Teilmenge Y bezüglich der Teilraumtopologie genau dann kompakt ist, wenn für jede Familie von offenen Mengen $(U_i)_{i\in I}$ in X mit $Y \subseteq \bigcup_{i\in I} U_i$ eine endliche Teilfamilie $(U_{i_1}, \ldots, U_{i_k})$ mit $Y \subseteq U_{i_1} \cup \ldots U_{i_k}$ existiert, d.h. wenn jede offene Überdeckung von Y als Teilmenge von X eine endliche Teilüberdeckung besitzt.
Wir notieren nun noch einige einfache wichtige Eigenschaften:

Bemerkung. Es sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein topologischer Raum, $A \subseteq X$ eine Teilmenge von X, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ ein weiterer topologischer Raum und $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung. Dann gilt:

- Ist A kompakt, so auch $f(A)$: Denn sei $(U_i)_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von $f(A)$, so ist $(f^{-1}(U_i))_{i\in I}$ aufgrund der Stetigkeit von f eine offene Überdeckung von A. Da A kompakt ist, existieren $i_1, \ldots, i_k \in I$ mit $A \subseteq f^{-1}(U_{i_1}) \cup \ldots f^{-1}(U_{i_k})$. Damit gilt dann $f(A) \subseteq U_{i_1} \cup \ldots \cup U_{i_k}$, d.h. $(U_i)_{i\in I}$ besitzt eine endliche Teilüberdeckung von $f(A)$.

- Ist $(X, \mathcal{O}_X)$ kompakt und A abgeschlossen, so ist auch A kompakt: Denn sei $\{U_i | i \in I\}$ eine offene Überdeckung von A, so ist $\{U_i | i \in I\} \cup \{X \setminus A\}$ eine offene Überdeckung von X aus der wir eine endliche Teilüberdeckung aufgrund der Kompaktheit von X auswählen können. Durch eventuelles Entfernen von $X \setminus A$ aus dieser Überdeckung erhalten wir eine endliche Teilüberdeckung von A.

- Ist $(X, \mathcal{O}_X)$ ein Hausdorff-Raum, A kompakt und $x \in X \setminus A$, so existieren offene disjunkte Mengen U, V in X mit $A \subseteq U$ und $x \in V$: Da $(X, \mathcal{O}_X)$ ein Hausdorff-Raum ist, können wir zu jedem $a \in A$ offene disjunkte Umgebungen U_a von a und V_a von x wählen. Dann ist $(U_a)_{a\in A}$ eine offene Überdeckung von A und aufgrund der Kompaktheit von A existieren $a_1, \ldots, a_k \in A$ mit $A \subseteq U_{a_1} \cup \ldots \cup U_{a_k}$. Setzen wir $U := U_{a_1} \cup \ldots \cup U_{a_k}$ und $V := V_{a_1} \cap \ldots \cap V_{a_k}$, so sind beide Mengen offen (V_a da man leicht sieht, dass allgemein endliche Schnitte offener Mengen in topologischen Räumen offen sind) und erfüllen alle weiteren gewünschten Eigenschaften.

- Ist $(X, \mathcal{O}_X)$ ein Hausdorff-Raum und A kompakt, so ist A abgeschlossen: Nach dem gerade gezeigtem existieren für jedes $x \in X \setminus A$ offene disjunkte Mengen U_x und V_x mit $A \subseteq U_x$ und $x \in V_x$. Insbesondere ist $V_x \cap A = \emptyset$, so dass sich $X \setminus A = \bigcup_{x\in X\setminus A} V_x$ ergibt und somit, dass $X \setminus A$ offen, also A abgeschlossen ist.

- Ist A zusammenhängend bzw. wegzusammenhängend, so ist auch $f(A)$ zusammenhängend bzw. wegzusammenhängend:

  Sei zunächst A zusammenhängend und seien U, V offene disjunkte Mengen in $f(A)$ mit $U \cup V = f(A)$. Dann sind $f|_A^{-1}(U)$ und $f|_A^{-1}(V)$ offene und disjunkte Mengen in A (da auch $f|_A$ stetig ist) mit $f|_A^{-1}(U) \cup f|_A^{-1}(V) = A$. Da A zusammenhängend ist, ist o.B.d.A. $f|_A^{-1}(U) = A$ und somit $U = f(A)$, d.h. $f(A)$ zusammenhängend.

  Sei nun A wegzusammenhängend und seien $y_1, y_2 \in f(A)$ gegeben. Wähle Urbilder $x_1 \in A$ und $x_2 \in A$ von y_1 und y_2, d.h. $f(x_i) = y_i$ für $i = 1, 2$. Dann existiert eine stetiger Weg γ von x_1 nach x_2 in A und $f \circ \gamma$ ist dann ein stetiger Weg von y_1 nach y_2 in $f(A)$. Daher ist $f(A)$ wegzusammenhängend.

Abschließend kommen wir nochmal kurz zu Homöomorphismen zwischen topologischen Räumen zurück und bemerken, dass im Allgemeinen eine stetige bijektive Abbildung zwischen topologischen Räumen kein Homöomorphismus ist: Z.B. ist $f : [0, 2\pi) \to S^1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 = 1\}, f(\varphi) := (\cos(\varphi), \sin(\varphi))$ offensichtlich stetig und bijektiv, die Umkehrabbildung f^{-1} kann jedoch nicht stetig sein, da S^1 kompakt ist aber $[0, 2\pi) = f^{-1}(S^1)$ nicht. Ist jedoch der Ausgangsraum kompakt und der Zielraum ein Hausdorff-Raum, dann gilt:

Lemma. *Es sei $(X, \mathcal{O})$ ein kompakter topologischer Raum, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ ein Hausdorff-Raum und $f : X \to Y$ eine stetige bijektive Abbildung. Dann ist f ein Homöomorphismus.*

Beweis. Wir müssen also zeigen, dass f^{-1} stetig ist. Dazu zeigen wir, dass für jede abgeschlossene Menge $A \subseteq X$ in X das Urbild $(f^{-1})^{-1}(A) = f(A)$ von A unter f^{-1} abgeschlossen in Y ist:
Sei also $A \subseteq X$ abgeschlossen in X. Dann ist A als abgeschlossene Menge eines kompakten topologischen Raumes nach obiger Bemerkung selbst kompakt. Da f stetig ist, ist dann auch $f(A) \subset Y$ kompakt in Y. Da Y ein Hausdorff-Raum ist, ist nach dem oben gezeigtem $f(A)$ abgeschlossen in Y. Dies zeigt die Behauptung. □

1.2 Der Begriff einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit

In diesem Abschnitt führen wir den Begriff einer *differenzierbaren Mannigfaltigkeit* ein. Dazu beginnen wir mit dem Begriff einer *topologischen Mannigfaltigkeit*:

Definition 1.1. Es sei X ein topologischer Raum. Eine *Karte (von X um $x \in X$ der Dimension $n \in \mathbb{N}_0$)* ist ein Paar (U, φ) bestehend aus einer (offenen) Umgebung U von $x \in X$ und einem Homöomorphismus $\varphi : U \to V$ von U auf eine offene Menge $V \subseteq \mathbb{R}^n$. Wir nennen dann U auch das *Kartengebiet* der *Kartenabbildung* φ. X heißt *lokal euklidisch der Dimension* $n \in \mathbb{N}_0$, falls für jeden Punkt $x \in X$ eine Karte von X um x der Dimension n existiert.

Nun können wir topologische Mannigfaltigkeiten definieren:

Definition 1.2. Eine *topologische Mannigfaltigkeit der Dimension* $n \in \mathbb{N}_0$ ist ein nichtleerer topologischer Hausdorff-Raum M der lokal euklidisch von der Dimension $n \in \mathbb{N}_0$ ist und der das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt.

Bemerkung.

- Man kann zeigen, dass eine offene Teilmenge U von $\mathbb{R}^n$ und eine offene Teilmenge V von $\mathbb{R}^m$ nur dann homöomorph zueinander sein können, wenn $n = m$ ist. Die Dimension einer topologischen Mannigfaltigkeit ist also wohldefiniert.
- Es gibt lokal euklidische topologische Räume die keine Hausdorff-Räume sind oder das zweite Abzählbarkeitsaxiom nicht erfüllen. Ein Beispiel für einen lokal euklidischen topologischen Raum, der zwar das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt aber

kein Hausdorff-Raum und damit auch keine topologische Mannigfaltigkeit ist, ist die *Linie mit zwei Ursprüngen* M:

Wir setzen $M = (\mathbb{R} \times \{0,1\})/\sim$ mit der Quotiententopologie, wobei $\sim$ vollständig durch $(0,0) \sim (0,0)$, $(0,1) \sim (0,1)$ und $(x_1, \delta_1) \sim (x_2, \delta_2)$ für alle $x_1, x_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und alle $\delta_1, \delta_2 \in \{0,1\}$ definiert ist. Man kann dann die beiden „Ursrpünge" $[(0,0)] = \{(0,0)\}$ und $[(0,1)] = \{(0,1)\}$ nicht mehr durch offene disjunkte Mengen trennen.

Ein Beispiel eines topologischen Raum der lokal euklidisch der Dimension 0 ist, jedoch das zweite Abzählbarkeitsaxiom nicht erfüllt, ist einfach $\mathbb{R}$ ausgestattet mit der diskreten Topologie. Es gibt auch solche zusammenhängenden Beispiele, deren Konstruktion hier aber zu weit führen würde.

Notation. Im Folgenden meinen wir mit differenzierbar immer C^∞ und nicht die übliche Definition von (einmal) differenzierbar. Zur Sicherheit werden wir vor allem am Anfang an einigen Stellen trotzdem explizit schreiben, dass wir C^∞-Funktionen betrachten.

Wir wollen auf einer topologischen Mannigfaltigkeit Differentialrechnung betreiben. Dazu sollten wir einen Begriff der Differenzierbarkeit haben in der insbesondere die Kartenabbildungen differenzierbar sind. Was wir an dieser Stelle aber nur fordern können, ist, dass die *Kartenwechsel* differenzierbar sind:

Definition 1.3. Es sei M eine topologische Mannigfaltigkeit der Dimension n. Ein *(differenzierbarer) Atlas* ist eine Familie $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha) | \alpha \in A\}$ von Karten $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ (der Dimension n) von M, so dass

(i) $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = M$ („Die Kartengebiete überdecken M") gilt und

(ii) so dass alle *Kartenwechsel* $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}|_{\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$, $\alpha, \beta \in A$, C^∞-Abbildungen, und damit C^∞-Diffeomorphismen, sind.

Eine *differenzierbare Struktur* ist ein Atlas $\mathcal{A}$ der maximal bezüglich der Teilmengenrelation $\subseteq$ ist, d.h. ist $\mathcal{B}$ ein weiterer Atlas auf M mit $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$, so ist $\mathcal{A} = \mathcal{B}$.

Nun können wir differenzierbare Mannigfaltigkeiten wie folgt definieren:

Definition 1.4. Eine *(differenzierbare) Mannigfaltigkeit (der Dimension n)* ist ein Paar $(M, \mathcal{A})$ bestehend aus einer topologischen Mannigfaltigkeit M und einer differenzierbaren Struktur $\mathcal{A}$ auf M.

Bemerkung 1.5.

- Es sei $\mathcal{A}$ ein differenzierbarer Atlas auf einer topologischen Mannigfaltigkeit M. Dann existiert genau eine differenzierbare Struktur $\widetilde{\mathcal{A}}$ die $\mathcal{A}$ enthält. Und zwar ist eine Karte (U, φ) ein Element von $\widetilde{\mathcal{A}}$ genau dann, wenn für jede Karte (V, ψ) aus $\mathcal{A}$ die Kartenwechsel $\varphi \circ \psi^{-1}$ und $\psi \circ \varphi^{-1}$ C^∞ sind.

  Daher, und da man eine differenzierbare Struktur im Allgemeinen nicht explizit angeben kann, nennen wir im Folgenden auch ein Paar $(M, \mathcal{A})$ bestehend aus einer topologischen Mannigfaltigkeit M und einem Atlas $\mathcal{A}$ eine *(differenzierbare Mannigfaltigkeit)*. Oft schreiben wir statt dem Paar $(M, \mathcal{A})$ nur M wenn die differenzierbare Struktur/der differenzierbare Atlas $\mathcal{A}$ auf M klar ist.

- Durch Ersetzen von C^∞ durch C^k in allen Definitionen oben kann man C^k-Strukturen und damit C^k-Mannigfaltigkeiten für jedes $k \in \mathbb{N}_0$ definieren. Eine C^0-Mannigfaltigkeit ist dann nichts anderes als eine topologische Mannigfaltigkeit. Weiter kann man auch C^∞ durch „reell analytisch“ in allen Definitionen oben ersetzen und damit reell-analytische Strukturen und reell-analytische Mannigfaltigkeiten erhalten.

  Für $k \geq 1$ kann man zeigen, dass jede C^k-Struktur $\mathcal{A}$ eine differenzierbare Struktur enthält. Im Allgemeinen gibt es verschiedene differenzierbare Strukturen in $\mathcal{A}$, allerdings sind die enstehenden differenzierbaren Mannigfaltigkeiten *diffeomorph*(für eine Definition siehe weiter unten) zueinander. Man kann sogar zeigen, dass jede C^k-Struktur eine reell-analytische Struktur enthält.

  Für $k = 0$ gilt all dies nicht mehr. Es gibt topologische Mannigfaltigkeiten die keine differenzierbare Struktur zulassen, siehe [K], als auch topologische Mannigfaltigkeiten (beispielsweise die 7-Sphäre S^7, siehe [M]), die verschiedene differenzierbare Strukturen besitzen für die die entstehenden differenzierbaren Mannigfaltigkeiten *nicht* diffeomorph zueinander sind.

Beispiel 1.6. (i) $\mathbb{R}^n$ ist eine n-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit mit dem Atlas $\{(\mathbb{R}^n, \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n})\}$. Die durch diesen Atlas induzierte differenzierbare Struktur nennen wir auch die *Standardstruktur auf* $\mathbb{R}^n$ und verwenden diese im Folgenden immer.

(ii) Eine offene Teilmenge U einer differenzierbaren n-dimensionalen Mannigfaltigkeit M ist eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit. Einen Atlas von U erhält man durch „Einschränkung“eines Atlases von M auf U.

(iii) Die *n-dimensionale Sphäre* $S^n := \{ (x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} | \, x_1^2 + \ldots + x_{n+1}^2 = 1\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ ist eine n-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit:

Dazu bemerken wir zunächst, dass S^n als Teilraum des Hausdorff-Raumes $\mathbb{R}^{n+1}$ der das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt, selbst ein Hausdorff-Raum ist, der das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt. Weiter ist ein Atlas durch $\{(S^n \setminus N, \varphi_N), (S^n \setminus S, \varphi_S)\}$ gegeben, wobei $N := (0, \ldots, 0, 1)$ der *Nordpol*, $S := (0, \ldots, 0, -1)$ der *Südpol* und $\varphi_N : S^n \setminus N \to \mathbb{R}^n$ bzw. $\varphi_S : S^n \setminus S \to \mathbb{R}^n$ die *stereographische Projektion vom Nord- bzw. Südpol* ist:

$$\varphi_N(x_1, \ldots, x_{n+1}) := \frac{(x_1, \ldots, x_n)}{1 - x_{n+1}}, \qquad \varphi_S(x_1, \ldots, x_{n+1}) := \frac{(x_1, \ldots, x_n)}{1 + x_{n+1}}.$$

Man sieht direkt, dass φ_N und φ_S als Einschränkung stetiger Abbildungen einer offenen Teilmengen von $\mathbb{R}^{n+1}$ nach $\mathbb{R}^n$ stetig sind. Die stetigen Umkehrabbildungen sind durch

$$\varphi_N^{-1}(x) := \left(\frac{2x}{1 + \|x\|^2} \frac{\|x\|^2 - 1}{1 + \|x\|^2} \right), \qquad \varphi_S^{-1}(x) := \left(\frac{2x}{1 + \|x\|^2} \frac{1 - \|x\|^2}{1 + \|x\|^2} \right)$$

gegeben. Daher sind φ_N, φ_S Homöomorphismen. Weiter sieht man durch Einsetzen direkt, dass der Kartenwechsel $\varphi_N \circ \varphi_S^{-1} : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ein Diffeomorphismus ist und somit ist $\{(S^n \setminus N, \varphi_N), (S^n \setminus S, \varphi_S)\}$ tatsächlich ein Atlas von S^n.

(iv) Der *n-dimensionale reell projektive Raum* $\mathbb{R}P^n$ ist definiert als der topologische Raum $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}/\sim$ ausgestattet mit der Quotiententopologie, wobei $x \sim y$ für $x, y \in \mathbb{R}^{n+1}$ genau dann gilt, wenn ein $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ existiert mit $y = \lambda x$ („Raum aller Ursprungsgeraden in $\mathbb{R}^{n+1}$"). Man bemerke, dass man $\mathbb{R}P^n$ auch als $S^n/\sim$ definieren kann, wobei wir $\sim$ einfach auf S^n einschränken. Dadurch ist $x \sim y$ für $x, y \in S^n$ genau dann, wenn $x = y$ oder $x = -y$ („$\sim$ identifiziert also antipodale Punkte auf S^n"). Dadurch sehen wir auch, dass $\mathbb{R}P^n$ als stetiges Bild unter der kanonischen Projektion der kompakten Menge S^n selbst kompakt ist.

Wir schreiben die Äquivalenzklassen $[(x_0, \ldots, x_n)] \in \mathbb{R}P^n$ als $[x_0 : \ldots : x_n]$ und setzen $U_i := \{\, [x_0 : \ldots : x_n] \in \mathbb{R}P^n |\, x_i \neq 0\}$ sowie $\varphi_i : U_i \to \mathbb{R}^n$, $\varphi_i([x_0 : \ldots : x_n]) = \left(\frac{x_0}{x_i}, \ldots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \ldots, \frac{x_n}{x_i}\right)$ für $[x_0 : \ldots : x_n] \in U_i$ und alle $i = 0, \ldots, n$. Dann ist φ_i stetig da $\varphi_i \circ \pi$, eingeschränkt auf eine geeignete offene Teilmenge von S^n, stetig ist. Außerdem ist φ_i offensichtlich bijektiv und die stetige Umkehrfunktion ist durch

$$\varphi_i^{-1}(y_1, \ldots, y_n) = [y_1 : \ldots : y_i : 1 : y_{i+1} : \ldots y_n]$$

gegeben. Weiter ist für $0 \leq i < j \leq n$ gerade

$$\begin{aligned}(\varphi_j \circ \varphi_i^{-1})(y_1, \ldots, y_n) &= \varphi_j([y_1 : \ldots : y_i : 1 : y_{i+1} : \ldots y_n]) \\ &= \left(\frac{y_1}{y_i}, \ldots, \frac{y_i}{y_j}, \frac{1}{y_j}, \frac{y_{i+1}}{y_j}, \ldots, \frac{y_{j-1}}{y_j}, \frac{y_{j+1}}{y_j}, \ldots, \frac{y_n}{y_j}\right)\end{aligned}$$

ein Diffeomorphismus von $\varphi_i(U_i \cap U_j) = \{\,(y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n |\, y_j \neq 0\}$ nach $\varphi_j(U_i \cap U_j) = \{\,(y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n |\, y_{i+1} \neq 0\}$. Damit ist $\{(U_i, \varphi_i) | i = 0, \ldots, n\}$ ein Atlas von $\mathbb{R}P^n$.

Es verbleibt zu zeigen, dass $\mathbb{R}P^n$ das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt und ein Hausdorff-Raum ist. Das ist etwas technisch, soll hier im Skript aber der Vollständigkeit halber ausgeführt werden. Wir werden später sehen, dass die Tatsache, dass $\mathbb{R}P^n = S^n/\sim$ eine Mannigfaltigkeit ist, aus der Tatsache folgt, dass S^n eine Mannigfaltigkeit ist und die Äquivalenzrelation $\sim$ hier durch die differenzierbare freie und eigentliche Gruppenoperation der Lie-Gruppe $\mathbb{Z}_2$ induziert wird.

Um die Gültigkeit des zweiten Abzählbarkeitsaxioms zu zeigen, bemerken wir, dass die kanonische Projektion $\pi : S^n \to \mathbb{R}P^n$ *offen* ist, d.h. offene Mengen auf offene Mengen abbildet. Denn ist U eine offene Menge in S^n, so ist auch $-U$ offen und damit $\pi(U)$ offen in $\mathbb{R}P^n$, denn $\pi^{-1}(\pi(U)) = U \cup (-U)$ ist als Vereinigung offener Mengen offen. Damit erfüllt nun aber $\mathbb{R}P^n$ das zweite Abzählbarkeitsaxiom, da $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ dieses erfüllt und aufgrund der Offenheit von $\pi : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}P^n$ sind die Bilder einer Basis der Topologie von $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ unter π eine Basis der Topologie von $\mathbb{R}P^n$.

Weiter seien $[x]$, $[y] \in \mathbb{R}^n P$ gegeben mit $x, y \in S^n$. Sei $\epsilon := \min\left\{\frac{\|x-y\|}{2}, \frac{\|x+y\|}{2}\right\}$ und $U := B_\epsilon(x) \cap S^n$ sowie $V := B_\epsilon(y) \cap S^n$. Dann ist U eine Umgebung von x in S^n und V eine Umgebung von y in S^n. Daher ist $\pi(U)$ eine Umgebung von $[x]$ in $\mathbb{R}P^n$ und V eine Umgebung von $[y]$ in $\mathbb{R}P^n$. Es ist $\pi(U) \cap \pi(V) = \emptyset$, denn wäre $[z] \in \pi(U) \cap \pi(V)$ für ein $z \in S^n$, so wäre o.B.d.A. $z \in U$ (man ersetze z durch $-z$ falls nötig) und $z \in V$ oder $z \in -V$. Im ersten Fall ist dann $\|x-y\| \leq \|x-z\| + \|z-y\| < 2\epsilon \leq \|x-y\|$, ein Widerspruch. Im zweiten Fall ergibt sich analog ein Widerspruch. Also sind $\pi(U)$ und $\pi(V)$ disjunkt und damit $\mathbb{R}P^n$ ein Hausdorff-Raum.

(v) Ist M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit der Dimension n und N eine differenzierbare Mannigfaltigkeit der Dimension m, so ist das Produkt $M \times N$ ausgestattet mit der Produkttopologie auf natürliche Weise eine differenzierbare Mannigfaltigkeit der Dimension $n+m$: Denn ist $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha) | \alpha \in A\}$ ein Atlas von M und $\mathcal{B} = \{(V_\beta, \psi_\beta) | \beta \in B\}$ ein Atlas von N, so ist

$$\mathcal{A} \times \mathcal{B} := \{(U_\alpha \times V_\beta, \varphi_\alpha \times \psi_\beta | (\alpha, \beta) \in A \times B\}$$

ein Atlas auf $M \times N$.

Das n-fache Produkt $T^n := S^1 \times \dots S^1$ von S^1 wird so zu einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit, dem *n-dimensionalen Torus*.

Wahrscheinlich ist aus der Analysis-Vorlesung der Begriff der Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ bekannt. Wir wollen ihn hier kurz wiederholen und in unseren Kontext einordnen. Dazu führen wir hier allgemeiner Untermannigfaltigkeiten von differenzierbaren Mannigfaltigkeiten M ein:

Definition 1.7. Es sei M eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit. Eine Teilmenge $N \subseteq M$ heißt *(m-dimensionale) Untermannigfaltigkeit von M*, falls es zu jedem Punkt $p \in N$ eine Karte (U, φ) von M (d.h. ein Element der differenzierbaren Struktur von M) existiert mit $p \in U$ und $\varphi(U \cap N) = \varphi(U) \cap (\mathbb{R}^m \times \{0\}^{n-m})$. Eine solche Karte (U, φ) nennen wir dann auch *Untermannigfaltigkeitskarte von N um p*.

Bemerkung.

- Jede m-dimensionale Untermannigfaltigkeit N einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit M ist eine m-dimensionale Mannigfaltigkeit bezüglich der Teilraumtopologie: Einen Atlas erhält man dadurch, dass man um jeden Punkt eine Untermannigfaltigkeitskarte (U, φ) nimmt, φ auf die in N offene Menge $U \cap N$ einschränkt und anschließen die Einschränkung auf die ersten m Komponenten von $\mathbb{R}^n$ projiziert.
- Nach dem Einbettungssatz von Whitney ist jede n-dimensionale Mannigfaltigkeit M eine n-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^{2n}$. Genauer: Es gibt eine *Einbettung* (für die Definition siehe unten) von M nach $\mathbb{R}^{2n}$. Man könnte also theoretisch nur mit Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^N$ arbeiten. Dies hat jedoch viele praktische Nachteile, z.B. ist die Einbettung nicht explizit und auch Quotientenkonstruktionen wie oben bei $\mathbb{R}P^n$ sind so nicht möglich. Daher arbeiten wir weiterhin mit „abstrakten“ Mannigfaltigkeiten

Im Allgemeinen ist die direkte Konstruktion von Untermannigfaltigkeitskarten schwierig. Wir werden weiter unten ein einfacheres Kriterium diskutieren, wann eine Teilmenge einer Mannigfaltigkeit eine Untermannigfaltigkeit ist. Ein Beispiel bei dem die direkte Konstruktion möglich ist, ist die $(n-1)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit $\widetilde{\mathbb{R}P^{n-1}} := \{[x_0 : \ldots : x_{n-1} : 0] \in \mathbb{R}P^n | (x_0, \ldots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}\}$ von $\mathbb{R}P^n$. Denn in diesem Fall können wir als Untermannigfaltigkeitskarten direkt die Karten $(U_0, \varphi_0), \ldots (U_{n-1}, \varphi_{n-1})$ nehmen. Wir bemerken, dass $\widetilde{\mathbb{R}P^{n-1}}$ so "aussieht", wie die $(n-1)$-dimensionale Mannigfaltigkeit $\mathbb{R}P^{n-1}$. Tatsächlich sind $\widetilde{\mathbb{R}P^{n-1}}$ und $\mathbb{R}P^{n-1}$ im Sinne des nächsten Abschnittes diffeomorph.

1.3 Differenzierbare Abbildungen

Wir wollen differenzierbare Abbildungen zwischen Mannigfaltigkeiten M und N definieren. Für allgemeine topologische Räume macht die Definition von differenzierbaren Abbildungen zwischen ihnen keinen Sinn. Unsere topologischen Räume M und N sehen aber mittels Kartenabbildungen lokal wie der $\mathbb{R}^n$ bzw. $\mathbb{R}^m$ aus und dort ist klar, was differenzierbar heißen soll. Daher bietet sich folgende Definition an:

Definition 1.8. Es sei M eine n-dimensionale, N eine m-dimensionale Mannigfaltigkeit und $f : M \to N$ eine Abbildung von M nach N.

- Ist f stetig, so heißt f *differenzierbar*, wenn es für jedes $p \in M$ eine Karte (U, φ) von M um p und eine Karte (V, ψ) von N um $f(p)$ gibt, so dass
$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(f^{-1}(V) \cap U) \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$
differenzierbar ist. Die Menge aller differenzierbarer Abbildungen zwischen M und N notieren wir mit $C^\infty(M, N)$ und für $N = \mathbb{R}$ auch kurz mit $C^\infty(M)$.

- f heißt *Diffeomorphismus*, und M und N dann *diffeomorph*, wenn f differenzierbar und bijektiv ist und auch die Umkehrabbildung $f^{-1} : N \to M$ differenzierbar ist. Die Menge aller Diffeomorphismen von M nach N bezeichen wir mit $\mathrm{Diff}(M, N)$ und für $N = M$ auch kurz mit $\mathrm{Diff}(M)$.

- Sei nun $f : M \to N$ differenzierbar. f heißt *Einbettung von M in N*, falls $f(M)$ eine Untermannigfaltigkeit von N ist und f, aufgefasst als Abbildung nach $f(M)$, d.h. $f : M \to f(M)$, ein Diffeomorphismus ist.

Bemerkung 1.9.

- Im Gegensatz zum Fall von differenzierbaren Abbildungen von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}^m$ setzen wir $f : M \to N$ bereits als stetig voraus. Dies hat den Hintergrund, dass so $f^{-1}(V)$ offen ist und somit auch $\varphi(f^{-1}(V) \cap U) \subseteq \mathbb{R}^n$. Man kann stattdessen auch fordern, dass $f(U) \subseteq V$ ist.

- Eine Funktion $f : U \to V$ zwischen einer offenen Menge U in $\mathbb{R}^n$ und einer offenen Menge V in $\mathbb{R}^m$ ist im obigen Sinne differenzierbar genau dann, wenn sie im Sinne einer Analysis II-Vorlesung differenzierbar ist (denn die Identität auf U und die Identität auf V sind jeweils Karten bezüglich der Standardstruktur auf U bzw. V).

- Da die Kartenwechsel nach Voraussetzung differenzierbar sind, sind alle Kartenabbildungen differenzierbar.

- Ist $f : M \to N$ differenzierbar, so gilt für alle Karten $(\widetilde{U}, \widetilde{\varphi})$ von M und $(\widetilde{V}, \widetilde{\psi})$ von M, dass die Verknüpfung $\widetilde{\psi} \circ f \circ \widetilde{\varphi}^{-1}$ differenzierbar ist: Denn um jeden Punkt p in $\widetilde{U}$ und seinen Bildpunkt $f(p)$ in $\widetilde{V}$ finden wir Karten (U, φ) von M um p und (V, ψ) von N um $f(p)$, so dass $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ differenzierbar ist. Dann ist $\widetilde{\psi} \circ f \circ \widetilde{\varphi}^{-1} = (\widetilde{\psi} \circ \psi^{-1}) \circ (\psi \circ f \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ \widetilde{\varphi}^{-1})$ und somit $\widetilde{\psi} \circ f \circ \widetilde{\varphi}^{-1}$ lokal um p differenzierbar (man schränke überall geeignet ein).

- Durch „Zwischenschalten“ geeigneter Kartenabbildungen sieht man leicht ein, dass die Verknüpfung $g \circ f : M \to P$ zweier differenzierbarer Abbildung $f : M \to N$ und $g : N \to P$ zwischen Mannigfaltigkeiten M, N und P wieder differenzierbar ist.

- Wir bemerken, dass es auf $\mathbb{R}$ (und auch höher-dimensionalen $\mathbb{R}^n$) verschiedene differenzierbare Strukturen gibt, die zueinander diffeomorph sind: Dazu betrachten die durch $(\mathbb{R}, f)$ mit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$ induzierte differenzierbare Struktur $\mathcal{B}$. Wir bemerken, dass f ein Homöomorphismus von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ ist und somit tatsächlich eine (globale) Karte von $\mathbb{R}$ definiert. Jedoch ist $(\mathbb{R}, f)$ nicht in der Standardstruktur $\mathcal{A}$ enthalten und somit $\mathcal{B} \neq \mathcal{A}$, da der Kartenwechsel $\mathrm{id}_{\mathbb{R}} \circ f^{-1} = f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$ in 0 nicht differenzierbar ist. Jedoch sind $(\mathbb{R}, \mathcal{A})$ und $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ mittels des Diffeomorphismus f^{-1} diffeomorph.

- Man kann zeigen, dass für $n \neq 4$, $\mathbb{R}^n$ mit einer beliebigen differenzierbaren Struktur ausgestattet immer diffeomorph zu $\mathbb{R}^n$ ausgestattet mit der Standardstruktur ist, siehe [S]. Erstaunlicherweise gilt dies nicht mehr für $n = 4$ und es gibt sogar überabzählbar viele differenzierbare Strukturen auf $\mathbb{R}^4$, die nicht zueinander diffeomorph sind, siehe [T].

Eine wichtige Klasse von differenzierbaren Mannigfaltigkeiten ist durch sogenannte *Lie-Gruppen* gegeben.

Definition 1.10. Eine differenzierbare Mannigfaltigkeit G heißt *Lie-Gruppe*, wenn G eine Gruppenstruktur trägt, so dass die Gruppenmultiplikation $\mu : G \times G \to G$, $\mu(g, h) := g \cdot h$, und die Gruppeninversion $\iota : G \to G$, $\iota(g) := g^{-1}$ differenzierbar sind.

Beispiel 1.11. Die (reelle) allgemeine lineare Gruppe $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ ist eine n^2-dimensionale Lie-Gruppe:
Zunächst ist $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) = \det^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ aufgrund der Stetigkeit von $\det : \mathbb{R}^{n \times n} \to \mathbb{R}$ eine offene Teilmenge des n^2-dimensionalen Vektorraumes $\mathbb{R}^{n \times n}$ und damit eine n^2-dimensionale Mannigfaltigkeit. Weiter sind die Gruppenmultiplikation und die Gruppeninversion als polynomiale bzw. rationale Funktionen ihrer Einträge offensichtlich differenzierbar und somit $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ eine Lie-Gruppe.
Genauso zeigt man, dass die komplexe allgemeine lineare Gruppe $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ eine $2n^2$-dimensionale Lie-Gruppe ist (man beachte, dass $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}^{n \times n}) = 2n^2$ ist).

Man kann zeigen, dass jede abgeschlossene Untergruppe von $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ eine Untermannigfaltigkeit von $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ ist. Da die Einschränkung differenzierbarer Abbildungen auf eine Untermannigfaltigkeit ebenfalls differenzierbar sind (Übung!), sind abgeschlossene Untergruppen von $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ Lie-Gruppen. Dies gilt dann beispielsweise für die Gruppen $\mathrm{O}(n)$, $\mathrm{SO}(n)$, $\mathrm{U}(n)$, $\mathrm{SU}(n)$, $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$ und $\mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$. Wir werden die Aussage über abgeschlossene Untergruppen von $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ hier nicht beweisen, sondern in den Übungen mit Hilfe des Satzes vom regulären Wert (siehe weiter unten) direkt zeigen, dass einige dieser Gruppen Untermannigfaltigkeiten von $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ und damit Lie-Gruppen sind.

1.4 Der Tangentialraum

In diesem Abschnitt definieren wir auf zwei verschiedene Arten und Weisen den Tangentialraum einer Mannigfaltigkeit M. Dazu erinnern wir zunächst daran, dass für eine Untermannigfaltigkeit M des $\mathbb{R}^N$ der Tangentialraum $T_pM \subseteq \mathbb{R}^N$ an einem Punkt $p \in M$ definiert war als die Menge aller Richtungen von Kurven γ in M durch p, d.h. als

$$T_pM := \left\{\gamma'(0) | \gamma : (-\epsilon,\epsilon) \to M \subseteq \mathbb{R}^N \text{ differenzierbar, } \gamma(0) = p,\ \epsilon > 0\right\}.$$

Anschaulich ist also T_pM die Menge aller Richtungen von differenzierbaren Kurven in M durch p. Wollen wir dies analog für abstrakte Mannigfaltigkeiten M definieren, so können wir dort zwar nun von differenzierbaren Kurven $\gamma : (-\epsilon,\epsilon) \to M$ reden, diese aber nicht zu ableiten und so über die Richtung der Kurve in einem Punkt $p \in M$ reden. Die Idee ist, diese Kurven wiederum durch Nachschalten einer Karte (U,φ) um p zu einer Kurve $\varphi \circ \gamma$ nach $\mathbb{R}^n$ zu machen und dann diese Kurve in 0 abzuleiten. Ist diese Ableitung für zwei Kurven durch p gleich, sollten diese die gleiche Richtung in p repräsentieren. Wir definieren daher:

Definition 1.12 (Geometrische Definition des Tangentialraumes)**.** Es sei M eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit und $p \in M$ gegeben. Wir nennen zwei differenzierbare Kurven $\gamma_1 : (-\epsilon_1,\epsilon_1) \to M$ und $\gamma_2 : (-\epsilon_2,\epsilon_2) \to M$ mit $\epsilon_1,\epsilon_2 > 0$ und $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = p$ *äquivalent in* p, falls für eine (und dann jede) Karte (U,φ) von M um p gerade $(\varphi \circ \gamma_1)'(0) = (\varphi \circ \gamma_2)'(0)$ gilt. Eine Äquivalenzklasse von solchen Kurven bezeichnen wir mit $[\gamma]_p$ und nennen sie einen *Tangentialvektor (von* M *in* p*)*. Die Menge T_pM aller Tangentialvektoren von M in p nennen wir den *Tangentialraum von* M *in* p, d.h. T_pM ist definiert als

$$T_pM := \{\, [\gamma]_p |\, \gamma : (-\epsilon,\epsilon) \to M \text{ differenzierbar, } \gamma(0) = p,\ \epsilon > 0\}.$$

T_pM ist auf natürliche Weise ein n-dimensionaler (reeller) Vektorraum:

Lemma 1.13. *Es sei* M *eine Mannigfaltigkeit und* $p \in M$*. Für eine Karte* (U,φ) *von* M *um* p *sei*

$$\theta_\varphi : T_pM \to \mathbb{R}^n, \quad \theta_\varphi([\gamma]_p) := (\varphi \circ \gamma)'(0).$$

Dann ist θ_φ *eine Bijektion und für eine weitere Karte* (V,ψ) *von* M *um* p *ist* $\theta_\psi \circ \theta_\varphi^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *ein Vektorraumisomorphismus. Daher können wir auf* T_pM *eine eindeutige*

Vektorraumstruktur so definieren, dass T_pM ein n-dimensionaler Vektorraum und die Abbildung $\theta_\varphi : T_pM \to \mathbb{R}^n$ für jede Karte (U, φ) ein Vektorraumisomorphismus wird.

Beweis. Nach Definition der Äquivalenzklasse ist θ_φ wohldefiniert und injektiv. Sei nun $v \in \mathbb{R}^n$ gegeben. Für $|t|$ klein genug ist die Kurve $t \mapsto \gamma_v(t) := \varphi^{-1}(\varphi(p) + tv)$ wohldefiniert und es gilt $\gamma_v(0) = p$ sowie $\theta_v([\gamma_v]_p) = (\varphi \circ \gamma_v)'(0) = v$. Daher ist θ_φ auch surjektiv. Nun ist $(\psi \circ \gamma_v)(t) = (\psi \circ \varphi^{-1})(\varphi(p) + tv)$, daher $(\psi \circ \gamma_v)'(0) = D(\psi \circ \varphi^{-1})(\varphi(p))(v)$ und somit

$$(\theta_\psi \circ \theta_\varphi^{-1})(v) = \theta_\psi([\gamma_v]_p) = (\psi \circ \gamma_v)'(0) = D(\psi \circ \varphi^{-1})(\varphi(p))(v),$$

d.h. $\theta_\psi \circ \theta_\varphi^{-1} = D(\psi \circ \varphi^{-1})(\varphi(p))$ und folglich ist $\theta_\psi \circ \theta_\varphi^{-1}$ ein Vektorraumisomorphismus von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}^n$. □

Bemerkung 1.14. Für eine n-dimensionale Untermannigfaltigkeit M des $\mathbb{R}^N$ können wir für jedes $p \in M$ den oben definierten Tangentialraum T_pM kanonisch mit dem vorher bekannten Tangentialraum einer Untermannigfaltigkeit als konkreten Untervektorraum von $\mathbb{R}^N$ mittels der Abbildung $T_pM \ni [\gamma]_p \mapsto \gamma'(0) \in \mathbb{R}^N$.
Für U offene Teilmenge in $\mathbb{R}^N$ ist diese Abbildung surjektiv und entspricht gerade θ_{id_U}. Wir können und werden in diesem Fall also im Folgenden immer T_pU mit $\mathbb{R}^N$ identifizieren. Diese Identifikation lässt sich auf beliebige offene Teilmenge U eines (abstrakten) endlich-dimensionalen Vektorraumes V fortsetzen, wir haben dann also $T_pU = V$.

Bei unserer ersten Definition von Tangentialvektoren in $p \in M$ hatten wir diese geometrisch als Richtungen von differenzierbaren Kurven in p definiert. Die zweite Definition betrachtet Tangentialvektoren in p als Richtungsableitungen von differenzierbaren Funktionen auf M im Punkt p, sogenannten *Derivationen in p*. Offensichtlich lang es dazu, lokal um $p \in M$ definierte differenzierbare Funktionen auf M zu betrachten:

Definition 1.15. Es sei M eine Mannigfaltigkeit und $p \in M$ ein Punkt in M. Zwei differenzierbare Funktionen $f_1 : U_1 \to \mathbb{R}$ und $f_2 : U_2 \to \mathbb{R}$ die auf Umgebungen U_1 und U_2 von p definiert sind, nennen wir *äquivalent in p*, wenn es eine Umgebung U von p mit $U \subseteq U_1 \cap U_2$ gibt, so dass $f_1|_U = f_2|_U$ gilt. Eine Äquivalenzklasse von solchen Funktionen f nennen wir einen *(differenzierbaren) Funktionskeim in p* und schreiben $[f]_p$. Die $\mathbb{R}$-Algebra aller differenzierbaren Funktionskeime in p bezeichnen wir mit $C_p^\infty(M)$.

Damit können wir nun wie folgt *Derivationen in p* definieren:

Definition 1.16. Es sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und $p \in M$ ein Punkt in M. Eine *Derivation in p* ist eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung

$$\delta : C_p^\infty(M) \to \mathbb{R},$$

die die *Leibnizregel* erfüllt, d.h. für $f, g \in C^\infty(M)$ soll

$$\delta([f]_p \cdot [g]_p) = \delta([f]_p) \cdot g(p) + f(p) \cdot \delta([g]_p)$$

gelten.
Für den Raum aller Derivationen in p schreiben wir $\mathrm{Der}_p(M)$.

Bemerkung. Man kann äquivalent dazu auch Derivationen in $p \in M$ auf $C^\infty(M)$ betrachten. Dies ist sicherlich vom Verständis her einfacher als mit Funktionskeimen zu arbeiten, führt aber weiter unten zu einem deutlich technischeren Beweis, dass $\mathrm{Der}_p(M)$ isomorph zu T_pM ist.

Man sieht direkt dass der Raum aller Derivationen ein reeller Vektorraum ist. Tatsächlich wird dieser isomorph zu T_pM sein mittels der Abbildung $\ni T_pM \in [\gamma]_p \mapsto \partial_\gamma \in \mathrm{Der}_p(M)$, wobei ∂_γ wie im folgenden Beispiel definiert ist:

Beispiel 1.17. (i) Es sei $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ eine differenzierbare Kurve in M mit $\gamma(0) = p$. Wir definieren eine Derivation $\partial_\gamma : C_p^\infty(M) \to \mathbb{R}$ über $\partial_\gamma([f]_p) := (f \circ \gamma)'(0)$ für $[f]_p \in C_p^\infty(M)$. Die Leibnizformel ergibt sich dabei direkt aus der Produktregel.

(ii) Es sei (U, φ) eine Karte um p, $\varphi = (x_1, \dots, x_n)$. Dann ist $\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p : C_p^\infty(M) \to \mathbb{R}$, definiert durch
$$\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p ([f]_p) := \frac{\partial (f \circ \varphi^{-1})}{\partial x_i}(\varphi(p))$$
für $[f]_p \in C_p^\infty(M)$, für jedes $i = 1, \dots, n$ eine Derivation in p, da gerade $\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p = \partial_{\gamma_i}$ für die Kurve $\gamma_i : (-\epsilon_i, \epsilon_i) \to M$, $\gamma_i(t) := \varphi^{-1}(\varphi(p) + te_i)$ gilt.

Wir betrachten nun die Abbildung
$$\Phi : T_pM \to \mathrm{Der}_p(M), \quad \Phi([\gamma]_p) := \partial_\gamma.$$

Zunächst ist Φ wohldefiniert, also unabhängig vom Repräsentanten γ von $[\gamma]_p$:
Sei dazu $[f]_p \in C_p^\infty(M)$ gegeben. Wähle nun eine Karte (U, φ) um p. Dann kann man (durch geeignetes Einschränken) $f \circ \gamma = (f \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ \gamma)$ schreiben und erhält folglich
$$\partial_\gamma([f]_p) = (f \circ \gamma)'(0) = D(f \circ \varphi^{-1})(\varphi(p))((\varphi \circ \gamma)'(0)) = \Big(D(f \circ \varphi^{-1})(\varphi(p)) \circ \theta_\varphi\Big)([\gamma]_p).$$

Da $D(f \circ \varphi^{-1})(\varphi(p))$ und θ_φ linear sind, zeigt diese Darstellung zeigt auch, dass Φ linear ist.
Daneben ist F injektiv:
Sei dazu $[\gamma]_p$ mit $\Phi([\gamma]_p) = 0$ gegeben. Sei weiter (U, φ) eine Karte um p, $\varphi = (x_1, \dots, x_n)$. Dann folgt
$$0 = \Phi([\gamma]_p)([x_i]_p) = \partial_\gamma([x_i]_p) = (x_i \circ \gamma)'(0) = (\varphi \circ \gamma)_i'(0)$$
für alle $i = 1 \dots, n$. Daher ist $(\varphi \circ \gamma)'(0) = 0$ und somit $[\gamma]_p = 0$.
Φ ist sogar ein Vektorraumisomorphismus:

Proposition 1.18. *Es sei M eine Mannigfaltigkeit, $p \in M$ ein Punkt in M und $\Phi : T_pM \to \mathrm{Der}_p(M)$ wie oben. Dann ist Φ ein Vektorraumisomorphismus. Weiter ist $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\Big|_p\right)$ für jede Karte (U, φ) um p, $\varphi = (x_1, \dots, x_n)$, eine Basis von $\mathrm{Der}_p(M)$.*

Beweis. Wir müssen noch zeigen, dass Φ surjektiv ist und $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_p, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\Big|_p\right)$ eine Basis von $\mathrm{Der}_p(M)$ ist.
Dazu bemerken wir zunächst, dass $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_p, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\Big|_p\right)$ linear unabhängig ist:
Denn ist $0 = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p$, so ist wegen $\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p = \Phi([\gamma_i]_p)$ mit γ_i wie in Beispiel 1.17 (ii) und der Linearität und Injektivität von Φ gerade $0 = \sum_{i=1}^n a_i \cdot [\gamma_i]_p$ und damit $0 = \theta_\varphi(\sum_{i=1}^n a_i \cdot [\gamma_i]_p) = \sum_{i=1}^n a_i \cdot e_i$, also $a_1 = \ldots = a_n = 0$. Daher ist $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_p, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\Big|_p\right)$ linear unabhängig.
Sei nun eine Derivation δ in p gegeben. Wir zeigen, dass

$$\delta = \sum_{i=1}^n \delta([x_i]_p) \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p$$

gilt. Dies zeigt nicht nur, dass $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_p, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\Big|_p\right)$ ein Erzeugendensystem, und damit eine Basis, von $\mathrm{Der}_p(M)$ ist, sondern auch die Surjektivität von Φ, da Φ linear ist und $\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p$ im Bild von Φ für jedes $i = 1, \ldots, n$ liegt.
Sei dazu $[f]_p \in C_p^\infty(M)$ gegeben. Wir wählen $\epsilon > 0$ so klein, dass $B_\epsilon(\varphi(p)) \subseteq \varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ ist und f auf $\widetilde{U} := \varphi^{-1}(B_\epsilon(\varphi(p)))$ definiert ist. Wir zeigen nun, dass auf $\widetilde{U}$ gerade

$$f = f(p) + \sum_{i=1}^n (x_i - x_i(p)) \cdot f_i$$

für differenzierbare Funktionen $f_i : \widetilde{U} \to \mathbb{R}$ mit $f_i(p) = \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p([f]_p)$ gilt.
Sei dazu $q \in \widetilde{U}$, $q \neq p$ gegeben. Wir setzen $\gamma : [0,1] \to B_\epsilon(\varphi(p))$, $\gamma(t) := \varphi(p) + t(\varphi(q) - \varphi(p))$ sowie $g : [0,1] \to \mathbb{R}$, $g(t) := f(\varphi^{-1}(\gamma(t)))$, und erhalten mit der Kettenregel

$$g'(t) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial x_i}(\gamma(t)) \cdot (x_i(q) - x_i(p))$$

und damit

$$\begin{aligned} f(q) - f(p) = g(1) - g(0) = \int_0^1 g'(t)\,dt &= \sum_{i=1}^n (x_i(q) - x_i(p)) \cdot \int_0^1 \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial x_i}(\gamma(t))\,dt \\ &= \sum_{i=1}^n (x_i(q) - x_i(p)) \cdot f_i(q) \end{aligned}$$

mit $f_i : U \to \mathbb{R}$, $f_i(\widetilde{q}) := \int_0^1 \frac{\partial(f\circ\varphi^{-1})}{\partial x_i}(\varphi(p) + t(\varphi(\widetilde{q}) - \varphi(p)))\,dt$. f_i ist offensichtlich C^∞, definiert also einen Funktionskeim $[f_i]_p$ in p und es gilt wegen oben $f = f(p) + \sum_{i=1}^n (x_i - x_i(p)) \cdot f_i$ auf U. Weiter ist

$$f_i(p) = \int_0^1 \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial x_i}(\varphi(p))\,dt = \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial x_i}(\varphi(p)) = \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p([f]_p),$$

für jedes $i = 1, \ldots, n$ wie gewünscht.
Bevor wir nun diese lokale Beschreibung von f benutzen um mittels der $\mathbb{R}$-Linearität und der Leibnizregel für δ obige Formel für $\delta([f]_p)$ beweisen, bemerken wir, dass die Leibnizregel für δ uns gerade $\delta(1) = \delta(1 \cdot 1) = \delta(1) \cdot 1 + 1 \cdot \delta(1) = 2\delta(1)$, also $\delta(1) = 0$ gibt. Mittels der $\mathbb{R}$-Linearität von δ ergibt sich daraus dann $\delta(c) = c \cdot \delta(1) = 0$ für jedes $c \in \mathbb{R}$ und somit

$$\begin{aligned} \delta([f]_p) &= \delta([f(p)]_p) + \sum_{i=1}^n \delta([x_i]_p \cdot [f_i]_p) - \sum_{i=1}^n \delta([x_i(p)]_p \cdot [f_i]_p) \\ &= \sum_{i=1}^n (\delta([x_i]_p) \cdot f_i(p) + x_i(p) \cdot \delta([f_i]_p) - x_i(p) \cdot \delta([f_i]_p)) \\ &= \sum_{i=1}^n \delta([x_i]_p) \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p ([f]_p), \end{aligned}$$

was $\delta = \sum_{i=1}^n \delta([x_i]_p) \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p$ zeigt. □

Im Folgenden werden wir wegen Proposition 1.18 auch $\mathrm{Der}_p(M)$ als den Tangentialraum von M in p betrachten. Das ist dann die *algebraische Definition* von T_pM.

1.5 Das Differential einer differenzierbaren Abbildung

In diesem Abschnitt behandeln wir das Differential in einem Punkt $p \in M$ einer differenzierbaren Abbildung $F : M \to N$ zwischen zwei Mannigfaltigkeiten M und N:

Definition 1.19. Es seien M und N zwei Mannigfaltigkeiten, $F : M \to N$ eine differenzierbare Abbildung sowie $p \in M$. Dann ist das *Differential von F in p* definiert als die Abbildung

$$dF_p : T_pM \to T_{F(p)}N, \quad dF_p([\gamma]_p) := [F \circ \gamma]_{F(p)}.$$

Lemma 1.20. *Es seien M und N zwei Mannigfaltigkeiten, $F : M \to N$ eine differenzierbare Abbildung sowie $p \in M$. Dann ist das Differential dF_p von F in p linear.*

Beweis. Es seien Karten (U, φ) von M um p und (V, ψ) von N um $F(p)$ gegeben. Wegen $\theta_\varphi^{-1}(v) = [t \mapsto \varphi^{-1}(\varphi(p) + tv)]_p$ ist

$$(\theta_\psi \circ dF_p \circ \theta_\varphi^{-1})(v) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \Big(t \mapsto (\psi \circ F \circ \varphi^{-1})(\varphi(p) + tv)\Big) = D(\psi \circ F \circ \varphi^{-1})(\varphi(p))(v)$$

für $v \in \mathbb{R}^n$, also $\theta_\psi \circ dF_p \circ \theta_\varphi^{-1} = D(\psi \circ F \circ \varphi^{-1})$. Daher ist $\theta_\psi \circ dF_p \circ \theta_\varphi^{-1}$ linear. Da θ_ψ und θ_φ Vektorraumisomorphismen sind, ist dann auch dF_p linear. □

Bemerkung 1.21. (i) Ist $M = U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $N = V \subseteq \mathbb{R}^m$ offen und $F : U \to V$ differenzierbar, so ist mit der in Bemerkung 1.14 beschriebenen Identifikation von T_pM mit $\mathbb{R}^n$ und $T_{F(p)}N$ mit $\mathbb{R}^m$ gerade $dF_p = DF(p)$:

Sei dazu $v \in T_pU = \mathbb{R}^n$ gegeben. Dann erfüllt die differenzierbare Kurve $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to U, \gamma(t) := p+tv$, gerade $\gamma'(0) = v$ und wir erhalten $dF_p(v) = (F\circ\gamma)'(0) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} F(p+tv) = DF(p)(v)$.

(ii) Sei nun $F : M \to N$ wieder eine differenzierbare Abbildung zwischen beliebigen Mannigfaltigkeiten M und N und sei $p \in M$. Die Beschreibung von dF_p bezüglich der Identifikation von T_pM mit $\mathrm{Der}_p(M)$ aus Proposition 1.18 ist wie folgt:

Sei eine Derivation δ in p gegeben. Dann ist nach dem Beweis von Proposition 1.18 gerade $\delta = \sum_{i=1}^n \delta(x_i) \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p$ und entspricht daher dem Element $\sum_{i=1}^n \delta(x_i) \cdot [\gamma_i]_p = \sum_{i=1}^n \delta(x_i) \cdot [t \mapsto \varphi^{-1}(\varphi(p) + te_i)]_p$. Nun ist, für jedes $i = 1, \dots, n$, gerade $dF_p([t \mapsto \varphi^{-1}(\varphi(p) + te_i)]_p) = [t \mapsto (F \circ \varphi^{-1})(\varphi(p) + te_i)]_p$ und dieses Element enspricht der Derivation $\delta_i \in \mathrm{Der}_{F(p)} N$ mit

$$\begin{aligned}\delta_i([g]_{F(p)}) &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (t \mapsto (g \circ F \circ \varphi^{-1})(\varphi(p) + te_i)) = \frac{\partial((g \circ F) \circ \varphi^{-1})}{\partial x_i}(\varphi(p)) \\ &= \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p ([g \circ F]_p)\end{aligned}$$

für $[g]_{F(p)} \in C^\infty_{F(p)}(N)$ und somit

$$dF_p(\delta)([g]_{F(p)}) = \sum_{i=1}^n \delta(x_i) \cdot \delta_i([g]_{F(p)}) = \sum_{i=1}^n \delta(x_i) \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p ([g \circ F]_p) = \delta([g \circ F]_p),$$

wobei der letzte Schritt wiederum die Formel aus dem Beweis von Proposition 1.18 benutzt.

(iii) Es sei nun (U, φ) eine Karte einer n-dimensionalen differenzierbaren Mannigfaltigkeit M, $\varphi = (x_1, \dots, x_n)$. Weiter sei $i \in \{1, \dots, n\}$. Unter der Identifikation von $\mathrm{Der}_p(M)$ mit T_pM entspricht $\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p$ dem Element $[\gamma_i]_p = [t \mapsto \varphi^{-1}(\varphi(p) + te_i)]_p$ und damit ist

$$d\varphi_p\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p\right) = d\varphi_p([t \mapsto \varphi^{-1}(\varphi(p) + te_i]_p) = [\varphi(p) + te_i]_{\varphi(p)} = e_i,$$

wobei wir im letzten Schritt gerade die kanonische Identifikation von $T_{\varphi(p)}\varphi(U)$ mit $\mathbb{R}^n$ benutzt haben. Daher ist

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p = d(\varphi^{-1})_{\varphi(p)}(e_i),$$

was wir im Folgenden öfters benutzen werden.

(iv) Es sei $F : M \to N$ eine differenzierbare Abbildung zwischen zwei differenzierbaren Mannigfaltigkeiten M und N. Weiter sei $p \in M$.

Wir wählen nun Karten (U,φ) um p und (V,ψ) um $F(p)$ und schreiben $\varphi = (x_1,\ldots,x_n)$ und $\psi = (y_1,\ldots,y_m)$. Dann ist

$$\begin{aligned} dF_p\left(\left.\tfrac{\partial}{\partial x_i}\right|_p\right)([g]_{F(p)}) &= \left.\tfrac{\partial}{\partial x_i}\right|_p([g\circ F]_p) = \frac{\partial(g\circ F\circ\varphi^{-1})}{\partial x_i}(\varphi(p)) \\ &= \frac{\partial((g\circ\psi^{-1})\circ(\psi\circ F\circ\varphi^{-1}))}{\partial x_i}(\varphi(p)) \\ &= \sum_{j=1}^m \frac{\partial(g\circ\psi^{-1})}{\partial y_j}(\psi(F(p)))\cdot\frac{\partial(\psi\circ F\circ\varphi^{-1})_j}{\partial x_i}(\varphi(p)) \\ &= \sum_{j=1}^m D(\psi\circ F\circ\varphi^{-1})_{ji}(\varphi(p))\cdot\left.\tfrac{\partial}{\partial y_j}\right|_{F(p)}([g]_{F(p)}), \end{aligned}$$

d.h. $dF_p\left(\left.\tfrac{\partial}{\partial x_i}\right|_p\right) = \sum_{j=1}^m D(\psi\circ F\circ\varphi^{-1})_{ji}(\varphi(p))\cdot\left.\tfrac{\partial}{\partial y_j}\right|_{F(p)}$. Somit ist die darstellende Matrix von dF_p bezüglich der Basis $\left(\left.\tfrac{\partial}{\partial x_1}\right|_p,\ldots,\left.\tfrac{\partial}{\partial x_n}\right|_p\right)$ von T_pM und der Basis $\left(\left.\tfrac{\partial}{\partial y_1}\right|_{F(p)},\ldots,\left.\tfrac{\partial}{\partial y_m}\right|_{F(p)}\right)$ von $T_{F(p)}N$ gerade $D(\psi\circ F\circ\varphi^{-1})(\varphi(p))$. Insbesondere ist $\mathrm{Rang}(dF_p) = \mathrm{Rang}\Big(D(\psi\circ F\circ\varphi^{-1})(\varphi(p))\Big)$.

Für die Differentiale differenzierbarer Abbildungen zwischen Mannigfaltigkeiten gilt die Kettenregel:

Proposition 1.22 (Kettenregel)**.** *Es seien M, N und P differenzierbare Mannigfaltigkeiten und $F: M\to N$ sowie $G: N\to P$ differenzierbare Abbildungen. Dann gilt $d(G\circ F)_p = dG_{F(p)}\circ dF_p$ für jeden Punkt $p\in M$.*

Beweis. Es ist $d(G\circ F)_p([\gamma]_p) = [G\circ F\circ\gamma]_{(G\circ F)(p)} = [G\circ(F\circ\gamma)]_{G(F(p))} = dG_{F(p)}([F\circ\gamma]_{F(p)}) = dG_{F(p)}(dF_p([\gamma]_p))$ für alle $[\gamma]_p\in M$ und die Behauptung folgt. □

Bemerkung 1.23. Es sei $c:(a,b)\to M$ eine differenzierbare Kurve in einer Mannigfaltigkeit M. Unter Benutzung der kanonischen Identifikation von $T_{t_0}(a,b)$ mit $\mathbb{R}$ setzen wir $\dot c(t_0) := c'(t_0) := dc_{t_0}(1)$ für jedes $t_0\in(a,b)$. Wir bemerken, dass $1\in T_{t_0}(a,b)$ gerade der Äquivalenzklasse $[t\mapsto t+t_0]_{t_0}$ entspricht und somit

$$\begin{aligned} \dot c(t_0) = dc_{t_0}(1) = [t\mapsto c(t_0+t)]_{c(t_0)} &= \sum_{i=1}^n \partial_{t\mapsto c(t_0+t)}([x_i]_{c(t_0)})\cdot\left.\tfrac{\partial}{\partial x_i}\right|_{c(t_0)} \\ = \sum_{i=1}^n \left.\tfrac{d}{dt}\right|_{t=0}(t\mapsto x_i(c(t_0+t)))\cdot\left.\tfrac{\partial}{\partial x_i}\right|_{c(t_0)} &= \sum_{i=1}^n \dot c_i(t_0)\cdot\left.\tfrac{\partial}{\partial x_i}\right|_{c(t_0)} \end{aligned}$$

für $c_i := x_i\circ c:(a,b)\to\mathbb{R}$ gilt.
Sei nun $F: M\to N$ eine Abbildung von M in eine andere Mannigfaltigkeit N. Dann gilt aufgrund der Kettenregel $(F\circ c)'(t_0) = d(F\circ c)_{t_0}(1) = dF_{c(t_0)}(dc_{t_0}(1)) = dF_{c(t_0)}(c'(t_0))$. Damit können und werden wir oft den Wert $dF_p(v)$ für $p\in M$, $v\in T_pM$ wie folgt bestimmen:

Wir wählen eine Kurve $\gamma : (-\epsilon, \epsilon)$ mit $\gamma(0) = p$ und $\gamma'(0) = [\gamma]_p = v$ (diese existiert nach Definition des Tangentialraumes). Dann gilt gerade $(F \circ \gamma)'(0) = dF_p(\gamma'(0)) = dF_p(v)$.

1.6 Sätze aus der Analysis und Untermannigfaltigkeiten

In diesem Abschnitt wollen wir zunächst verschiedene Sätze aus der Analysis-Vorlesung über differenzierbare Abbildungen zwischen $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^m$ auf Mannigfaltigkeiten übertragen. Diese Sätze benutzen wir dann, um Kriterien anzugeben, wann eine differenzierbare Abbildung zwischen Mannigfaltigkeiten eine Einbettung ist und wann bestimmte Teilmengen von Mannigfaltigkeiten Untermannigfaltigkeiten sind.
Zunächst erinnern wir an den folgenden Satz über die lokale Umkehrbarkeit von differenzierbaren Abbildungen:

Satz 1.24. *Es sei U eine offene Menge in $\mathbb{R}^n$, $f : U \to \mathbb{R}^n$ differenzierbar sowie $p \in U$. Dann ist $Df(p) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ invertierbar genau dann, wenn es eine offene Umgebung $\widetilde{U}$ von p mit $\widetilde{U} \subseteq U$ gibt, so dass $f|_{\widetilde{U}}$ ein Diffeomorphismus auf eine offene Umgebung $\widetilde{V}$ von $f(p)$ ist.*

Damit folgt direkt:

Satz 1.25 (Umkehrsatz)**.** *Es sei $f : M \to N$ eine differenzierbare Abbildung zwischen Mannigfaltigkeiten M und N sowie $p \in M$. Dann ist $df_p : T_pM \to T_{F(p)}N$ invertierbar genau dann, wenn es eine eine offene Umgebung U von p in M gibt, so dass $f|_U$ ein Diffeomorphismus auf eine offene Umgebung V von $f(p)$ ist. Ist dies der Fall, so gilt $\dim(M) = \dim(N)$ und*

$$d((f|_U)^{-1})_q = \left(df_{f^{-1}(q)}\right)^{-1}$$

für alle $q \in V$.

Beweis. Die Richtung „$\Leftarrow$“ und der Zusatz sind wegen der Kettenregel klar.
Für die Richtung „$\Rightarrow$“, bemerken wir, dass aufgrund der Invertierbarkeit von $df_p : T_pM \to T_{F(p)}N$ gerade $\dim(M) = \dim(T_pM) = \dim(T_{f(p)}N) = \dim(N)$ gilt. Wähle Karten (U, φ) um p und (V, ψ) um $f(p)$ mit $f(U) \subseteq V$. Da die Kartenabbildungen Diffeomorphismen sind, ist mit df_p auch $d(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})_{\varphi(p)} = d\psi_{f(p)} \circ df_p \circ d(\varphi^{-1})_{\varphi(p)}$ invertierbar. Daher können wir Satz 1.24 auf $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ anwenden. Da ψ und φ^{-1} Diffeomorphismen sind, erhalten wir daraus das gewünschte Resultat für f. $\square$

Als nächstes widmen wir uns den lokalen Normalformen von *Immersionen* bzw. *Submersionen in einem Punkt* $p \in M$ zu. Dazu benötigen wir zunächst einige Bezeichnungen:

Definition 1.26. Es sei $f : M \to N$ eine differenzierbare Abbildung zwischen zwei Mannigfaltigkeiten M und N.

- f heißt *Immersion in* $p \in M$, falls $df_p : T_pM \to T_{F(p)}N$ injektiv ist. f heißt *Immersion*, falls f Immersion in jedem Punkt $p \in M$ ist.

- f heißt *Submersion in* $p \in M$, falls $df_p : T_pM \to T_{F(p)}N$ surjektiv ist. f heißt *Submersion*, falls f Submersion in jedem Punkt $p \in M$ ist.
- Ein $p \in M$ heißt *regulärer Punkt (von f)*, falls f eine Submersion in p ist, sonst *kritischer Punkt (von f)*. Ein $q \in N$ heißt *regulärer Wert (von f)*, falls jedes $p \in f^{-1}(q)$ ein regulärer Punkt ist.

Aus der Analysis ist folgender Satz bekannt:

Satz 1.27. *Es sei U eine offene Umgebung von 0 in $\mathbb{R}^n$ sowie $f : U \to \mathbb{R}^m$ differenzierbar mit $f(0) = 0$. Dann gilt:*

(a) Ist $Df(0)$ injektiv (d.h. f eine Immersion in 0), so ist $n \leq m$ und es existiert ein Diffeomorphismus ψ zwischen offenen Umgebungen von 0 in $\mathbb{R}^m$ (d.h. eine Karte von $\mathbb{R}^m$ um 0) der 0 fixiert, so dass

$$(\psi \circ f)(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_n, 0, \dots, 0)$$

für alle $(x_1, \dots, x_n)$ in einer offenen Umgebung von 0 gilt.

(b) Ist $Df(0)$ surjektiv (d.h. f eine Submersion in 0), so ist $n \geq m$ und es existiert ein Diffeomorphismus φ zwischen offenen Umgebungen von 0 in $\mathbb{R}^n$ (d.h. eine Karte von $\mathbb{R}^n$ um 0) der 0 fixiert, so dass

$$(f \circ \varphi^{-1})(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_m)$$

für alle $(x_1, \dots, x_n)$ in einer offenen Umgebung von 0 gilt.

Auf Mannigfaltigkeiten gilt entsprechend:

Satz 1.28. *Es sei $f : M \to N$ eine differenzierbare Abbildung zwischen Mannigfaltigkeiten M und N, $n := \dim(M)$ und $m := \dim(N)$ sowie $p \in M$. Dann gilt:*

(a) Ist f eine Immersion in $p \in M$, so ist $n \leq m$ und es existieren Karten (U, φ) um p und (V, ψ) um $f(p)$, so dass $\varphi(p) = 0 \in \mathbb{R}^n$, $\psi(f(p)) = 0 \in \mathbb{R}^m$, $f(U) \subseteq V$ und

$$(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_n, 0, \dots, 0)$$

für alle $(x_1, \dots, x_n) \in \varphi(U)$ gilt.

(b) Ist f eine Submersion in $p \in M$, so ist $n \geq m$ und es existieren Karten (U, φ) um p und (V, ψ) um $f(p)$ so dass $\varphi(p) = 0 \in \mathbb{R}^n$, $\psi(f(p)) = 0 \in \mathbb{R}^m$, $f(U) \subseteq V$ und

$$(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_m)$$

für alle $(x_1, \dots, x_n) \in \varphi(U)$ gilt.

Beweis. Wähle in beiden Fällen Karten $(\widetilde{U}, \widetilde{\varphi})$ um p und $(\widetilde{V}, \widetilde{\psi})$ um $f(p)$, so dass $\widetilde{\varphi}(p) = 0$ und $\widetilde{\psi}(f(p)) = 0$ ist und so, dass $f(\widetilde{U}) \subseteq \widetilde{V}$ ist. Betrachte dann $\widetilde{\psi} \circ f \circ \widetilde{\varphi}^{-1} : \widetilde{U} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ und wende Satz 1.27 auf diese Funktion an.
Falls f eine Immersion in p ist, erhalten wir dann einen Diffeomorphismus $\widehat{\psi}$ zwischen offenen Umgebungen von 0 in $\mathbb{R}^m$ der 0 fixiert, so dass für alle $(x_1, \ldots, x_n)$ in einer offenen Umgebung von 0 in $\mathbb{R}^n$ gerade $(\widehat{\psi} \circ \widetilde{\psi} \circ f \circ \widetilde{\varphi}^{-1})(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_n, 0, \ldots, 0)$ gilt. Durch Setzen von $\psi := \widehat{\psi} \circ \widetilde{\psi}$ und $\varphi := \widetilde{\varphi}$ (und entsprechendes Einschränken) folgt die Behauptung.
Analog folgt die gewünschte Aussage, falls f eine Submersion in p ist. $\square$

Als nächstes wollen wir eine alternative Charakterisierung von Einbettungen geben. Dazu bemerken wir, dass für eine Untermannigfaltigkeit N einer Mannigfaltigkeit M der Tangentialraum T_pN von N in $p \in N$ auf natürliche Weise ein Unterraum des Tangentialraumes T_pM von M in p ist, da ja jede differenzierbare Kurve in N durch p auch eine differenzierbare Kurve in M durch p ist und dass zwei differenzierbare Kurven $\gamma_1 : (-\epsilon_1, \epsilon_1) \to N$ und $\gamma_2 : (-\epsilon_2, \epsilon_2) \to N$ mit $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = p$, die in p als differenzierbare Kurven nach N äquivalent sind, auch in p als differenzierbare Kurven nach M äquivalent sind. (Genauer identifizieren wir T_pN mit seinem Bild $d\iota_p(T_pN)$ in T_pM unter der differenzierbaren Inklusionsabbildung $\iota : N \to M$, $\iota(p) := p$ für $p \in M$).
Nun können wir Einbettungen wie folgt charakterisieren:

Proposition 1.29. *Es sei $f : M \to N$ eine differenzierbare Abbildung zwischen Mannigfaltigkeiten M und N. Dann ist f eine Einbettung und damit $f(M)$ eine Untermannigfaltigkeit von N genau dann, wenn f eine injektive Immersion ist, die einen Homöomorphismus aufs Bild $f(M)$, ausgestattet mit der Teilraumtopologie, induziert.*

Beweis. „$\Rightarrow$ “: Es sei $f : M \to N$ eine Einbettung. Dann ist $f(M)$ eine Untermannigfaltigkeit von N und $f : M \to f(M)$ ein Diffeomorphismus. Also ist f injektiv und für jedes $p \in M$ ist $df_p : T_pM \to T_{f(p)}f(M)$ invertierbar, wenn wir f als Abbildung nach $f(M)$ betrachten und somit $df_p : T_pM \to T_{f(p)}N$ injektiv, wenn wir f als Abbildung nach N betrachten. Daher ist f eine Immersion. Da $f : M \to f(M)$ ein Diffeomorphismus ist, ist f insbesondere ein Homöomorphismus.
„$\Leftarrow$ “: Sei nun f eine injektive Immersion, die einen Homöomorphismus aufs Bild $f(M)$ induziert. Wir zeigen zunächst, dass $f(M)$ eine Untermannigfaltigkeit ist. Sei dazu $q \in f(M)$ gegeben. Da f eine Immersion ist, existieren nach Satz 1.28 Karten (U, φ) von M um $p := f^{-1}(q)$ und (V, ψ) von N um q mit $\varphi(p) = 0 \in \mathbb{R}^n$, $\psi(q) = 0 \in \mathbb{R}^m$, $f(U) \subseteq V$ und $(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_n, 0, \ldots, 0)$ für alle $(x_1, \ldots, x_n) \in \varphi(U)$, $n := \dim(M) \leq \dim(N) =: m$.
Da $f : M \to f(M)$ ein Homöomorphismus ist, ist $f(U)$ offen in $f(M)$ und daher existiert eine offene Menge $\widetilde{V}$ in N mit $\widetilde{V} \cap f(M) = f(U)$. Wir setzen $W := \psi(V) \cap \pi_n^{-1}(\varphi(U)) \subseteq \mathbb{R}^m$ sowie $\widehat{V} := \psi^{-1}(W) \cap \widetilde{V} = V \cap \psi^{-1}(\pi_n^{-1}(\varphi(U))) \cap \widetilde{V}$, wobei $\pi_n : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ die Projektion auf die ersten n Komponententen ist. Dann ist $\widehat{V}$ offen.
Weiter ist $\widehat{V} \cap f(M) = f(U)$: Denn einerseits ist $\widehat{V} \cap f(M) \subseteq \widetilde{V} \cap f(M) = f(U)$. Anderseits ist $f(U) = \psi^{-1}((\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(\varphi(U))) = \psi^{-1}(\iota_n(\varphi(U))) \subseteq \psi^{-1}(\pi_n^{-1}(\varphi(U)))$

und somit $f(U) \subseteq \widehat{V} \cap f(M)$, wobei $\iota_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ die Inklusion von $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^m$, d.h. $\iota_n(x_1,\dots,x_n) := (x_1,\dots,x_n,0,\dots,0)$ für $(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n$.
Wir behaupten nun, dass $(\widehat{V},\widehat{\psi})$ mit $\widehat{\psi} := \psi|_{\widehat{V}}$ eine Untermannigfaltigkeitskarte von $f(M)$ um q ist: Einerseits ist

$$\begin{aligned}
\hat{\psi}(\hat{V}) \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\}^{m-n}) &= \psi(\hat{V}) \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\}^{m-n}) \subseteq W \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\}^{m-n}) \\
&\subseteq \pi_n^{-1}(\varphi(U)) \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\}^{m-n}) = \iota_n(\varphi(U)) \\
&= (\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(\varphi(U)) = \psi(f(U)) = \psi(\hat{V} \cap f(M)) \\
&= \hat{\psi}(\hat{V} \cap f(M))
\end{aligned}$$

und andererseits $\hat{\psi}(\hat{V} \cap f(M)) \subseteq \hat{\psi}(\hat{V})$ und nach obiger Rechnung $\hat{\psi}(\hat{V} \cap f(M)) = \pi_n^{-1}(\varphi(U)) \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\}^{m-n}) \subseteq \mathbb{R}^n \times \{0\}^{m-n}$, also $\hat{\psi}(\hat{V} \cap f(M)) \subseteq \hat{\psi}(\hat{V}) \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\}^{m-n})$. Daher ist $\hat{\psi}(\hat{V} \cap f(M)) = \hat{\psi}(\hat{V}) \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\}^{m-n})$, also $(\widehat{V},\widehat{\psi})$ Untermannigfaltigkeitskarte und somit ist $f(M)$ eine Untermannigfaltigkeit.
Fassen wir f nun als Abbildung nach $f(M)$ auf, so ist auch $f : M \to f(M)$ differenzierbar und $df_p : T_pM \to T_{f(p)}f(M)$ injektiv für jedes $p \in M$. Da $\dim(M) = n = \dim(f(M))$ ist, ist df_p sogar invertierbar für jedes $p \in$M und nach dem Umkehrsatz daher auch $f^{-1} : f(M) \to M$ differenzierbar, also $f : M \to f(M)$ ein Diffeomorphismus. □

Bemerkung 1.30. Es gibt injektive Immersionen zwischen Mannigfaltigkeiten, die keinen Homöomorphismus aufs Bild liefern. Beispielsweise ist für jede irrationale Zahl α die Abbildung $f : \mathbb{R} \to T^2$, $f(t) = (e^{2\pi it}, e^{2\pi i\alpha t})$ eine injektive Immersion, die keinen Homöomorphismus aufs Bild liefert, da das Bild von f dicht in T^2 liegt (Übung!).
Allgemein kann man zeigen, dass für jede injektive Immersion $f : M \to N$ das Bild $f(M)$ auf eine eindeutige Weise zu einer Mannigfaltigkeit gemacht werden kann, so dass f ein Diffeomorphismus aufs Bild $f(M)$ ist. Allerdings ist $f(M)$ dann im Allgemeinen keine Untermannigfaltigkeit von N mehr, sondern die Topologie auf $f(M)$ ist im Allgemeinen feiner als die Teilraumtopologie von $f(M)$. Man nennt dann $f(M)$ auch *immersierte Untermannigfaltigkeit (von N)*.
Warnung: Manche Autoren nennen immersierte Untermannigfaltigkeiten in unserem Sinne einfach nur Untermannigfaltigkeiten und „unsere“ Untermannigfaltigkeiten dann eingebettete Untermannigfaltigkeiten.

Beispiel 1.31. Die Abbildung $f : \mathbb{R}P^2 \to \mathbb{R}^4$, $f([x:y:z]) = \frac{(x^2-y^2,xy,xz,yz)}{x^2+y^2+z^2}$ ist eine Einbettung von $\mathbb{R}P^2$ nach $\mathbb{R}^4$ (Übung!). Zum Nachweis, dass f ein Homöomorphismus ist, benutze man die Aussage am Ende von Abschnitt 1.1, dass jede stetige bijektive Abbildung eines kompakten topologischen Raumes in einen Hausdorff-Raum ein Homöomorphismus ist.

Nun wollen wir den Satz vom regulärem Wert beweisen, den Sie eventuell auch schon aus der Analysis-Vorlesung für Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^N$ kennen:

Satz 1.32 (Satz vom regulären Wert)**.** *Es sei $f : M \to N$ eine differenzierbare Abbildung zwischen Mannigfaltigkeiten M und N und $q \in f(M)$ ein regulärer Wert. Dann ist $f^{-1}(q)$*

eine Untermannigfaltigkeit der Dimension $\dim(M) - \dim(N)$ *und der Tangentialraum von* $f^{-1}(q)$ *an der Stelle* $p \in f^{-1}(q)$ *ist durch* $T_p f^{-1}(q) = \ker df_p$ *gegeben.*

Beweis. Sei $p \in f^{-1}(q)$ gegeben. Dann existieren nach Satz 1.28 Karten (U,φ) von M um p und (V,ψ) von N um q mit $\varphi(p) = 0 \in \mathbb{R}^n$, $\psi(q) = 0 \in \mathbb{R}^m$, $f(U) \subseteq V$, so dass $(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(x_1,\dots,x_n) = (x_1,\dots,x_m)$ für alle $(x_1,\dots,x_n) \in \varphi(U)$ gilt, wobei $n := \dim(M)$ und $m := \dim(N)$ ist. Dann ist (U,φ) eine Untermannigfaltigkeitskarte der Dimension $n-m$ von $f^{-1}(q)$ um p, denn es ist

$$\begin{aligned}\varphi(U) \cap (\{0\}^m \times \mathbb{R}^{n-m}) &= (\psi \circ f \circ \varphi^{-1})^{-1}(0) = (\psi \circ f|_U \circ \varphi^{-1})^{-1}(0)\\ &= \varphi(f|_U^{-1}(\psi^{-1}(0))) = \varphi(U \cap f^{-1}(\psi^{-1}(0))) = \varphi(U \cap f^{-1}(q)).\end{aligned}$$

Also ist $f^{-1}(q)$ eine $(n-m)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit.
Sei nun $v \in T_p f^{-1}(q)$ gegeben. Dann existiert eine differenzierbare Kurve $\gamma : (-\epsilon,\epsilon) \to f^{-1}(q)$ mit $\gamma(0) = p$ und $v = \gamma'(0)$ und es folgt $(f \circ \gamma)(t) = f(\gamma(t)) = q$ für alle $t \in (-\epsilon,\epsilon)$ und somit $0 = (f \circ \gamma)'(0) = df_{\gamma(0)}(\gamma'(0)) = df_p(v)$. Also ist $v \in \ker(df_p)$, d.h. $T_p f^{-1}(q) \subseteq \ker(df_p)$. Aus Dimensionsgründen folgt dann $T_p f^{-1}(q) = \ker(df_p)$. $\square$

Beispiel 1.33.

- Wir betrachten die Sphäre $S^n \subseteq \mathbb{R}^n$. Dann ist $S^n = f^{-1}(1)$ für die differenzierbare Abbildung $f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x_1^2 + \ldots + x_{n+1}^2$. Wir haben $df_x = Df(x) = (2x_1,\dots,2x_{n+1}) = 2x \neq 0$ für alle $x = (x_1,\dots,x_{n+1}) \in S^n$, und somit, dass $df_x : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ surjektiv ist für alle $x \in S^n$. 1 ist also ein regulärer Wert von f und S^n ist eine $(n+1)-1 = n$-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^{n+1}$ und $T_x S^n = \ker(df_x) = x^\perp$.

- $\mathrm{O}(n) = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} | A^T A = I_n\}$ ist Untermannigfaltigkeit der Dimension $\frac{n(n-1)}{2}$ von $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ und damit Lie-Gruppe (siehe Beispiel 1.11):

  Betrachte dazu die differenzierbare Abbildung $f : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathrm{Sym}(n,\mathbb{R})$, $f(A) = A^T A$, wobei $\mathrm{Sym}(n,\mathbb{R})$ den Vektorraum der symmetrischen $n\times n$-Matrizen bezeichnet. Dann ist $\mathrm{O}(n) = f^{-1}(I_n)$. Sei nun $A \in \mathrm{O}(n)$ gegeben. Zur Berechnung von df_A sei $B \in \mathbb{R}^{n\times n} = T_A\mathbb{R}^{n\times n}$ gegeben. Dann ist $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n\times n}$, $\gamma(t) := A + tB$ eine Kurve in $\mathbb{R}^{n\times n}$ mit $\gamma(0) = A$ und $\dot\gamma(0) = B$. Daher ist $(f \circ \gamma)(t) = (A+tB)^T(A+tB)$ und nach Bemerkung 1.23 gilt somit $df_A(B) = (f \circ \gamma)'(0) = B^T A + A^T B$.

  Um zu zeigen, dass $df_A : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathrm{Sym}(n,\mathbb{R})$ surjektiv ist, sei $C \in \mathrm{Sym}(n,\mathbb{R}) = T_{f(A)}\mathrm{Sym}(n,\mathbb{R})$ gegeben. Dann ist $df_A\left(\frac{AC}{2}\right) = \left(\frac{AC}{2}\right)^T A + A^T \frac{AC}{2} = \frac{C^T}{2} A^T A + A^T A \frac{C}{2} = \frac{C}{2} + \frac{C}{2} = C$, wobei wir benutzt haben, dass $A \in \mathrm{O}(n)$ und $C \in \mathrm{Sym}(n,\mathbb{R})$ ist. Daher ist df_A surjektiv, I_n ein regulärer Wert und somit $\mathrm{O}(n)$ eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^{n\times n}$, und damit auch von der offenen Teilmenge $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ von $\mathbb{R}^{n\times n}$, der Dimension $\dim(\mathbb{R}^{n\times n}) - \dim(\mathrm{Sym}(n,\mathbb{R})) = n^2 - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$. Weiter ist $T_A\mathrm{O}(n) = \ker df_A = \left\{B \in \mathbb{R}^{n\times n} | B^T A + A^T B = 0\right\} = \left\{B \in \mathbb{R}^{n\times n} | (A^T B)^T = -A^T B\right\}$. Insbesondere ist also $\mathfrak{o}(n) := \mathfrak{so}(n) := T_{I_n}\mathrm{O}(n) = \left\{B \in \mathbb{R}^{n\times n} | B^T = -B\right\}$ die Menge aller schiefsymmetrischen Matrizen.

1.7 Das Tangentialbündel

In diesem Abschnitt wollen wir zeigen, dass die Vereinigung $\bigcup_{p\in M} T_pM$ auf natürliche Weise eine differenzierbare Mannigfaltigkeit wird, das sogenannte *Tangentialbündel* TM. Genauer wird TM, bzw. die natürliche Projektion $\pi : TM \to M$ ein sogenanntes *Vektorbündel* sein:

Definition 1.34. Es sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Ein *Vektorbündel (vom Rang k über M)* ist ein Paar (E, π) bestehend aus einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit E und einer surjektiven differenzierbaren Abbildung $\pi : E \to M$, so dass für jedes $p \in M$ gilt:

(i) Die *Faser* $E_p := \pi^{-1}(p)$ *über* p ist ein k-dimensionaler Vektorraum und

(ii) es existiert eine offene Umgebung U von p und ein Diffeomorphismus $\Phi : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^k$, so dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\pi^{-1}(U) \arrow[rr, "\Phi"] \arrow[dr, "\pi"'] & & U \times \mathbb{R}^k \arrow[dl, "\mathrm{pr}_1"] \\
& U &
\end{tikzcd}$$

kommutiert und $\Phi|_{E_q} : E_q \to \{q\} \times \mathbb{R}^k \cong \mathbb{R}^k$ für jedes $q \in U$ ein linearer Isomorphismus ist.

E heißt dann *Totalraum*, M *Basis* des Vektorbündels und Φ *lokale Trivialisierung*.
Wir notieren oft das Vektorbündel nur mit E oder π.

Beispiel 1.35.

- Es ist $M \times \mathbb{R}^k$ zusammen mit der Projektion auf die erste Komponente ein Vektorbündel vom Rang k, das *triviale Vektorbündel vom Rang k über M*.

- Ein Vektorbündel (E, π) vom Rang k über M heißt *trivialisierbar*, falls es eine *globale Trivialisierung* besitzt, d.h. eine lokale Trivialisierung $\Phi : E = \pi^{-1}(M) \to M \times \mathbb{R}^k$.

- Das Möbiusband $M = [0, 1] \times \mathbb{R}/\sim$, wobei $\sim$ die Punkte $(0, t)$ mit $(1, -t)$ identifiziert, ist ein nicht trivialisierbares Vektorbündel über S^1 (Übung!).

Definition 1.36. Es sei (E, π) ein Vektorbündel über M. Ein *(differenzierbarer) Schnitt (von* (E, π) ist eine differenzierbare Abbildung $s : M \to E$ mit $\pi \circ s = \mathrm{id}_M$, d.h. mit $s(p) \in E_p$ für alle $p \in M$. Mit $\Gamma(E)$ bezeichnen wir die Menge aller Schnitte von E. Man bemerke, dass $\Gamma(E)$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum, sogar ein $C^\infty(M)$-Modul mittels $(f \cdot s)(p) := f(p) \cdot s(p)$, $p \in M$, für $f \in C^\infty(M)$, $s \in \Gamma(E)$ ist.
Ein *lokaler (differenzierbarer) Schnitt von E* ist eine differenzierbare Abbildung $s : U \to E$ auf einer offenen Teilmenge U von M mit $\pi \circ s = \mathrm{id}_U$.

Wir wollen nun zeigen, dass das *Tangentialbündel* $TM := \bigcup_{p\in M} T_pM$ (disjunkte Vereinigung!) einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit M auf natürliche Weise ein Vektorbündel vom Rang n über M ist. $\pi : TM \to M$ ist dabei über $\pi(v) = p$ für $v \in T_pM$ definiert. Sei $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)|\alpha \in A\}$ ein abzählbarer Atlas von M, der existiert, da M das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt (Übung!).
Wir bemerken, dass dann $\pi^{-1}(U_\alpha) = \bigcup_{p\in U_\alpha} T_pM$ gilt und definieren nun eine bijektive Abbildung $\Psi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to \varphi_\alpha(U_\alpha) \times \mathbb{R}^n$ über $\Psi_\alpha(v) = (\varphi_\alpha(\pi(v)), d(\varphi_\alpha)_{\pi(v)}(v))$.
Wir werden weiter unten zeigen, dass $\{(\pi^{-1}(U_\alpha), \Psi_\alpha)|\alpha \in A\}$ ein differenzierbarer Atlas auf TM ist. Da die Umkehrabbildung durch $\Psi_\alpha^{-1}(x, u) = d(\varphi_\alpha^{-1})_x(u)$ gegeben ist, ist der Kartenwechsel gerade durch

$$(\Psi_\beta \circ \Psi_\alpha^{-1})(x, u) = ((\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1})(x), D(\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1})(x)(u))$$

für $(x, u) \in \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{R}^n$ gegeben und damit differenzierbar. Wir bemerken, dass dies für jede von einer Karte (U, φ) von M wie oben induzierte Abbildung $\Psi : \pi^{-1}(U) \to \varphi(U) \times \mathbb{R}^n$ gilt. Daher wird dann auch $(\pi^{-1}(U), \Psi)$ eine Karte (in der differenzierbaren Struktur) von TM sein und die induzierte differenzierbare Struktur auf TM hängt nicht von der Wahl des abzählbaren Atlas auf M abhängen.
Bevor wir die weiteren Eigenschaften überprüfen, müssen wir zunächst eine Topologie auf TM definieren. Es soll dabei $U \subseteq TM$ offen sein genau dann, wenn $\Psi_\alpha(\pi^{-1}(U_\alpha)\cap U)$ offen in $\varphi_\alpha(U_\alpha) \times \mathbb{R}^n \subseteq \mathbb{R}^{2n}$ für alle $\alpha \in A$ ist. Dann sind offensichtlich $\emptyset$ und M offen. Weiter ist für eine Familie offener Mengen $(V_i)_{i\in I}$ in TM die Vereinigungsmenge $\bigcup_{i\in I} V_i$ offen in TM, denn

$$\Psi_\alpha\left(\pi^{-1}(U_\alpha) \cap \bigcup_{i\in I} V_i\right) = \Psi_\alpha\left(\bigcup_{i\in I}(\pi^{-1}(U_\alpha) \cap V_i)\right) = \bigcup_{i\in I}(\Psi_\alpha(\pi^{-1}(U_\alpha) \cap V_i))$$

ist für jedes $\alpha \in A$ als Vereinigung offener Mengen in $\mathbb{R}^{2n}$ auch offen in $\mathbb{R}^{2n}$. Seien nun V und W offen in TM. Dann ist $\Psi_\alpha\left(\pi^{-1}(U_\alpha) \cap V \cap W\right) = \Psi_\alpha(\pi^{-1}(U_\alpha) \cap V) \cap \Psi_\alpha(\pi^{-1}(U_\alpha) \cap W)$ für jedes $\alpha \in A$ als Schnitt offener Mengen in $\mathbb{R}^{2n}$ selbst offen in $\mathbb{R}^{2n}$ und somit $V \cap W$ offen in TM. Also haben wir wirklich eine Topologie auf TM definiert.
Wir zeigen nun, dass $\Psi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to \varphi_\alpha(U_\alpha) \times \mathbb{R}^n$ Homöomorphismen sind. Dazu bemerken wir zunächst, dass für jedes $\alpha \in A$ die Menge $\pi^{-1}(U_\alpha)$ wegen der Offenheit von $\Psi_\beta(\pi^{-1}(U_\beta) \cap \pi^{-1}(U_\alpha)) = \varphi_\beta(U_\beta \cap U_\alpha) \times \mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^{2n}$ für alle $\beta \in A$ offen in TM ist.
Sei nun eine offene Menge $V \subseteq \varphi_\alpha(U_\alpha) \times \mathbb{R}^n$ gegeben. Dann ist

$$\Psi_\beta(\pi^{-1}(U_\beta) \cap \Psi_\alpha^{-1}(V)) = (\Psi_\beta \circ \Psi_\alpha^{-1})(\Psi_\alpha(\pi^{-1}(U_\alpha) \cap \pi^{-1}(U_\beta)) \cap V)$$

für jedes $\beta \in A$ offen, da $\Psi_\beta \circ \Psi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{R}^n \to \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{R}^n$ für jedes $\beta \in A$ ein Diffeomorphismus ist. Also ist Ψ_α stetig. Wir bemerken, dass dann auch π stetig ist, da $\pi|_{\pi^{-1}(U_\alpha)} = \varphi_\alpha^{-1} \circ \mathrm{pr}_1 \circ \Psi_\alpha$ als Verknüpfung stetiger Abbildungen für jedes $\alpha \in A$ stetig ist. Nun ist Ψ_α auch offen, da für offenes $W \subseteq \pi^{-1}(U_\alpha)$ nach Definition der Topologie $\Psi_\alpha(W) = \Psi_\alpha(\pi^{-1}(U_\alpha) \cap W)$ offen in $\mathbb{R}^{2n}$ ist. Daher ist Ψ_α ein Homöomorphismus.
Als nächstes bemerken wir, dass TM das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt: Denn um eine abzählbarer Basis der Topologie von TM zu bekommen, nehme man sich für jedes

$\alpha \in A$ eine abzählbare Basis der Topologie von $\Psi_\alpha(U_\alpha) \subseteq \mathbb{R}^{2n}$, ziehe diese mittels Ψ_α für jedes $\alpha \in A$ auf TM hoch und vereinige diese. Da A abzählbar war, ergibt dies eine abzählbare Basis der Topologie von TM.
Weiter ist TM ein Hausdorff-Raum: Seien dazu $v, w \in TM$ gegeben. Ist $\pi(v) \neq \pi(w)$, so existieren offene disjunkte Umgebungen U von $\pi(v)$ und V von $\pi(w)$ in M, da M ein Hausdorff-Raum ist. Daher sind $\pi^{-1}(U)$ und $\pi^{-1}(V)$ offene disjunkte Umgebungen von v und w in TM. Ist $\pi(v) = \pi(w)$, so wähle ein $\alpha \in A$ mit $v, w \in U_\alpha$. Dann können wir $\Psi_\alpha(v)$ und $\Psi_\alpha(w)$ in $\Psi_\alpha(U_\alpha)$ durch offene disjunkte Umgebungen trennen und durch Urbildbildung mittels Ψ_α können wir daher auch v und w in $U_\alpha \subseteq TM$ durch offene disjunkte Umgebungen trennen.
Insgesamt haben wir jetzt also gezeigt, dass TM eine $2n$-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit mit differenzierbarem Atlas $\{(\pi^{-1}(U_\alpha), \Psi_\alpha) | \alpha \in A\}$ ist und dass $\pi : TM \to M$ stetig ist. Dann ist aber π auch differenzierbar, da für alle $\alpha \in A$ gerade $\varphi_\alpha \circ \pi \circ \Psi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha) \times \mathbb{R}^n \to \varphi_\alpha(U_\alpha)$ die Projektion auf die erste Komponente ist. Weiter ist für jedes $p \in M$ die Faser $\pi^{-1}(p)$ gerade durch den n-dimensionalen Vektorraum T_pM gegeben. Daneben ist $\Phi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times \mathbb{R}^n$, $\Phi_\alpha := (\varphi_\alpha^{-1} \times \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}) \circ \Psi_\alpha$ ein Diffeomorphismus, der $\mathrm{pr}_1 \circ \Phi_\alpha = \pi$ und $\Phi_\alpha|_{\pi^{-1}(p)}(v) = \Phi_\alpha|_{T_pM}(v) = (p, d(\varphi_\alpha)_p(v))$ für alle $p \in M$ und alle $v \in \pi^{-1}(p) = T_pM$ erfüllt. Daher ist $\Phi_\alpha|_{\pi^{-1}(p)} : T_pM \to \mathbb{R}^n$ ein linearer Isomorphismus und Φ_α eine lokale Trivialisierung. Damit haben wir nun gezeigt:

Satz 1.37. *Es sei M eine n-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit. Das* Tangentialbündel *$TM := \bigcup_{p \in M}$ wird mit der oben angegebenen Topologie und differenzierbaren Struktur eine $2n$-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit, so dass (TM, π), $\pi : TM \to M$ die natürliche Projektion, ein Vektorbündel vom Rang n über M wird.*

Beispiel 1.38. Das Tangentialbündel TG jeder Lie-Gruppe G, insbesondere also auch TS^1, ist trivialisierbar (Übung!).

Weiter können wir nun durch „Zusammenfassen“ aller Differentiale $df_p : T_pM \to T_qN$ einer differenzierbaren Abbildung $f : M \to N$ in allen Punkten $p \in M$ das *Differential* df von f als eine Abbildung $df : TM \to TN$ definieren, die selbst differenzierbar sein wird:

Proposition 1.39. *Es seien M und N Mannigfaltigkeiten und $f : M \to N$ eine differenzierbare Abbildung. Das* Differential *df* von *f, definiert als die Abbildung $df : TM \to TN$, $df(v) := df_{\pi(v)}(v)$ für $v \in TM$, ist eine differenzierbare Abbildung,*

Bemerkung 1.40. Es sei (U, φ) eine Karte von M. Die zugehörige Karte $(\pi^{-1}(U), \Psi)$ von TM hatten wir oben als $\Psi(v) = (\varphi(\pi(v)), d\varphi_{\pi(v)}(v))$ definiert. Nun ist $\pi^{-1}(U) = TU$ und $T\varphi(U)$ kanonisch trivialisierbar über $T\varphi(U) \ni w = [\gamma]_{\pi(w)} \mapsto (\pi(w), \gamma'(0)) \in \varphi(U) \times \mathbb{R}^n$ und unter dieser Trivialisierung gilt dann $\Psi(v) = d\varphi(v)$ für $v \in TU$ (man benutze, dass wir vorher schon die Abbildung $d\varphi_{\pi(v)}$ als Abbildung nach $\mathbb{R}^n$ betrachtet haben).

Beweis von Proposition 1.39. Sei $v \in TM$ gegeben. Sei (V, ψ) eine Karte von N um $\pi_N(df(v))$ und sei (U, φ) eine Karte von M um $\pi_M(v)$ mit $f(U) \subseteq V$. Da df Fasern von

π_M auf Fasern von π_M abbildet, gilt dann $df(\pi_M^{-1}(U)) \subseteq \pi_N^{-1}(V)$. Weiter ist $(\pi_M^{-1}(U), d\varphi)$ eine Karte von TM um v und $(\pi_N^{-1}(V), d\psi)$ eine Karte von TN um $df(v)$ und es gilt

$$\begin{aligned}(d\psi \circ df \circ d\varphi^{-1})(x,u) &= (d\psi \circ df)(d(\varphi^{-1})_x(u)) = d\psi((df_{\varphi^{-1}(x)} \circ d(\varphi^{-1})_x)(u)) \\ &= d\psi(d(f \circ \varphi^{-1})_x(u)) = ((\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(x), d(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})_x(u))\end{aligned}$$

für $(x,u) \in \varphi(U) \times \mathbb{R}^n$. Da diese Abbildung stetig und $d\psi$ und $d\varphi$ als Karten Homöomorphismen sind, ist $df|_{\pi^{-1}(U)}$, und somit df insgesamt stetig. Dann zeigt die Differenzierbarkeit von $d\psi \circ df \circ d\varphi^{-1}$, dass df sogar differenzierbar ist. $\square$

1.8 Vektorfelder und Integralkurven von Vektorfeldern

Wir beginnen mit der grundlegenden Definition eines Vektorfeldes:

Definition 1.41. Es sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Ein *(differenzierbares) Vektorfeld (auf M)* ist ein differenzierbarer Schnitt $X : M \to TM$ des Tangentialbündels TM von M. Ein *lokales (differenzierbares) Vektorfeld* ist entsprechend ein lokaler differenzierbarer Schnitt von TM. Für den Wert eines (lokalen) Vektorfeldes an einem Punkt $p \in M$ schreiben wir im Folgenden oft X_p statt $X(p)$.

Beispiel 1.42. Für $M = \mathbb{R}^n$ können wir wie in Bemerkung 1.40 das Tangentialbündel $T\mathbb{R}^n$ kanonisch mit $\mathbb{R}^{2n}$ mittels $T\mathbb{R}^n \ni v = [\gamma]_{\pi(v)} \mapsto (\pi(v), \gamma'(0)) \in \mathbb{R}^{2n}$ identifizieren. Ein differenzierbares Vektorfeld auf $\mathbb{R}^n$ hat dann die Gestalt $X : \mathbb{R}^n \to T\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{2n}$, $X(x) = (x, \tilde{X}(x))$ mit einer differenzierbaren Abbildung $\tilde{X} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Wir identifizieren im Folgenden X mit $\tilde{X}$, d.h. ein Vektorfeld auf $\mathbb{R}^n$ ist für uns eine differenzierbare Abbildung $X : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Entsprechendes gilt für lokale Vektorfelder auf $\mathbb{R}^n$.

Es sei $X \in \Gamma(TM)$ ein Vektorfeld auf M und $q \in M$ Dann ist $X_q \in T_qM$ eine Derivation in q, kann also auf Funktionskeime in q angewendet werden. Ist nun $f \in C^\infty(M)$ gegeben, so definiert f einen Funktionskeim $[f]_q$ in q und es ist $X_q(f) := X_q([f]_q) \in \mathbb{R}$. Daher ist $X(f) : M \to \mathbb{R}$, $X(f)(p) := X_p(f)$ eine Abbildung von M nach $\mathbb{R}$. Wir zeigen gleich, dass $X(f)$ differenzierbar ist. Dazu benötigen wir eine lokale Beschreibung von X:

Beispiel 1.43. Es sei (U, φ) eine Karte einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit M, $\varphi = (x_1, \dots, x_n)$. Wir definieren für jedes $i = 1, \dots, n$ ein lokales differenzierbares Vektorfeld auf U durch

$$\tfrac{\partial}{\partial x_i}(p) := \tfrac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p = d(\varphi^{-1})_{\varphi(p)}(e_i) = d\varphi^{-1}(\varphi(p), e_i)$$

für $p \in U$. Wir nennen $\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}$ *lokale Koordinatenfelder.*

Wir können nun verschiedene Eigenschaften von $X(f)$ zeigen:
Zunächst ist $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}(p), \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}(p)\right)$ für jedes $p \in U$ eine Basis von T_pU. Daher können wir $X|_U$ schreiben als

$$X|_U = \sum_{i=1}^n X_i \cdot \tfrac{\partial}{\partial x_i}$$

mit Funktionen $X_1, \dots, X_n : U \to \mathbb{R}$. Da

$$(d\varphi \circ X)(p) = (\varphi(p), d\varphi_p(X(p))) = \left(\varphi(p), d\varphi_p\left(\sum_{i=1}^n X_i(p) \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p\right)\right)$$
$$= (\varphi(p), (X_1(p), \dots, X_n(p)))$$

für $p \in U$ gilt, ist $X_i : U \to \mathbb{R}$ differenzierbar für alle $i = 1, \dots, n$. Daher ist

$$X(f)(p) = X_p(f) = \left(\sum_{i=1}^n X_i(p) \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p\right)(f) = \sum_{i=1}^n X_i(p) \, \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial x_i}(\varphi(p))$$

für jedes $p \in U$ und somit $X(f)$ differenzierbar. Offensichtlich ist $X(f \cdot g)(p) = X_p(f \cdot g) = X_p(f) \cdot g(p) + f(p) \cdot X_p(g) = X(f)(p) \cdot g(p) + f(p) \cdot X(g)(p)$ für jedes $p \in M$, also $X(f \cdot g) = X(f) \cdot g + f \cdot X(g)$.
Weiter ist eine Abbildung $X : M \to TM$ mit $X(p) \in T_pM$ für alle $p \in M$ per Definition differenzierbar genau dann, wenn es um jeden Punkt $p \in M$ eine Karte (U, φ) von M, $\varphi = (x_1, \dots, x_n)$, gibt, so dass

$$(d\varphi \circ X \circ \varphi^{-1})(x) = (x, X_1(\varphi^{-1}(x)), \dots, X_n(\varphi^{-1}(x))$$

differenzierbar ist, wobei die Funktionen $X_1, \dots, X_n : U \to \mathbb{R}$ wie oben über

$$X|_U = \sum_{i=1}^n X_i \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}$$

definiert sind.
Wir haben also gezeigt:

Lemma 1.44. *Es sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit.*

(a) Es sei $X \in \Gamma(TM)$ ein differenzierbares Vektorfeld. Dann ist für jede differenzierbare Funktion $f \in C^\infty(M)$ auch $X(f)$ differenzierbar und die zugehörige Abbildung $X : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ ist eine Derivation von M, *d.h. $X : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ ist $\mathbb{R}$-linear und erfüllt die* Leibnizregel

$$X(f \cdot g) = X(f) \cdot g + f \cdot X(g)$$

für $f, g \in C^\infty(M)$.

(b) Eine Abbildung $X : M \to TM$ mit $X(p) \in T_pM$ für alle $p \in M$ ist ein differenzierbares Vektorfeld genau dann, wenn es um jeden Punkt $p \in M$ eine Karte (U, φ) von M gibt, so dass die durch

$$X|_U = \sum_{i=1}^n X_i \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}$$

definierten Funktionen $X_1 : U \to \mathbb{R}, \dots, X_n : U \to \mathbb{R}$ alle differenzierbar sind.

Wir können die Summe zweier differenzierbarer Vektorfelder X, $Y \in \Gamma(TM)$ punktweise durch $(X+Y)(p) := X(p)+Y(p)$ definieren (man bemerke, dass $X(p)$ und $Y(p)$ Elemente des $\mathbb{R}$-Vektorraumes T_pM sind) und ebenso $(\lambda X)(p) := \lambda \cdot X(p)$ für $\lambda \in \mathbb{R}$. Aus Lemma 1.44 (b) folgt direkt, dass $X+Y$ und λX wieder differenzierbare Vektorfelder sind.
Wir können sogar ein differenzierbares Vektorfeld X mit einer differenzierbaren Funktion $f \in C^\infty(M)$ punktweise multiplizieren und erhalten dadurch ein differenzierbares Vektorfeld fX, $(fX)(p) := f(p) \cdot X(p)$ für $p \in M$. $\Gamma(TM)$ wird also sogar zu einem $C^\infty(M)$-Modul. Eine weitere algebraische Struktur auf $\Gamma(TM)$ ist die einer *(reellen) Lie-Algebra*:

Definition 1.45. Eine *(reelle) Lie-Algebra* $\mathfrak{g}$ ist ein Paar $\mathfrak{g} = (V, [\cdot,\cdot])$ bestehend aus einem reellen Vektorraum V und einer bilinearen, schiefsymmetrischen Abbildung $[\cdot,\cdot] : V \times V \to V$, genannt die *Lie-Klammer* von $\mathfrak{g}$, so dass $[\cdot,\cdot]$ die *Jacobi-Identität*

$$[X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] = 0$$

für alle $X, Y, Z \in V$ erfüllt.

Wir wollen nun die Lie-Klammer auf $\Gamma(TM)$ definieren. Dazu brauchen wir noch, dass die „Operatoren“ $\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} : C^\infty(U) \to C^\infty(U)$ für eine Karte (U,φ) vertauschen:

Bemerkung 1.46. Es sei (U,φ) eine Karte einer Mannigfaltigkeit M, $\varphi = (x_1,\dots,x_n)$. Für $i,j \in \{1,\dots,n\}$ ist dann

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(\frac{\partial}{\partial x_j}(f)\Big) - \frac{\partial}{\partial x_j}\Big(\frac{\partial}{\partial x_i}(f)\Big) &= \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial(f\circ\varphi^{-1})}{\partial x_j}\circ\varphi\right) - \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial(f\circ\varphi^{-1})}{\partial x_i}\circ\varphi\right) \\ &= \frac{\partial^2(f\circ\varphi^{-1})}{\partial x_i\partial x_j}\circ\varphi - \frac{\partial^2(f\circ\varphi^{-1})}{\partial x_j\partial x_i}\circ\varphi = 0\end{aligned}$$

für jedes $f \in C^\infty(U)$ nach dem Satz von Schwarz.

Damit lässt sich die Lie-Klammer auf $\Gamma(TM)$ nun wie folgt definieren:

Definition 1.47. Es seien X und Y differenzierbare Vektorfelder auf einer differenzierbaren n-dimensionalen Mannigfaltigkeit M. Wir definieren nun ein differenzierbares Vektorfeld $[X,Y]$ auf M dadurch, dass wir für gegebenes $p \in M$ eine Karte (U,φ), $\varphi = (x_1,\dots,x_n)$ um p wählen und dann

$$\begin{aligned}[X,Y](p) &:= \sum_{i,j=1}^n \left(X_i(p)\cdot \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p (Y_j) - Y_i(p)\cdot\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p (X_j)\right)\frac{\partial}{\partial x_j}\Big|_p \\ &= \sum_{j=1}^n X_p(Y_j)\,\frac{\partial}{\partial x_j}\Big|_p - \sum_{j=1}^n Y_p(X_j)\,\frac{\partial}{\partial x_j}\Big|_p\end{aligned}$$

setzen, wobei $X|_U = \sum_{i=1}^n X_i \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}$ und $Y|_U = \sum_{i=1}^n Y_i \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}$ ist. Wir nennen dann $[X,Y]$ auch den *Kommutator von X und Y*.
Wir zeigen nun, dass $[X,Y]_p = [X,Y](p) \in \mathrm{Der}_p(M) = T_pM$ unabhängig von der gewählten Karte (U,φ) ist und daher $[X,Y]$ nach Lemma 1.44 tatsächlich ein differenzierbares

Vektorfeld auf M ist. Sei dazu ein Funktionskeim $[f]_p$ in p gegeben. Durch eventuelles Verkleinern von U können wir annehmen, dass f auf U definiert ist. Dann ist

$$\begin{aligned}
[X,Y]_p([f]_p) &= \sum_{i,j=1}^{n} \Big(X_i(p)\cdot \tfrac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p (Y_j)\cdot \tfrac{\partial}{\partial x_j}\Big|_p([f]_p) - Y_i(p)\cdot \tfrac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p (X_j)\cdot \tfrac{\partial}{\partial x_j}\Big|_p([f]_p)\Big) \\
&\overset{\star}{=} \sum_{i=1}^{n}\Big(X_i(p)\cdot \tfrac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p (\sum_{j=1}^{n} Y_j\cdot \tfrac{\partial}{\partial x_j}(f)) - Y_i(p)\cdot \tfrac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p (\sum_{j=1}^{n} X_j\cdot \tfrac{\partial}{\partial x_j}(f))\Big) \\
&\quad - \sum_{i,j=1}^{n}\Big(X_i(p)\cdot Y_j(p)\cdot \tfrac{\partial}{\partial x_i}(\tfrac{\partial}{\partial x_j}(f))(p) - Y_i(p)X_j(p)\cdot \tfrac{\partial}{\partial x_i}(\tfrac{\partial}{\partial x_j}(f))(p)\Big) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\Big(X_i(p)\cdot \tfrac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p (Y|_U(f)) - Y_i(p)\cdot \tfrac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p (X|_U(f))\Big) \\
&\quad - \sum_{i,j=1}^{n}\Big(X_i(p)\cdot Y_j(p)\cdot \tfrac{\partial}{\partial x_i}(\tfrac{\partial}{\partial x_j}(f))(p) - Y_j(p)X_i(p)\cdot \tfrac{\partial}{\partial x_j}(\tfrac{\partial}{\partial x_i}(f))(p)\Big) \\
&= X_p(Y|_U(f)) - Y_p(X|_U(f)),
\end{aligned}$$

wobei wir in $\star$ die Leibnizregel und im letzten Schritt Bemerkung 1.46 benutzt haben. Dies zeigt, dass $[X,Y]_p \in \mathrm{Der}_p(M) = T_pM$ unabhängig von der gewählten Karte (U,φ) ist (da für eine andere Karte $(\tilde{U},\tilde{\varphi})$ um p dann $X|_{\tilde{U}\cap U}(f)$ bzw. $X|_{\tilde{U}\cap U}(f)$ den gleichen Funktionskeim in p wie $X|_U(f)$ bzw. $Y|_U(f)$ definiert).

Bemerkung 1.48. Für die lokalen Koordinatenfelder $\frac{\partial}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial}{\partial x_n}$ einer Karte (U,φ), $\varphi = (x_1,\dots,x_n)$ einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit M gilt $\left[\frac{\partial}{\partial x_i},\frac{\partial}{\partial x_j}\right] = 0$ für alle $i,j \in \{1,\dots,n\}$.

Es gilt nun:

Proposition 1.49. *Es sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Dann macht die in Definition 1.47 eingeführte Abbildung $[\cdot,\cdot] : \Gamma(TM)\times\Gamma(TM) \to \Gamma(TM)$ den $\mathbb{R}$-Vektorraum $\Gamma(TM)$ zu einer Lie-Algebra. Weiter gelten für differenzierbare Vektorfelder $X,Y \in \Gamma(TM)$ und differenzierbare Funktionen $f,g \in C^\infty(M)$ folgende Rechenregeln:*

$$[X,Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f)), \qquad [fX,gY] = fg[X,Y] + fX(g)Y - gY(f)X.$$

Beweis. Offensichtlich ist $[\cdot,\cdot] : \Gamma(TM)\times\Gamma(TM)\to\Gamma(TM)$ $\mathbb{R}$-bilinear und antisymmetrisch. Die Jacobi-Identität kann man direkt nachrechen ebenso wie die zweite Rechenregel (Übung!). Die erste Rechenregel hatten wir schon in Definition 1.47 bewiesen. □

Bemerkung. Die Rechenregel $[X,Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f))$ für $X,Y \in \Gamma(TM)$, $f \in C^\infty(M)$ rechtfertigt den Namen „Kommutator“ von X und Y für das Vektorfeld $[X,Y]$.

Offensichtlich ist $\Gamma(TM)$ unendlich-dimensional (außer für nulldimensionale Mannigfalgkeiten). Ist $M = G$ eine Lie-Gruppe, so hat $\Gamma(TG)$ aber eine interessante endlichdimensionale *Lie-Unteralgebra*, d.h. einen Untervektorraum von $\Gamma(TG)$, der bezüglich der Lie-Klammer von $\Gamma(TG)$ abgeschlossen ist und somit selbst eine Lie-Algebra wird:

Beispiel 1.50. Es sei G eine n-dimensionale Lie-Gruppe. Wir bezeichnen im Folgenden dann immer mit $l_g \in C^\infty(G)$ die *Linkstranslation mit* $g \in G$, d.h. $l_g(h) := g \cdot h$ für alle $h \in G$. Dann nennen wir ein Vektorfeld *links-invariant*, falls $dl_g \circ X = X \circ l_g$ für alle $g \in G$ ist (d.h. X ist mit allen Linkstranslationen l_g, $g \in G$, *verträglich* im Sinne der Übungen).
In den Übungen zeigen wir, dass die Menge $\Gamma_L(TG)$ aller links-invarianten Vektorfelder eine n-dimensionale Lie-Unteralgebra von $\Gamma(TG)$ ist, welche kanonisch isomorph als Vektorraum zum Tangentialraum am Einselelement T_eG mittels $\Gamma_L(TG) \ni X \to X(e) \in T_eG$ ist. Wir nennen $\Gamma_L(TG)$ oder auch T_eG mit der durch den Vektorraumisomorphismus induzierten Lie-Klammer die *Lie-Algebra von* G und notieren diese mit $\mathfrak{g}$ oder auch $\mathrm{Lie}(G)$.

Nun kommen wir zu *Integralkurven* von Vektorfeldern:

Definition 1.51. Es sei X ein differenzierbares Vektorfeld auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit M. Eine differenzierbare Kurve $\gamma : (a,b) \to M$ heißt *Integralkurve (von X)*, falls $\dot\gamma(t) = X(\gamma(t))$ für alle $t \in (a,b)$ gilt.

Wir betrachten die definierende Gleichung für eine Integralkurve in einer Karte (U,φ), d.h. wir nehmen an, dass $\gamma((a,b)) \subseteq U$ ist. Dann können wir nach Bemerkung 1.23 $\dot\gamma$ schreiben als $\dot\gamma(t) = \sum_{i=1}^n \dot\gamma_i(t) \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_{\gamma(t)}$ mit $\gamma_i : (a,b) \to \mathbb{R}$, $\gamma_i := x_i \circ \gamma$, $i = 1,\ldots,n$. Weiter ist

$$\begin{aligned} X(\gamma(t)) &= \sum_{i=1}^n X_i(\gamma(t)) \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_{\gamma(t)} = \sum_{i=1}^n (X_i \circ \varphi^{-1})(\varphi(\gamma(t))) \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_{\gamma(t)} \\ &= \sum_{i=1}^n \tilde X_i(\gamma_1(t),\ldots,\gamma_n(t)) \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_{\gamma(t)} \end{aligned}$$

mit nach Lemma 1.44 differenzierbaren Funktionen $X_i : \varphi(U) \to \mathbb{R}$, $i = 1,\ldots,n$, womit dann auch $\tilde X_i := X_i \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \mathbb{R}$ für jedes $i = 1,\ldots,n$ differenzierbar ist.
Damit ist γ eine Integralkurve von X genau dann, wenn $(\gamma_1,\ldots,\gamma_n)$ das folgende System von gewöhnlichen Differentialgleichungen erfüllt:

$$\begin{aligned} \dot\gamma_1(t) &= \tilde X_1(\gamma_1(t),\ldots,\gamma_n(t)), \\ \vdots \;&= \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad , \\ \dot\gamma_n(t) &= \tilde X_n(\gamma_1(t),\ldots,\gamma_n(t)). \end{aligned}$$

Wir brauchen nun einige grundsätzliche Resultate aus der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen die eventuell auch schon im Rahmen der Analysis-Grundvorlesung besprochen wurden. Meist werden in einer solchen Vorlesung als auch in Büchern die von uns benötigten Aussagen jedoch nur für C^1-Funktionen bewiesen, so dass wir für einen Beweis der folgenden Aussagen auf [Lee2, Theorem 17.9] verweisen (und durch Benutzen des Wortes glatt klar machen, dass wir hier C^∞-Funktionen meinen):

Satz 1.52. *Es sei $V \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $F : V \to \mathbb{R}^n$ eine glatte Abbildung. Für $t_0 \in \mathbb{R}$ und $x_0 \in V$ betrachten wir das Anfangswertproblem*

$$c'(t) = F(c(t)), \qquad c(t_0) = x_0.$$

Dann gilt:

(a) (Satz von Picard-Lindelöf)*:*

Das obige Anfangswertproblem hat eine glatte Lösung $c : J \to U$, J offenes Intervall um t_0, die in folgendem Sinne eindeutig ist:

Sind $c_i : J_i \to U$, J_i offenes Intervall um t_0, $i = 1, 2$ zwei Lösungen des obigen Anfangswertproblems, so ist $c_1|_{J_1 \cap J_2} = c_2|_{J_1 \cap J_2}$.

(b) (glatte Abhängigkeit von den Anfangsdaten)*:*

Es existiert ein offenes Intervall J_0 um t_0 und eine offene Umgebung $U_0 \subseteq U$ von x_0, so dass es für jedes $y \in U_0$ eine Lösung c_y des Anfangswertproblems $c_y'(t) = F(c_y(t))$, $c_y(0) = y$ auf ganz J_0 gibt und so dass die Abbildung $J_0 \times U_0 \ni (t, y) \mapsto c_y(t) \in U$ glatt ist.

Für uns ergibt sich aus Satz 1.52 (a) nun

Satz 1.53. *Es sei $X \in \Gamma(TM)$ ein differenzierbares Vektorfeld auf einer Mannigfaltigkeit M. Dann gibt es zu jedem Punkt $p \in M$ eine eindeutige Integralkurve $\gamma : I \to M$, I offenes Intervall um 0, von X mit $\gamma(0) = p$, so dass für jede andere Integralkurve $\tilde{\gamma} : J \to M$, J offenes Intervall um 0, von X mit $\tilde{\gamma}(0) = p$ gerade $J \subseteq I$ und $\gamma|_J = \tilde{\gamma}$ gilt.*

Beweis. Es sei $\{\gamma_\alpha : I_\alpha \to M | \alpha \in A\}$ die Menge aller Integralkurven von X mit $\gamma_\alpha(0) = p$, I_α offenes Intervall um 0. Diese ist nach Satz 1.52 (a) und den Vorüberlegungen davor nicht leer.
Da I_α ein offenes Intervall um 0 ist für jedes $\alpha \in A$, ist auch $I := \bigcup I_\alpha$ ein offenes Intervall um 0 und wir definieren $\gamma(t) := \gamma_\alpha(t)$ für $t \in I$, wenn $t \in I_\alpha$ ist. Wenn dies wohldefiniert, also unabhängig von $\alpha \in A$ ist, folgt offensichtlich die Behauptung.
Sei $t \in I_\alpha \cap I_\beta$ für $\alpha, \beta \in A$ mit $\alpha \neq \beta$. Dann ist $J := \{t \in I_\alpha \cap I_\beta | \gamma_\alpha(t) = \gamma_\beta(t)\}$ nichtleer wegen $0 \in J$ und abgeschlossen in $I_\alpha \cap I_\beta$, da Integralkurven insbesondere stetig sind. Außerdem ist J auch offen in $I_\alpha \cap I_\beta$: Denn für $t_0 \in J$, so können wir durch Wahl einer Karte um $\gamma_\alpha(t_0) = \gamma_\beta(t_0)$ die Integralkurvenbedingung wie oben lokal zu einem System gewöhnlicher Differentialgleichungen auf einer offenen Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ machen und damit folgt aus der Eindeutigkeitsaussage in Satz 1.52 (a) gerade, dass $\gamma_\alpha = \gamma_\beta$ auch noch in einer offenen Umgebung von $t_0 \in I_\alpha \cap I_\beta$ gilt.
Daher ist J als nicht-leere, offene und abgeschlossene Teilmenge der zusammenhängenden Menge $I_\alpha \cap I_\beta$ gleich dieser Menge, d.h. $J = I_\alpha \cap I_\beta$ und insbesondere ist $t \in J$, d.h. $\gamma_\alpha(t) = \gamma_\beta(t)$ wie gewünscht. □

Satz 1.52 (b) und die Vorüberlegungen vor Satz 1.52 ergeben nun, dass X um jeden Punkt einen *lokalen Fluss* besitzt:

Satz 1.54. *Es sei X ein Vektorfeld auf einer Mannigfaltigkeit M und $p \in M$. Dann besitzt X um p einen* lokalen Fluss, *d.h. es existiert eine offene Umgebung U von p in M, ein offenes Intervall I um 0 und eine differenzierbare Abbildung $\Phi : U \times I \to M$, so dass gilt:*

(i) $\Phi(q, 0) = q$ *für alle* $q \in U$ *und*

(ii) $I \ni t \mapsto \Phi(q, t)$ *ist eine Integralkurve von M für jedes $q \in U$, d.h. es gilt* $\frac{d}{dt}\Phi(q, t) = X(\Phi(q, t))$ *für alle $t \in I$ und $q \in U$.*

Bemerkung 1.55. Es sei $\Phi : U \times I \to M$ ein lokaler Fluss eines Vektorfeldes X auf einer Mannigfaltigkeit M.

- $\Phi : U \times I \to M$ ist eindeutig bestimmt wegen Satz 1.53, da $I \ni t \mapsto \Phi(p, t)$ für $p \in U$ gerade eine Integralkurve von X ist, die bei $t = 0$ durch p geht.
- Es gilt die *Flussgleichung*
$$\Phi_{t+s} = \Phi_t \circ \Phi_s$$
für alle $t, s \in I$ mit $t + s \in I$, wobei wir für $t \in I$ gerade $\Phi_t : U \to M$, $\Phi_t(p) := \Phi(p, t)$ gesetzt haben. Denn sowohl $\{t \in I | t + s \in I\} =: J \ni t \mapsto \Phi_{t+s}(p)$ also auch $J \ni t \mapsto (\Phi_t \circ \Phi_s)(p) = \Phi_t(\Phi_s(p))$ sind Integralkurven von X die für $t = 0$ den Wert $\Phi_s(p)$ haben: Im zweiten Fall ist das per Definition von Φ_t klar und im ersten Fall ist klar, dass $\gamma(t) := \Phi_{t+s}(p)$ gerade $\gamma(0) = \Phi_s(p)$ erfüllt. Da allerdings auch $\dot\gamma(t) = d\gamma_t(1) = [u \mapsto \gamma(t + u)]_{\gamma(t)} = [u \mapsto \Phi(p, t + s + u)]_{\Phi(p,t+s)} = \frac{d}{du}|_{u=t+s}\Phi(p, u) = X(\Phi(p, t + s)) = X(\gamma(t))$ für alle $t \in J$ gilt, ist γ auch eine Integralkurve von X.

Besonders interessant ist für uns der Fall, wenn der lokale Fluss auf ganz $M \times \mathbb{R}$ definiert werden kann:

Definition 1.56. Ein Vektorfeld X auf einer Mannigfaltigkeit M heißt *vollständig*, wenn X einen lokalen Fluss $\Phi : M \times \mathbb{R} \to M$ besitzt. Wir nennen dann Φ auch einen *globalen Fluss*.

Beispiel 1.57. (i) Es sei $v \in \mathbb{R}^n$ ein fixer Vektor. Dann ist das Vektorfeld $X(x) := v$, $x \in \mathbb{R}^n$, auf $\mathbb{R}^n$ vollständig, denn $\Phi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, $\Phi(x, t) := x + tv$ ist ein globaler Fluss von X.

(ii) Die Abbildung $f : (0, 2\pi) \to S^1$, $f(\phi) := (\cos(\phi), \sin(\phi))$ ist die Umkehrabbildung einer Karte von S^1 und das davon induzierte lokale Koordinatenvektorfeld $\partial_\phi := \frac{\partial}{\partial\phi}$, $(\partial_\phi)_{f(\phi)} = df_\phi(e_1)$ für $\phi \in (0, 2\pi)$ ist mit der Identifikation von T_qS^1 mit dem Tangentialraum als Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^2$ gerade durch $Df(\phi)(e_1) = (-\sin(\phi), \cos(\phi))^T$ gegeben. Daher setzt sich ∂_ϕ zu einem Vektorfeld auf ganz S^1 fort. Dieses ist vollständig, da der globale Fluss durch $\Phi : S^1 \times \mathbb{R}$, $\Phi(\cos(\phi), \sin(\phi), t) := (\cos(\phi + t), \sin(\phi + t))$ für $\phi \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}$ definiert ist.

(iii) Das Vektorfeld $Y(x) := x^2$, $x \in \mathbb{R}$, auf $\mathbb{R}$ ist nicht vollständig. Denn die maximale Integralkurve γ mit $\gamma(0) = 1$ ist durch $\gamma(t) := \frac{1}{1-t}$ gegeben und somit nur auf $I = (-\infty, 1)$ definiert.

Auch ohne explizite Rechnung ist klar, dass das Vektorfeld ∂_ϕ auf S^1 aus Beispiel 1.57 (ii) vollständig ist:

Satz 1.58. *Es sei X ein Vektorfeld auf einer kompakten Mannigfaltigkeit M. Dann ist X vollständig.*

Beweis. Nach Satz 1.54 existiert zu jedem Punkt $p \in M$ eine offene Umgebung U_p von p in M und ein $\epsilon_p > 0$, so dass ein lokaler Fluss $\Phi : U_p \times (-\epsilon_p, \epsilon_p) \to M$ existiert. Da $(U_p)_{p \in M}$ eine offene Überdeckung von M ist und M kompakt ist, existieren $p_1, \ldots, p_k \in M$ mit $U_{p_1} \cup \ldots \cup U_{p_k} = M$. Setzen wir $\epsilon := \min\{\epsilon_{p_1}, \ldots, \epsilon_{p_k}\} > 0$, so existiert also aufgrund der in Bemerkung 1.55 erwähnten Eindeutigkeit ein lokaler Fluss $\Phi : M \times (-\epsilon, \epsilon) \to M$. Diesen können wir nun wie folgt auf $M \times (-2\epsilon, 2\epsilon)$ erweitern:
Für $t \in (-2\epsilon, -\epsilon] \cup [\epsilon, 2\epsilon)$ können wir $t_1, t_2 \in (-\epsilon, \epsilon)$ wählen, so dass $t = t_1 + t_2$ ist. Dann setzen wir $\Phi(p, t) := \Phi_{t_1}(\Phi_{t_2}(p)) = \Phi(\Phi(p, t_1), t_2)$. Analog zum Beweis der Flussgleichung sieht man ein, dass diese Definition nicht von der Wahl von $t_1, t_2 \in (-\epsilon, \epsilon)$ abhängt und dann, dass $\Phi(p, t_1 + t_2) = \Phi_{t_1}(\Phi_{t_2}(p)) = \Phi(\Phi(p, t_2), t_1)$ für alle $t_1, t_2 \in (-2\epsilon, 2\epsilon)$ mit $t_1 + t_2 \in (-2\epsilon, 2\epsilon)$ und alle $p \in M$ gilt. Dies zeigt dann auch die Differenzierbarkeit von $\Phi : M \times (-2\epsilon, 2\epsilon) \to M$, denn für fixes $t_2 \in (-\epsilon, \epsilon)$ ist $\Phi(p, t) = \Phi(\Phi(p, t_2), t - t_2)$ differenzierbar auf $M \times (-\epsilon + t_2, \epsilon + t_2)$.
Mittels vollständiger Induktion können wir dann so den Fluss Φ auf $M \times (-2^n\epsilon, 2^n\epsilon)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ und somit auf $M \times \mathbb{R}$ erweitern. X ist also vollständig. $\square$

Für ein vollständiges Vektorfeld X sind also die Abbildungen Φ_t Diffeomorphismen von M (mit Umkehrfunktion Φ_{-t}). Weiter ist die Abbildung $\mathbb{R} \ni t \mapsto \Phi_t \in \mathrm{Diff}(M)$ eine 1-*Parametergruppe von Diffeomorphismen*:

Definition 1.59. Es sei M eine Mannigfaltigkeit. Eine 1-*Parametergruppe von Diffeomorphismen (von M)* ist ein Gruppenhomomorphismus $\mathbb{R} \ni t \mapsto \Phi_t \in \mathrm{Diff}(M)$, d.h. es gilt $\Phi_{t+s} = \Phi_t \circ \Phi_s$ für alle $t, s \in \mathbb{R}$, so dass die Abbildung $\Phi : M \times \mathbb{R} \to M$, $\Phi(p, t) := \Phi_t(p)$ differenzierbar ist. Oft nennen wir dann auch Φ eine 1-*Parametergruppe von Diffeomorphismen.*

Jedes vollständige Vektorfeld auf M liefert also eine 1-Parametergruppe von Diffeomorphismen von M.
Wir wollen nun zeigen, dass diese Zuordnung bijektiv ist. Sei also eine 1-Parametergruppe von Diffeomorphismen Φ von M gegeben. Um die Zuordnung umzukehren, müssen wir das gesuchte vollständige Vektorfeld X auf M in $p \in M$ durch $X(p) := \frac{d}{dt}|_{t=0} \Phi(p, t)$ definieren, da ja $X(p) = X(\Phi(p, 0)) = \frac{d}{dt}|_{t=0} \Phi(p, t)$ gelten soll.
Für den Nachweis der Differenzierbarkeit von X sei eine Karte (U, φ), $\varphi = (x_1, \ldots, x_n)$ von M gegeben. Dann ist nach Lemma 1.44 (b) $X|_U$ genau dann differenzierbar, wenn die Funktionen $X_1, \ldots, X_n : U \to \mathbb{R}$, die $X|_U = \sum_{i=1}^n X_i \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}$ erfüllen, alle differenzierbar sind. Nach dem Beweis von Proposition 1.18 ist für jedes $i = 1, \ldots, n$ gerade $X_i = X|_U(x_i)$ ($X|_U$ wirkt als Derivation auf $x_i \in C^\infty(U)$) und somit, wegen $X_{\varphi^{-1}(x)} = X_{\Phi(\varphi^{-1}(x), 0)} = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \Phi(\varphi^{-1}(x), t) = \partial_{t \mapsto \Phi(\varphi^{-1}(x), t)}$ für $x \in \varphi(U)$, gerade

$$X_i(\varphi^{-1}(x)) = X_{\varphi^{-1}(x)}([x_i]_{\varphi^{-1}(x)}) = \tfrac{d}{dt}|_{t=0}(t \mapsto x_i(\Phi(\varphi^{-1}(x), t))) = \tfrac{\partial}{\partial t} f_i(x, 0)$$

für alle $x \in \varphi(U)$ mit der differenzierbaren Funktion $f_i := x_i \circ \Phi \circ (\varphi^{-1} \times \mathrm{id}_{\mathbb{R}}) : \varphi(U) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Daher ist X_i für jedes $i = 1, \ldots, n$ differenzierbar und damit X differenzierbar.
Nun gilt $\Phi_0 = \mathrm{id}_M$ und somit $\Phi(p, 0) = \Phi_0(p) = p$ für alle $p \in M$. Weiter ist

$$\begin{aligned} \tfrac{d}{du}|_{u=t}(u \mapsto \Phi(p,u)) = \tfrac{d}{du}|_{u=0}(\Phi(p,t+u)) &= \tfrac{d}{du}|_{u=0}(\Phi_{t+u}(p)) = \tfrac{d}{du}|_{u=0}(\Phi_u(\Phi_t(p))) \\ &= \tfrac{d}{du}|_{u=0}(\Phi(\Phi(p,t),u)) = X(\Phi(p,t)) \end{aligned}$$

für alle $(p,t) \in M \times \mathbb{R}$, d.h. $\mathbb{R} \ni u \mapsto \Phi(p,u) \in M$ ist Integralkurve von X. Also ist Φ der Fluss von X und X ist vollständig. Wir haben also folgende Proposition gezeigt:

Proposition 1.60. *Es sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Dann liefert die Abbildung, die einem vollständigen Vektorfeld X auf M seinen globalen Fluss $\Phi : M \times \mathbb{R} \to M$ zuordnet, eine Bijektion zwischen der Menge aller vollständigen Vektorfelder auf M und der Menge aller 1-Parametergruppen von Diffeomorphismen von M.*

Kapitel 2

Grundbegriffe der (pseudo-)riemannschen Geometrie

2.1 Pseudo-riemannsche Mannigfaltigkeiten

Eine *pseudo-riemannsche Mannigfaltigkeit* wird eine Mannigfaltigkeit sein, die in jedem Tangentialraum T_pM mit einem *pseudo-euklidischen Skalarprodukt* ausgestattet ist, dass „differenzierbar“ vom Punkt $p \in M$ abhängt. Dazu benötigen wir also zunächst die Definition eines *pseudo-euklidischen Skalarproduktes*:

Definition 2.1. Es sei V ein n-dimensionaler reeller Vektorraum. Ein *pseudo-euklidisches Skalarprodukt* auf V ist eine nicht-ausgeartete symmetrische Bilinearform $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ auf V. Wir nennen dann $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ einen *pseudo-euklidischen Vektorraum.*
Nach dem Trägheitssatz von Sylvester existiert eine eindeutige Zahl $p \in \{1, \dots, n\}$, so dass eine geordnete Basis $(e_1, \dots, e_n)$ von V mit $\langle e_i, e_j \rangle = 0$ für alle $i, j \in \{1, \dots, n\}$ mit $i \neq j$, $\langle e_i, e_i \rangle = 1$ für alle $i = 1, \dots, p$ und $\langle e_j, e_j \rangle = -1$ für alle $j = p+1, \dots, n$ existiert. Wir nennen dann $(p, n-p)$ die *Signatur* und $(e_1, \dots, e_n)$ eine *Orthonormalbasis (ONB) von* $\langle \cdot, \cdot \rangle$.
Ist die Signatur $(n, 0)$, d.h. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ positiv definit, so nennen wir $\langle \cdot, \cdot \rangle$ auch *(euklidisches) Skalarprodukt* und $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ einen *euklidischen Vektorraum.*
Ist die Signatur $(n-1, 1)$ oder $(1, n-1)$, so nennen wir $\langle \cdot, \cdot \rangle$ auch *Lorentz-Skalarprodukt* und $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ einen *Lorentz-Vektorraum.*

Nun kommen wir zur Definition einer *pseudo-riemannschen Mannigfaltigkeit*:

Definition 2.2. Es sei M eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit. Eine *pseudo-riemannsche Metrik* ist eine Familie $g = (g_p)_{p \in M}$ von pseudo-euklidischen Skalarprodukten g_p auf T_pM gleicher Signatur, die differenzierbar von $p \in M$ in dem Sinne abhängt, dass es für jeden Punkt $p \in M$ eine Karte (U, φ), $\varphi = (x_1, \dots, x_n)$ um $p \in M$ gibt, so dass

$$U \ni q \mapsto g_{ij}^{\varphi}(q) := g_{ij}(q) := g_q \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_q, \frac{\partial}{\partial x_j}\Big|_q \right) \in \mathbb{R}$$

für alle $i, j = 1, \ldots, n$ differenzierbar ist. Das Paar (M, g) nennen wir dann *pseudo-riemannsche Mannigfaltigkeit* und die Signatur von g_p für ein $p \in M$ dann die *Signatur von g* bzw. *von* (M, g).
Hat (M, g) Signatur $(n, 0)$, so nennen wir g eine *riemannsche Metrik* und (M, g) eine *riemannsche Mannigfaltigkeit.*
Hat (M, g) Signatur $(n-1, 1)$ oder $(1, n-1)$, so nennen wir g eine *Lorentz-Metrik* und (M, g) eine *Lorentz-Mannigfaltigkeit.*

Bemerkung.

- Auf zusammenhängenden Mannigfaltigkeit ist die Signatur von $g = (g_p)_{p \in M}$ automatisch konstant. Dort müssten wir die Konstanz also nicht noch extra wie oben fordern.
- Wir können pseudo-riemannsche Metriken auch als bestimmte differenzierbare Schnitte in das Vektorbündel S^2T^*M der sogenannten *symmetrischen* $(2, 0)$-*Tensoren auf M* definieren. Die Definition dieses Vektorbündels erfordert jedoch einen tieferen Einstieg in die Theorie der Vektorbündel und deswegen verzichten wir hier auf diesen Zugang.

$g_{ij}^{\varphi} = g\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right) : U \to \mathbb{R}$ ist nicht nur für die lokalen Vektorfelder $\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}$ bestimmter Karten (U, φ), $\varphi = (x_1, \ldots, x_n)$ differenzierbar, sondern auch für beliebige Vektorfelder auf M:

Lemma 2.3. *Ist (M, g) eine pseudo-riemannsche Mannigfaltigkeit, X, Y differenzierbare Vektorfelder auf M und (V, ψ) eine Karte von M, so ist $g(X, Y) : M \to \mathbb{R}$, $g(X, Y)(p) := g_p(X_p, Y_p)$, differenzierbar und auch $g_{ij}^{\psi} : V \to \mathbb{R}$ differenzierbar für alle $i, j = 1, \ldots, n$*

Beweis. Für den ersten Teil, sei $p \in M$ gegeben. Dann existiert nach Definition eine Karte (U, φ), $\varphi = (x_1, \ldots, x_n)$ um p, so dass g_{ij}^{φ} für alle $i, j = 1, \ldots, n$ differenzierbar ist. Weiter gibt es nach Lemma 1.44 (b) differenzierbare Funktionen $X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_n : U \to \mathbb{R}$, so dass

$$X|_U = \sum_{i=1}^{n} X_i \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}, \qquad Y|_U = \sum_{j=1}^{n} X_j \cdot \frac{\partial}{\partial x_j}$$

gilt. Daher ist

$$g(X, Y) = g\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}, \sum_{j=1}^{n} X_j \cdot \frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \sum_{i,j=1}^{n} X_i Y_j g_{ij}^{\varphi},$$

und somit $g(X, Y)$ differenzierbar auf U, also auf ganz M.
Der zweite Teil folgt dann aus dem ersten, da ja $g_{ij}^{\psi} = g\left(\frac{\partial}{\partial y_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right)$ mit den auf V differenzierbaren Vektorfeldern $\left(\frac{\partial}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial y_n}\right)$ gilt, $\psi = (y_1, \ldots, y_n)$. □

Beispiel 2.4. (a) Jeder pseudo-euklidische Vektorraum $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ist auf natürliche Weise eine pseudo-euklidische Mannigfaltigkeit durch $g_v := \langle \cdot, \cdot \rangle$ für alle $v \in V$.

Ein Spezialfall davon ist $\mathbb{R}^n$, ausgestattet mit dem *Standardpseudoskalarprodukt* $\langle\cdot,\cdot\rangle_{p,n-p}$ *der Signatur* $(p, n-p)$, $\langle v, w\rangle_{p,n-p} := \sum_{i=1}^{p} v_i w_i - \sum_{j=p+1}^{n} v_j w_j$ für $v = (v_1, \ldots, v_n)$, $w = (w_1, \ldots, w_n) \in \mathbb{R}^n$. Wir schreiben dann auch $\mathbb{R}^{p,n-p}$ für die zugehörige pseudo-riemannsche Mannigfaltigkeit und für $\mathbb{R}^{n,0}$ oft auch nur $\mathbb{R}^n$, falls dies zu keiner Verwirrung führt. Je nach Konvention wird $\mathbb{R}^{1,3}$ oder $\mathbb{R}^{3,1}$ auch *Minkowski-Raum* genannt und taucht in der Physik in Einsteins „spezieller Relativitätstheorie“ auf.

(b) Eine Untermannigfaltigkeit N einer riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g) wird auf natürliche Weise durch *Einschränkung von g auf N*, d.h. durch die riemannsche Metrik $g|_N$, $(g|_N)_p := g|_{T_pN \times T_pN} : T_pN \times T_pN \to \mathbb{R}$ für $p \in N$, zu einer riemannschen Mannigfaltigkeit. Diese nennen wir dann auch eine *riemannsche Untermannigfaltigkeit* von (M, g)

Auf diese Weise bekommen wir beispielsweise auf allen Sphären $S^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ durch Einschränkung des Standardskalarpoduktes eine riemannsche Metrik g_{st} auf S^n, die sogenannten *Standardmetrik* oder *runde Metrik*.

Man bemerke, dass man für *Flächen im* $\mathbb{R}^3$, d.h. zwei-dimensionale Untermannigfaltigkeiten S von $\mathbb{R}^3$, durch Einschränkung gerade die in der Vorlesung „Elementaren Differentialgeometrie“ betrachtete *erste Fundamentalform von S* als riemannsche Metrik auf S bekommt.

(c) Der Erhalt einer pseudo-riemannschen Metrik durch Einschränkung analog zu (b) klappt im Allgemeinen nicht mehr für Untermannigfaltigkeiten einer pseudoriemannschen Mannigfaltigkeit da entartete Unterräume auftreten können. Beispielsweise tritt für S^n als Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^{n+1}$ jede Hyperebene in $\mathbb{R}^{n+1}$ als Tangentialraum von S^n auf und somit bekommt man für $p \in \{1, \ldots, n-1\}$ nie durch Einschränkung der Metrik von $\mathbb{R}^{p,n-p}$ eine pseudo-riemannsche Metrik auf S^n.

(d) Es sei

$$H_n := \left\{ x = (x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \,\middle|\, x_1^2 - x_2^2 - \ldots - x_{n+1}^2 = \langle x, x\rangle_{1,n} = 1,\ x_1 > 0 \right\}.$$

Dann ist H_n eine n-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^{n+1}$ und wird durch die Einschränkung der negativen (!) Lorentzmetrik von $\mathbb{R}^{1,n}$ zu einer zusammenhängenden riemannschen Mannigfaltigkeit (Übung!), dem sogenannten *hyperbolischen Raum* (H_n, g_{H_n}).

(e) Die Einschränkung einer riemannschen Metrik auf eine Untermannigfaltigkeit lässt sich wie folgt verallgemeinern: Es sei (N, h) eine riemannsche Mannigfaltigkeit und $f : M \to N$ eine (differenzierbare) Immersion. Dann ist der *Pullback f^*h (von h mittels f)*, definiert durch

$$(f^*h)_p(v, w) = h_{f(p)}(df_p(v), df_p(w))$$

für $p \in M$, $v, w \in T_pM$, eine riemannsche Metrik auf M.

(f) Sind (M, g) und (N, h) pseudo-riemannsche Mannigfaltigkeiten der Signatur $(p, n-p)$ und $(q, m-q)$, so ist nach Blatt 1, Aufgabe 3 gerade $T_{(x,y)}M \times N = T_xM \oplus T_yN$ für alle $(x, y) \in M \times N$ und somit $(g + h)_{(x,y)}(v_1 + w_1, v_2 + w_2) := g_x(v_1, v_2) + h_y(w_1, w_2)$ für $v_1, v_2 \in T_xM$, $w_1, w_2 \in T_yN$ eine pseudo-riemannsche Metrik auf $M \times N$ der Signatur $(p + q, n + m - (p + q))$.

Bemerkung 2.5. Riemannsche und pseudo-riemannsche Mannigfaltigkeiten der Signatur $(p, n-p)$ mit $p \notin \{0, n\}$ verhalten sich in vielerlei Hinsicht sehr verschieden. Während die grundlegende Theorie in beiden Fällen meist noch gleich ist, gelten die Hauptresultate dieser Vorlesung nur für riemannsche Mannigfaltigkeiten. Einen unterschiedlichen Aspekt werden wir im zur Vorlesung dazugehörigen Seminar kennenlernen. Dort zeigen wir einen Teil der folgenden Resultate:

(a) Jede Mannigfaltigkeit M besitzt eine riemannsche Metrik.

(b) Im Gegensatz dazu gibt es n-dimensionale Mannigfaltigkeiten, die pseudo-riemann sche Metrik der Signatur $(p, n-p)$ für $p \notin \{1, \ldots, n-1\}$ nicht zulassen. Beispielsweise existiert eine Lorentz-Metrik auf einer kompakten Mannigfaltigkeit genau dann, wenn die sogenannten *Euler-Charakteristik* der Mannigfaltigkeit gleich 0 ist. Daher lässt von den kompakten zusammenhängenden Flächen im $\mathbb{R}^3$ nur der Torus T^2 eine Lorentz-Metrik zu. Es gibt also keine Lorentz-Metrik auf S^2 und allgemein besitzt S^n eine Lorentz-Metrik genau dann, wenn n ungerade und $n \geq 3$ ist.

2.2 Zusammenhänge

Ein technisches Problem beim Arbeiten mit Mannigfaltigkeiten M ist, dass es im Allgemeinen keinen Bezug zwischen den Tangentialräumen T_pM und T_qM an verschiedenen Punkten $p, q \in M$, $p \neq q$ gibt. Einen solchen werden wir im nächsten Abschnitt mittels des *Paralletransports* entlang von Kurven zwischen p und q herstellen. Dazu benötigen wir zunächst eine „infinitesimale“ Version des Paralleltransports:

Definition 2.6. Es sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Ein *Zusammenhang (auf M)*, auch *kovariante Ableitung (auf M)* genannt, ist eine $\mathbb{R}$-bilineare Abbildung

$$\nabla : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \to \Gamma(TM), \quad (X, Y) \mapsto \nabla_X Y,$$

so dass für alle $X, Y \in \Gamma(TM)$ und $f \in C^\infty(M)$ gerade

(i) $\nabla_{fX} Y = f\, \nabla_X Y$ und

(ii) $\nabla_X(fY) = X(f)\, Y + f\, \nabla_X Y$

gilt.

Beispiel 2.7. Wir definieren einen „natürlichen“ Zusammenhang auf $\mathbb{R}^n$. Dazu bemerken wir, dass für ein Vektorfeld $Y : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ auf $\mathbb{R}^n$ das Differential $dY_x = DY(x)$ in x für jedes $x \in \mathbb{R}^n$ eine lineare Abbildung von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}^n$ ist. Daher können wir durch

$$(D_X Y)(x) := dY_x(X_x) = DY(x)(X(x))$$

für $X, Y \in \Gamma(\mathbb{R}^n)$, $x \in \mathbb{R}^n$, einen Zusammenhang auf $\mathbb{R}^n$ definieren (Übung!). $(D_X Y)(x)$ ist also hier die Richtungsableitung von Y in Richtung von $X(x)$ an der Stelle $x \in \mathbb{R}^n$.

Tatsächlich hängt für einen Zusammenhang ∇ und Vektorfelder X und Y der Wert $(\nabla_X Y)(p)$ an der Stelle $p \in M$ nur von $X(p)$ und den Werten von Y in einer Umgebung von p ab. Zum Beweis dieser Aussage benötigen wir folgendes Lemma, welches im Rahmen des zur Vorlesung zugehörigen Seminars bewiesen wird. Für einen Beweis siehe auch [Lee2, Corollary 2.19].

Lemma 2.8. *Es sei M eine Mannigfaltigkeit und $p \in M$. Dann gibt es für jede Karte (U, φ) um p eine offene Umgebung V von p mit $\overline{V} \subseteq U$ und eine C^∞-Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ mit* $\mathrm{supp}(f) := \overline{\{x \in M | f(x) \neq 0\}} \subseteq U$ *und* $f|_V \equiv 1$.

Bemerkung 2.9. Mittels Lemma 2.8 können wir für jedes lokale differenzierbare Vektorfeld $\tilde{X}$ auf U, U wie im Lemma, ein differenzierbares Vektorfeld X auf M durch

$$X(q) := \begin{cases} \varphi(q) \cdot \tilde{X}(q) & \text{, falls } q \in U, \\ 0 & \text{, sonst,} \end{cases}$$

definieren, für dass $X|_V = \tilde{X}|_V$ gilt. Wir können also $\tilde{X}$ bzw. $\tilde{X}|_V$ auf ganz M „erweitern“.
Weiter finden wir zu jedem $v \in T_pM$ ein Vektorfeld X mit $X(p) = v$, indem wir zunächst auf U ein Vektorfeld $\tilde{X}$ mit $\tilde{X}(p) = v$ wählen (beispielsweise $\tilde{X} := \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ für $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}$ definiert durch $v = \sum_{i=1}^n v_i \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p$, $\varphi = (x_1, \dots, x_n)$) und dieses dann wie oben zu einem Vektorfeld X auf M erweitern.

Nun können wir zeigen:

Proposition 2.10. *Es sei ∇ ein Zusammenhang auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit M, $p \in M$ sowie U eine offene Umgebung von p. Dann gilt $(\nabla_X Y_1)(p) = (\nabla_X Y_2)(p)$ für alle differenzierbaren Vektorfelder X, Y_1, Y_2 auf M mit $Y_1|_U = Y_2|_U$. Weiter gilt $(\nabla_{X_1} Y)(p) = (\nabla_{X_2} Y)(p)$ für alle differenzierbaren Vektorfelder X_1, X_2, Y auf M mit $X_1(p) = X_2(p)$.*

Beweis. Wir können o.B.d.A. annehmen, dass U eine Kartenumgebung einer Karte $\varphi = (x_1, \dots, x_n)$ um p ist. Wähle dann eine differenzierbare Funktion φ wie in Lemma 2.8. Dann ist $\varphi \cdot Y_1 = \varphi \cdot Y_2$, $\varphi(p) = 1$ und $X(\varphi)(p) = X_p(\varphi) = 0$, da φ lokal konstant um p ist. Daher folgt

$$\begin{aligned} (\nabla_X Y_1)(p) &= X(\varphi)(p) \cdot Y_1(p) + \varphi(p) \cdot (\nabla_X Y_1)(p) = (\nabla_X(\varphi Y_1))(p) = (\nabla_X(\varphi Y_2))(p) \\ &= X(\varphi)(p) \cdot Y_2(p) + \varphi(p) \cdot (\nabla_X Y_2)(p) = (\nabla_X Y_2)(p). \end{aligned}$$

Nun kommen wir zum zweiten Teil und bemerken, dass wir auf U die Vektorfelder X_1 und X_2 schreiben können als

$$X_1|_U = \sum_{i=1}^{2} f_i \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad X_2|_U = \sum_{i=1}^{n} g_i \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

mit differenzierbaren Funktionen $f_1, \ldots, f_n, g_1, \ldots, g_n \in C^\infty$, wobei wir bemerken, dass wegen $X_1(p) = X_2(p)$ gerade $f_i(p) = g_i(p)$ für alle $i = 1 \ldots, n$ gilt. Nach Bemerkung 2.9 können wir $\frac{\partial}{\partial x_i}$ für jedes $i = 1, \ldots, n$ zu einem differenzierbarem Vektorfeld auf ganz M erweitern, dass auf einer offenen Umgebung V von p mit $\overline{V} \subseteq U$ mit $\frac{\partial}{\partial x_i}$ übereinstimmt. Wir nennen diese Vektorfelder dann wieder $\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}$.
Wählen wir nun eine C^∞-Funktion $\tilde{\varphi} \in C^M$ wie in Lemma 2.8 für V(!!!), so gilt

$$\tilde{\varphi} \cdot X_1 = \sum_{i=1}^n \tilde{f}_i \, \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad \tilde{\varphi} \cdot X_2 = \sum_{i=1}^n \tilde{g}_i \, \frac{\partial}{\partial x_i}$$

mit $\tilde{f}_i = \tilde{\varphi} \cdot f_i$, $\tilde{g}_i = \varphi \cdot g_i$ für $i = 1, \ldots, n$ (bzw. genauer eigentlich entsprechend abschnittsweise definiert wie bei der Erweiterung von lokalen Vektorfeldern auf ganz M). Es ist dann $\tilde{f}_i(p) = \tilde{g}_i(p)$ für alle $i = 1, \ldots n$ und somit

$$\begin{aligned}
(\nabla_{X_1} Y)(p) &= \tilde{\varphi}(p) \cdot (\nabla_{X_1} Y)(p) = (\nabla_{\tilde{\varphi} \cdot X_1} Y)(p) = (\nabla_{\sum_{i=1}^n \tilde{f}_i \frac{\partial}{\partial x_i}} Y)(p) \\
&= \sum_{i=1}^n \tilde{f}_i(p) \cdot (\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} Y)(p) = \sum_{i=1}^n \tilde{g}_i(p) \cdot (\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} Y)(p) = (\nabla_{\tilde{\varphi} \cdot X_2} Y)(p) \\
&= \tilde{\varphi}(p) \cdot (\nabla_{X_2} Y)(p) = (\nabla_{X_2} Y)(p),
\end{aligned}$$

wie behauptet. □

Bemerkung 2.11. Wegen Proposition 2.10 und Bemerkung 2.9 können wir nun für $v \in T_pM$ und $Y \in \Gamma(TM)$ auch $\nabla_v Y \in T_pM$ durch $\nabla_v Y := (\nabla_X Y)(p)$ für ein Vektorfeld $X \in \Gamma(TM)$ mit $X(p) = v$ definieren. Analog können wir wegen der gerade genannten Proposition und Bemerkung sowohl $\nabla_X Y$ als auch $\nabla_v Y$ für ein lokales differenzierbares Vektorfeld Y definieren.
Wählen wir nun eine Karte (U, φ) von M, $\varphi = (x_1, \ldots, x_n)$, so ist also $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} \in \Gamma(TU)$ für beliebige $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ wohldefiniert. Da $(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n})$ punktweise eine Basis von T_pM ist, können wir

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k \cdot \frac{\partial}{\partial x_k}$$

mit eindeutig bestimmten differenzierbaren Funktionen $\Gamma_{ij}^k := \Gamma_{ij}^\varphi : U \to \mathbb{R}$, $i, j, k = 1, \ldots, n$ schreiben. Die differenzierbaren Funktionen Γ_{ij}^k, $i, j, k = 1, \ldots, n$, nennt man auch die *Christoffelsymbole (von ∇ bezüglich φ)*. Diese bestimmen auf U das Vektorfeld $\nabla_X Y$ für $X, Y \in \Gamma(TM)$ eindeutig, denn wir können auf U ja gerade $X = \sum_{i=1}^n X_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ und $Y = \sum_{i=1}^n Y_j \frac{\partial}{\partial x_j}$ mit eindeutig bestimmten $X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_n \in C^\infty(U)$ schreiben und erhalten auf U daher

$$
\begin{aligned}
\nabla_X Y &= \nabla_{\sum_{i=1}^n X_i \frac{\partial}{\partial x_i}} \left(\sum_{j=1}^n Y_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right) = \sum_{i,j=1}^n X_i \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \left(Y_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \\
&= \sum_{i,j=1}^n \left(X_i Y_j \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} + X_i \frac{\partial Y_j}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) = \sum_{i,j,k=1}^n X_i Y_j \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x_k} + \sum_{j=1}^n X(Y_j) \frac{\partial}{\partial x_j} \\
&= \sum_{k=1}^n \left(X(Y_k) + \sum_{i,j=1}^n X_i Y_j \Gamma_{ij}^k \right) \frac{\partial}{\partial x_k}.
\end{aligned}
$$

Beispiel 2.12. Wählt man auf $\mathbb{R}^n$ die Standardkarte $(\mathbb{R}^n, \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n})$, so sind die Christoffelsymbole Γ_{ij}^k des Zusammenhangs D auf $\mathbb{R}^n$ aus Beispiel 2.7 alle 0, denn es ist ja $\frac{\partial}{\partial x_j}(x) = e_j$, $x \in \mathbb{R}^n$, konstant für alle $j = 1, \ldots, n$ und somit $(D_X \frac{\partial}{\partial x_j})(x) = D\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)(x)(X(x)) = 0$ für alle Vektorfelder $X \in \Gamma(\mathbb{R}^n)$, alle $x \in \mathbb{R}^n$ und alle $j = 1, \ldots, n$.
Man bemerke, dass dies nicht für alle Karten gilt. Ist beispielsweise $n = 2$ und die Karte $\varphi : \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0) | x \geq 0\} \to (0,\infty) \times (0, 2\pi)$, $\varphi(x_1, x_2) = (r(x_1,x_2), \phi(x_1,x_2))$ die *Polarkoordinaten* des Punktes (x_1, x_2), so ist wegen $\varphi^{-1}(r,\phi) := (r\cos(\phi), r\sin(\phi))^T$ gerade

$$
\begin{aligned}
\partial_r(r\cos(\phi), r\sin(\phi)) &:= \tfrac{\partial}{\partial r}(r\cos(\phi), r\sin(\phi)) = D(\varphi^{-1})(r,\phi) \cdot e_1 = (\cos(\phi), \sin(\phi))^T, \\
\partial_\phi(r\cos(\phi), r\sin(\phi)) &:= \tfrac{\partial}{\partial \phi}(r\cos(\phi), r\sin(\phi)) = D(\varphi^{-1})(r,\phi) \cdot e_2 \\
&= (-r\sin(\phi), r\cos(\phi))^T.
\end{aligned}
$$

Man beachte, dass hier das Differential bzw. die Jacobi-Matrix D bezüglich von φ^{-1} bezüglich (r, ϕ) gebildet wird.
Bei der nun folgenden Berechnung von $D_{\partial_r} \partial_\phi$ müssen wir das Differential bzw. die Jacobi-Matrix D von ∂_r bezüglich der Koordinaten (x_1, x_2) bilden. Allerdings gilt nun unter Benutzung der Kettenregel

$$
\begin{aligned}
(D_{\partial_r}\partial_\phi)(r\cos(\phi), r\sin\phi) &= D(\partial_\phi)(r\cos(\phi), r\sin\phi)(\partial_r(r\cos(\phi), r\sin(\phi))) \\
&= \Big(D(\partial_\phi)(r\cos(\phi), r\sin\phi) \circ D(\varphi^{-1})(r,\phi) \Big) \cdot e_1 \\
&= D(\partial_\phi \circ \varphi^{-1})(r,\phi) \cdot e_1 = \begin{pmatrix} -\sin(\phi) & -r\cos(\phi) \\ \cos(\phi) & -r\sin(\phi) \end{pmatrix} \cdot e_1 \\
&= \begin{pmatrix} -\sin(\phi) \\ \cos(\phi) \end{pmatrix} = \frac{1}{r} \cdot \partial_\phi(r\cos(\phi), r\sin(\phi))
\end{aligned}
$$

da $(\partial_\phi \circ \varphi^{-1})(r, \varphi) = \partial_\phi(r\cos(\phi), r\sin(\phi)) = (-r\sin(\phi), r\cos(\phi))^T$ gilt und wir dann wieder D bezüglich (r, ϕ) berechnen müssen. Es ist also

$$
\Gamma_{r\phi}^r(r\cos(\phi), r\sin(\phi)) = 0, \quad \Gamma_{r\phi}^\phi(r\cos(\phi), r\sin(\phi)) = \tfrac{1}{r}.
$$

Analog berechnet man

$$\begin{aligned}\Gamma^r_{rr}(r\cos(\phi), r\sin(\phi)) &= \Gamma^\phi_{rr}(r\cos(\phi), r\sin(\phi)) = \Gamma^r_{\phi r}(r\cos(\phi), r\sin(\phi)) \\ &= \Gamma^\phi_{\phi\phi}(r\cos(\phi), r\sin(\phi)) = 0, \\ \Gamma^\phi_{\phi r}(r\cos(\phi), r\sin(\phi)) &= \tfrac{1}{r}, \quad \Gamma^r_{\phi\phi}(r\cos(\phi), r\sin(\phi)) = -r.\end{aligned}$$

Man nennt ∇ wegen der Eigenschaft in Proposition 2.10 auch *tensoriell im ersten Argument*. Wir bemerken, dass ∇ aber kein (r,s)-*Tensorfeld* auf M. Ein solches kann man allgemein als einen differenzierbarer Schnitt in das (r,s)-*Tensorbündel* $\bigotimes^r T^*M \bigotimes^s TM$ definieren. Wir wollen dieses Vektorbündel hier aber nicht einführen sondern verwenden folgende alternative Definition für den Fall, dass $s \in \{0,1\}$ ist. Dies genügt für die Zwecke dieser Vorlesung, da bei uns keine (r,s)-Tensorfelder mit $s \geq 2$ vorkommen werden.

Definition 2.13. Es sei M eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit und $r \in \mathbb{N}$.

(a) Ein $(r,0)$-*Tensorfeld (auf M)* ist eine Familie $S = (S_p)_{p\in M}$ von r-multilinearen Abbildungen $S_p : \underbrace{T_pM \times \ldots T_pM}_{r} \to \mathbb{R}$ für jedes $p \in M$, die differenzierbar von $p \in M$ abhängt in dem Sinne, dass es um jeden Punkt $p \in M$ eine Karte (U,φ), $\varphi = (x_1,\ldots,x_n)$, gibt, so dass

$$S_{i_1\ldots i_r} : U \to \mathbb{R}, \quad S_{i_1\ldots i_r}(q) := S^\varphi_{i_1\ldots i_r}(q) := S_q\left(\frac{\partial}{\partial x_{i_1}}\bigg|_q, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_{i_r}}\bigg|_q\right)$$

für alle $i_1,\ldots,i_r \in \{1,\ldots,n\}$ differenzierbar ist.

(b) Ein $(r,1)$-*Tensorfeld (auf M)* ist eine Familie $S = (S_p)_{p\in M}$ von r-multilinearen Abbildungen $S_p : \underbrace{T_pM \times \ldots T_pM}_{r} \to T_pM$ für jedes $p \in M$, die differenzierbar von $p \in M$ abhängt in dem Sinne, dass es um jeden Punkt $p \in M$ eine Karte (U,φ), $\varphi = (x_1,\ldots,x_n)$, gibt, so dass

$$S_{i_1\ldots i_r} : U \to TU, \quad S_{i_1\ldots i_r}(q) := S^\varphi_{i_1\ldots i_r}(q) := S_q\left(\frac{\partial}{\partial x_{i_1}}\bigg|_q, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_{i_r}}\bigg|_q\right)$$

für alle $i_1,\ldots,i_r \in \{1,\ldots,n\}$ differenzierbar ist.

Bemerkung 2.14.

- Genauso wie wir Lemma 2.3 gezeigt haben, zeigt man auch, dass für ein (r,s)-Tensorfeld S auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit M, $r \in \mathbb{N}$, $s \in \{0,1\}$, $S(X_1,\ldots,X_r)$ für alle differenzierbaren Vektorfelder $X_1,\ldots,X_r$ auf M differenzierbar ist und auch, dass $S^\psi_{i_1\ldots i_r}$ für jede Karte (V,ψ) differenzierbar ist.
- Eine pseudo-riemannsche Metrik g ist ein $(2,0)$-Tensorfeld.
- Wir können unsere Definition von (r,s)-Tensorfeldern für $r \in \mathbb{N}$ und $s \in \{0,1\}$ in natürlicher Weise auf $r = 0$ fortsetzen, indem wir ein $(0,0)$-*Tensorfeld* als eine differenzierbare Funktion $f \in C^\infty(M)$ auf M definieren und ein $(0,1)$-*Tensorfeld* als ein differenzierbares Vektorfeld $X \in \Gamma(TM)$ auf M.

Weiter können wir analog zum Beweis der Tensoralität eines Zusammenhanges ∇ im ersten Argument folgendes zeigen:

Proposition 2.15. *Es sei*

$$T : \underbrace{\Gamma(TM) \times \ldots \times \Gamma(TM)}_{r} \to C^\infty(M)$$

bzw.

$$T : \underbrace{\Gamma(TM) \times \ldots \times \Gamma(TM)}_{r} \to \Gamma(TM)$$

eine r-multilineare Abbildung mit $T(X_1, \ldots, fX_i, \ldots, X_n) = f \cdot T(X_1, \ldots, X_i, \ldots, X_n)$ für alle $X_1, \ldots, X_r \in \Gamma(TM)$, alle $f \in C^\infty(M)$ und alle $i = 1, \ldots, n$.
Dann existiert ein $(r, 0)$- bzw. $(r, 1)$-Tensorfeld $S = (S_p)_{p \in M}$ auf M mit

$$(T(X_1, \ldots, X_n))(p) = S_p(X_1(p), \ldots, X_n(p))$$

für alle $X_1, \ldots, X_n \in \Gamma(TM)$ und alle $p \in M$.
Wir identifizieren daher solche r-multilineare Abbildungen T mit $(r, 0)$- bzw. $(r, 1)$-Tensorfeldern.

Zu jedem Zusammenhang bekommen wir auf natürliche Weise ein $(2, 1)$-Tensorfeld:

Definition 2.16. Es sei ∇ ein Zusammenhang auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit M. Die *Torsion* oder auch der *Torsionstensor (von ∇)* $T := T^\nabla : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \to \Gamma(TM)$ ist durch $T(X, Y) := \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]$ für $X, Y \in \Gamma(TM)$ definiert. T ist ein $(2, 1)$-Tensorfeld (Übung!).

Auf jeder pseudo-riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g) gibt es einen natürlichen Zusammenhang:

Satz 2.17. *Es sei (M, g) eine pseudo-riemannsche Mannigfaltigkeit. Dann gibt es genau einen Zusammenhang ∇^g auf (M, g), den sogenannten* Levi-Civita-Zusammenhang (von (M, g))*, der folgende zwei Eigenschaften erfüllt:*

(i) ∇^g ist metrisch*, d.h. für alle $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ ist*

$$X(g(Y, Z)) = g(\nabla^g_X Y, Z) + g(X, \nabla^g_X Z)$$

(ii) und ∇^g ist torsionsfrei*, d.h. $T^{\nabla^g} = 0$.*

In diesem Fall ist ∇^g durch die Koszul-Formel

$$\begin{aligned} g(\nabla^g_X Y, Z) = \tfrac{1}{2}\Big(& X(g(Y, Z)) + Y(g(Z, X)) - Z(g(X, Y)) \\ & + g([X, Y], Z) - g([X, Z], Y) - g([Y, Z], X)\Big) \end{aligned}$$

für alle $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ eindeutig definiert.

Beweis. Wir zeigen zunächst die Eindeutigkeit, indem wir zeigen, dass ein metrischer torsionsfreier Zusammenhang ∇ die Koszul-Formel erfüllt. Dazu betrachten wir die Ausdrücke $X(g(Y,Z))$, $Y(g(Z,X))$ und $Z(g(X,Y))$ und benutzen, dass ∇ torsionsfrei und metrisch ist, um diese Ausdrücke wie folgt umzuformen:

$$\begin{aligned}
X(g(Y,Z)) &= g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)\\
Y(g(Z,X)) &= g(\nabla_Y Z, X) + g(Z, \nabla_Y X) = g(\nabla_Y Z, X) + g(Z, \nabla_X Y) - g(Z, [X,Y])\\
Z(g(X,Y)) &= g(\nabla_Z X, Y) + g(X, \nabla_Z Y)\\
&= g(\nabla_X Z, Y) - g([X,Z], Y) + g(X, \nabla_Y Z) - g(X, [Y,Z])
\end{aligned}$$

Addieren wir nun die ersten beiden Zeilen und ziehen davon die letzte ab, so erhalten wir gerade die Koszul-Formel. Dies zeigt die Eindeutigkeit.
Zum Nachweis der Existenz sei eine $\mathbb{R}$-bilineare Abbildung $\nabla^g : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \to \Gamma(TM)$ durch die Koszul-Formel definiert. Unter Benutzung der Rechenregeln für den Kommutator $[\cdot,\cdot]$ von Vektorfeldern aus Proposition 1.49 rechnet man nach, dass

$$g(\nabla^g_{fX} Y, Z) = g(f\nabla^g_X Y, Z), \qquad g(\nabla^g_X (fY), Z) = g(f\nabla^g_X Y + X(f)Y, Z)$$

für alle $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ und alle $f \in C^\infty(M)$ gilt (Übung!), d.h. dass ∇^g ein Zusammenhang ist. Weiter ist ∇^g metrisch, da nach der Koszul-Formel gerade

$$\begin{aligned}
g(\nabla^g_X Y, Z) + g(Y, \nabla^g_X Z) &= \tfrac{1}{2}\,(X(g(Y,Z)) + Y(g(Z,X)) - Z(g(X,Y))\\
&\qquad + g([X,Y],Z) - g([X,Z],Y) - g([Y,Z],X)\\
&\qquad + X(g(Z,Y)) + Z(g(Y,X)) - Y(g(X,Z))\\
&\qquad + g([X,Z],Y) - g([X,Y],Z) - g([Z,Y],X))\\
&= X(g(Y,Z))
\end{aligned}$$

für alle $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ gilt. Schließlich ist ∇^g auch torsionsfrei, da nach der Koszul-Formel gerade

$$\begin{aligned}
g(\nabla^g_X Y - \nabla^g_Y X, Z) &= g(\nabla^g_X Y, Z) - g(\nabla^g_Y X, Z)\\
&= \tfrac{1}{2}\Big(X(g(Y,Z)) + Y(g(Z,X)) - Z(g(X,Y))\\
&\qquad + g([X,Y],Z) - g([X,Z],Y) - g([Y,Z],X)\\
&\qquad - Y(g(X,Z)) - X(g(Z,Y)) + Z(g(Y,X))\\
&\qquad - g([Y,X],Z) + g([Y,Z],X) + g([X,Z],Y)\Big)\\
&= g([X,Y],Z)
\end{aligned}$$

für alle $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ gilt. $\square$

Konvention. Ist (M,g) eine pseudo-riemannsche Mannigfaltigkeit, so werden wir im Folgenden immer den Levi-Civita-Zusammenhang ∇^g von (M,g) als Zusammenhang auf M nehmen, auch wenn wir es nicht immer extra erwähnen werden.

Bemerkung 2.18. Da die Torsion T^∇ eines Zusammenhangs ein $(2,1)$-Tensorfeld ist, genügt es die Torsionsfreiheit eines Zusammenhangs ∇ überall lokal bezüglich einer Karte (U,φ), $\varphi = (x_1,\dots,x_n)$, zu überprüfen, in dem wir die Koordinatenfelder $\frac{\partial}{\partial x_i}$ und $\frac{\partial}{\partial x_j}$ in T^∇ für alle $i,j \in \{1,\dots,n\}$ einsetzen. Die Torsionsfreiheit von ∇ ist daher lokal äquivalent zu

$$\begin{aligned} 0 = T^\nabla\left(\tfrac{\partial}{\partial x_i}, \tfrac{\partial}{\partial x_j}\right) &= \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \tfrac{\partial}{\partial x_j} - \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \tfrac{\partial}{\partial x_i} - \left[\tfrac{\partial}{\partial x_i}, \tfrac{\partial}{\partial x_j}\right] \\ &= \sum_{k=1}^n (\Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k)\, \tfrac{\partial}{\partial x_k} \end{aligned}$$

für alle $i,j,k \in \{1,\dots,n\}$, d.h. auf der Kartenumgebung U ist ∇ torsionsfrei genau dann, wenn die zugehörigen Christoffelsymbole Γ_{ij}^k symmetrisch in den Indizes i und j sind.
Da

$$\Gamma(TM)^3 \ni (X,Y,Z) \mapsto X(g(Y,Z)) - g(\nabla_X Y, Z) - g(X, \nabla_Y Z) \in C^\infty(M)$$

ein $(3,0)$-Tensorfeld ist (Übung!), genügt es auch die Metrizität von ∇ überall lokal bezüglich einer Karte (U,φ), $\varphi = (x_1,\dots,x_n)$, zu überprüfen, in dem wir in die definierende Gleichung die Koordinatenfelder $\frac{\partial}{\partial x_i}$, $\frac{\partial}{\partial x_j}$ und $\frac{\partial}{\partial x_k}$ für alle $i,j,k \in \{1,\dots,n\}$ einsetzen.
Die Metrizität von ∇ ist daher lokal äquivalent zu

$$\begin{aligned} 0 &= \tfrac{\partial}{\partial x_k}\left(g\left(\tfrac{\partial}{\partial x_i}, \tfrac{\partial}{\partial x_j}\right)\right) - g\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_k}} \tfrac{\partial}{\partial x_i}, \tfrac{\partial}{\partial x_j}\right) - g\left(\tfrac{\partial}{\partial x_i}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_k}} \tfrac{\partial}{\partial x_j}\right) \\ &= \tfrac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} - g\left(\sum_{l=1}^n \Gamma_{ki}^l \tfrac{\partial}{\partial x_l}, \tfrac{\partial}{\partial x_j}\right) - g\left(\tfrac{\partial}{\partial x_i}, \sum_{l=1}^n \Gamma_{kj}^l \tfrac{\partial}{\partial x_l}\right) = \tfrac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} - \sum_{l=1}^n \left(\Gamma_{ki}^l\, g_{lj} + \Gamma_{kj}^l\, g_{il}\right), \end{aligned}$$

d.h. zu

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} = \sum_{l=1}^n \left(\Gamma_{ki}^l\, g_{lj} + \Gamma_{kj}^l\, g_{il}\right)$$

für alle $i,j,k \in \{1,\dots,n\}$.

Beispiel 2.19. Der Zusammenhang $(D_X Y)(x) = DY(x)(X(x)) = dY_x(X_x)$ auf $\mathbb{R}^n$ aus Beispiel 2.7 ist der Levi-Civita-Zusammenhang von $\mathbb{R}^{p,n-p}$ für jedes $p \in \{0,\dots,n\}$ (Übung!).
Sei nun $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$, so dass die Einschränkung von $\langle\cdot,\cdot\rangle_{p,n-p}$ auf M eine pseudo-riemannsche Metrik g definiert (dies ist nach Beispiel 2.4 für $p = n$ immer der Fall). Seien weiter $X, Y \in \Gamma(TM)$ Vektorfelder auf M. Dann können wir X und Y als differenzierbare Abbildungen $X, Y : M \to \mathbb{R}^n$ auffassen und der Levi-Civita-Zusammenhang ∇^g von (M,g) ist dann durch

$$\nabla_X^g Y = \mathrm{pr}_{T_xM}(dY_x(X_x))$$

gegeben (Übung!), wobei $\mathrm{pr}_{T_xM} : \mathbb{R}^n \to T_xM$ die Orthogonalprojektion auf $T_xM \subseteq \mathbb{R}^n$ bezüglich $\langle\cdot,\cdot\rangle_{p,n-p}$ ist.

Bemerkung. Allgemein gilt für eine pseudo-riemannsche Mannigfaltigkeit (M, g) und eine Untermannigfaltigkeit N von M, so dass die Einschränkung $g|_N$ von g auf N eine pseudo-riemannsche Metrik auf N definiert, und für alle Vektorfelder $X, Y \in \Gamma(TN)$ und alle Punkte $p \in N$ die Gleichheit

$$(\nabla^{g|_N}_X Y)(p) = \mathrm{pr}_{T_pN}\left(\nabla^g_{\overline{X}} \overline{Y}\right).$$

Hierbei ist $\mathrm{pr}_{T_pN} : T_pM \to T_pN$ die Orthogonalprojektion auf $T_pN \subseteq T_pM$ bezüglich g_p und $\overline{X}, \overline{Y}$ sind lokale Vektorfelder auf M (!!!) sind, die auf einer offenen Umgebung von p in N(!!!) mit X bzw. Y übereinstimmen. Die Existenz solcher Vektorfelder zeigt man mit einer Untermannigfaltigkeitskarte von N um p.

2.3 Paralleltransport

In diesem Abschnitt wollen wir für einen gegebenen Zusammenhang ∇ den Paralleltransport entlang einer differenzierbaren Kurve $c : [a, b] \to M$ definieren, der dann den gewünschten Bezug zwischen den Tangentialräumen in den Punkten $c(a)$ und $c(b)$ herstellt. Dazu benötigen wir den Begriff eines *Vektorfeldes längs c*, welches dann *parallel bezüglich* ∇ bzw. genauer *bezüglich* $\frac{\nabla}{dt}$ (siehe Proposition 2.22) sein soll.

Definition 2.20. Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $c : I \to M$ eine differenzierbare Kurve. Dann heißt eine differenzierbare Abbildung $X : I \to TM$ ein *(differenzierbares) Vektorfeld längs c*, wenn $X(t) \in T_{c(t)}M$ für alle $t \in I$ gilt.
Wir schreiben $\Gamma_c(TM)$ für den $\mathbb{R}$-Vektorraum aller differenzierbaren Vektorfelder längs c und bemerken, dass $\Gamma_c(TM)$ über $(f \cdot X)(t) := f(t) \cdot X(t)$ für $f \in C^\infty(I)$ und $X \in \Gamma_c(TM)$ sogar zu einem $C^\infty(I)$-Modul wird.

Notation. Ab jetzt bezeichne I immer ein Intervall und $[a, b]$ ein echtes abgeschlossenes Intervall, d.h. es gelte $a, b \in \mathbb{R}$ und $a < b$.

Beispiel 2.21. Für jede differenzierbare Kurve $c : I \to M$ ist $\dot{c} : I \to TM$ ein Vektorfeld längs c. Weiter ist für ein „normales" Vektorfeld $X \in \Gamma(TM)$ auf M die Abbildung $X \circ c : I \to TM$ ein Vektorfeld längs c und für einen Zusammenhang ∇ auf M ist auch $\nabla_{\dot{c}} X : I \to TM$, $(\nabla_{\dot{c}} X)(t) := \nabla_{\dot{c}(t)} X \in T_{c(t)}M$ für $t \in I$, ein Vektorfeld längs c.

Für einen Zusammenhang ∇ auf einer Mannigfaltigkeit nennt man ein Vektorfeld $X \in \Gamma(TM)$ *parallel.* wenn $\nabla_Y X = 0$ für alle Vektorfelder $Y \in \Gamma(TM)$ auf M gilt. Entsprechend würde man gerne ein Vektorfeld $\tilde{X} \in \Gamma_c(TM)$ *parallel* nennen, wenn $(\nabla_{\dot{c}} \tilde{X})(t) = \nabla_{\dot{c}(t)} \tilde{X} = 0$ für alle $t \in I$ gilt. Wenn $\tilde{X} = X \circ c$ wie in Beispiel 2.21 mit einem Vektorfeld $X \in \Gamma(TM)$ von M gilt, so kann man einfach $\nabla_{\dot{c}} \tilde{X} := \nabla_{\dot{c}} X$ setzen und dann fordern, dass dieses Vektorfeld längs c konstant 0 ist. Es existiert im Allgemeinen jedoch kein solches Vektorfeld X (man denke beispielsweise an eine Kurve, die sich in einem Punkt schneidet, d.h. es gilt $c(t_1) = c(t_2)$ für $t_1, t_2 \in I$, $t_1 \neq t_2$. Dann ist aber im Allgemeinen $\dot{c}(t_1) \neq \dot{c}(t_2)$).
Allerdings kann man zeigen, dass man zur Berechnung von $\nabla_{\dot{c}} X$ für ein Vektorfeld $X \in \Gamma(TM)$ auf M nur die Werte von X entlang der Kurve c kennen muss und somit

kann man tatsächlich immer $\nabla_{\dot{c}}\tilde{X}$ definieren. Dies ist in der folgenden Proposition bzw. deren Beweis implizit enthalten. Wir bemerken, dass wir zur Unterscheidung eine andere Notation für $\nabla_{\dot{c}}\tilde{X}$ für ein Vektorfeld $\tilde{X} \in \Gamma_c(TM)$ längs c verwenden.

Proposition 2.22. *Es sei M eine Mannigfaltigkeit, $c : I \to M$ eine differenzierbare Kurve und ∇ ein Zusammenhang auf M. Dann existiert genau eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung*

$$\frac{\nabla}{dt} : \Gamma_c(TM) \to \Gamma_c(TM),$$

die die folgenden zwei Eigenschaften besitzt:

(i) Es ist $\frac{\nabla}{dt}(fX) = f\,\frac{\nabla}{dt}(X) + f'\,X$ für alle $f \in C^\infty(I)$ und alle $X \in \Gamma_c(TM)$ und

(ii) $\frac{\nabla}{dt}X = \nabla_{\dot{c}}Y$, falls $X = Y \circ c$ für ein Vektorfeld $Y \in \Gamma(TM)$ auf M gilt.

Diese ist für jedes $t \in I$ und jede Karte (U, φ), $\varphi = (x_1, \ldots, x_n)$, um $c(t) \in M$ durch

$$\left(\frac{\nabla}{dt}X\right)(t) = \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i,j=1}^{n} \dot{c}_i(t)\; X_j(t)\; \Gamma_{ij}^k(c(t)) + \dot{X}_k(t)\right) \frac{\partial}{\partial x_k}(c(t)) \tag{2.1}$$

gegeben, wobei $X_1, \ldots, X_n \in C^\infty(J)$ durch $X|_J = \sum_{i=1}^n X_i \frac{\partial}{\partial x_k} \circ c$ auf dem maximalen Interval $J \subseteq I$ mit $t \in J$ und $c(s) \in U$ für alle $s \in J$ definiert ist und $\Gamma_{ij}^k : U \to \mathbb{R}$ die in Bemerkung 2.11 eingeführten Christoffelsymbole von ∇ bezüglich φ sind.
Wir nennen dann $\frac{\nabla}{dt}$ die (von ∇ induzierte) kovariante Ableitung längs c.

Beweis. Eindeutigkeit:
Sei $\frac{\nabla}{dt} : \Gamma_c(TM) \to \Gamma_c(TM)$ eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung, die (i) und (ii) in Proposition 2.22 verfüllt. Dann sieht man, analog zum Beweis von Proposition 2.10, dass $(\frac{\nabla}{dt}X)(t)$ für $t \in I$ nur von den Werten von $X : I \to TM$ in einer offenen Umgebung von t im Intervall I abhängt.
Sei nun also $t \in I$ gegeben. Wir zeigen, dass dann für eine Karte (U, φ), $\varphi = (x_1, \ldots, x_n)$, um $c(t) \in M$ gerade Gleichung (2.1) für jedes Vektorfeld $X \in \Gamma_c(TM)$ längs c gilt. Dies beweist dann die Eindeutigkeit.
Dazu schreiben wir auf $J \subseteq I$ wie oben nun X als $X = \sum_{i=1}^n X_i \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} \circ c$ mit eindeutigen C^∞-Funktionen $X_1, \ldots, X_n \in C^\infty(J)$. Dann folgt mit den Eigenschaften (i) und (ii) in

Proposition 2.22 auf J gerade

$$
\begin{aligned}
\tfrac{\nabla}{dt}X &= \tfrac{\nabla}{dt}\left(\sum_{j=1}^{n} X_j\ \tfrac{\partial}{\partial x_j}\circ c\right) \overset{(i)}{=} \sum_{j=1}^{n}\left(X_j\ \tfrac{\nabla}{dt}\left(\tfrac{\partial}{\partial x_j}\circ c\right) + \dot{X}_j\ \tfrac{\partial}{\partial x_j}\circ c\right) \\
&\overset{(ii)}{=} \sum_{j=1}^{n}\left(X_j\ \nabla_{\dot{c}}\tfrac{\partial}{\partial x_j} + \dot{X}_j\ \tfrac{\partial}{\partial x_j}\circ c\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(X_j\ \nabla_{\sum_{i=1}^{n}\dot{c}_i\ \frac{\partial}{\partial x_i}\circ c}\tfrac{\partial}{\partial x_j} + \dot{X}_j\ \tfrac{\partial}{\partial x_j}\circ c\right) \\
&= \sum_{i,j=1}^{n}\left(\dot{c}_i\ X_j\ \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}\circ c}\tfrac{\partial}{\partial x_j}\right) + \sum_{k=1}^{n}\dot{X}_k\ \tfrac{\partial}{\partial x_k}\circ c \\
&= \sum_{i,j=1}^{n}\left(\dot{c}_i\ X_j\ \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}}\tfrac{\partial}{\partial x_j}\right)\circ c\right) + \sum_{k=1}^{n}\dot{X}_k\ \tfrac{\partial}{\partial x_k}\circ c \\
&= \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i,j=1}^{n}\dot{c}_i\ X_j\ \Gamma_{ij}^k\circ c + \dot{X}_k\right)\tfrac{\partial}{\partial x_k}\circ c.
\end{aligned}
$$

Existenz:
Es sei eine differenzierbare Kurve $c : I \to M$ sowie ein $t_0 \in I$ gegeben. Wir wählen nun eine Karte (U, φ), $\varphi = (x_1, \ldots, x_n)$, um $c(t_0) \in M$. Ist nun $J \subseteq \{t \in I | c(t) \in U\}$ ein offenes Intervall mit $t_0 \in J$, so definieren wir eine Abbbildung $\frac{\nabla}{dt} : \Gamma_{c|_J} \to \Gamma_{c|_J}$ durch Gleichung (2.1).
Diese Abbildung ist offensichtlich $\mathbb{R}$-linear und man sieht direkt an der Formel, dass sie (i) erfüllt. Weiter rechnet man direkt nach, dass sie auch (ii) erfüllt (Übung!).
Aufgrund der oben gezeigten Eindeutigkeit hängt unsere Definition nicht von der Wahl der Karte ab und liefert somit eine wohldefinierte $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $\frac{\nabla}{dt} : \Gamma_c(TM) \to \Gamma_c(TM)$, die (i) und (ii) erfüllt. $\square$

Bemerkung 2.23. Es sei (M, g) eine pseudo-riemannsche Mannigfaltigkeit, $c : I \to M$ eine differenzierbare Kurve und $X, Y \in \Gamma_c(TM)$ Vektorfelder längs c. Dann ist mit dem Levi-Civita-Zusammenhang ∇^g von (M, g) auch $\frac{\nabla^g}{dt} : \Gamma_c(TM) \to \Gamma_c(TM)$ *metrisch* in dem Sinne, dass

$$\tfrac{d}{dt}\, g(X, Y) = g\left(\tfrac{\nabla}{dt}X, Y\right) + g\left(X, \tfrac{\nabla}{dt}Y\right)$$

gilt:
Zum Beweis sei $t \in I$ fix und (U, φ) eine Karte um $c(t)$, $\varphi = (x_1, \ldots, x_n)$. Dann gilt lokal um $t \in I$ gerade $X = \sum_{i=1} X_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ und $Y = \sum_{j=1} Y_j \frac{\partial}{\partial x_j}$ mit differenzierbaren Funktionen $X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_n$ auf einer geeigneten offenen Umgebung von t in I.
Damit ergibt sich für die linke Seite der zu zeigenden Gleichung unter Benutzung der

lokalen Gleichung für die Metrizität von ∇^g in Bemerkung 2.18 gerade

$$\begin{aligned}
\tfrac{d}{dt}\, g(X,Y) &= \tfrac{d}{dt}\, g\left(\sum_{i=1} X_i \tfrac{\partial}{\partial x_i}\circ c, \sum_{j=1} Y_j \tfrac{\partial}{\partial x_j}\circ\right) = \sum_{i,j=1}^{n} \tfrac{d}{dt}\ (X_i\ Y_j\ g_{ij}\circ c) \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \dot{X}_i\ Y_j\ g_{ij}\circ c + X_i\ \dot{Y}_j\ g_{ij}\circ c + X_i\ Y_j\ d(g_{ij})(\dot{c}) \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \dot{X}_i\ Y_j\ g_{ij}\circ c + X_i\ \dot{Y}_j\ g_{ij}\circ c + X_i\ Y_j\ d(g_{ij})\left(\sum_{k=1}^{n} \dot{c}_k\ \tfrac{\partial}{\partial x_k}\circ c\right) \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \dot{X}_i\ Y_j\ g_{ij}\circ c + X_i\ \dot{Y}_j\ g_{ij}\circ c + X_i\ Y_j\ \sum_{k=1}^{n} \dot{c}_k\ d(g_{ij})\left(\tfrac{\partial}{\partial x_k}\circ c\right) \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \dot{X}_i\ Y_j\ g_{ij}\circ c + X_i\ \dot{Y}_j\ g_{ij}\circ c + X_i\ Y_j\ \sum_{k=1}^{n} \dot{c}_k\ \tfrac{\partial g_{ij}}{\partial x_k}\circ c \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} (\dot{X}_i\ Y_j + X_i\ \dot{Y}_j)\ g_{ij}\circ c + \sum_{i,j,k,l=1}^{n} X_i\ Y_j\ \dot{c}_k\ \left(\Gamma_{ki}^{l}\ g_{lj} + \Gamma_{kj}^{l}\ g_{il}\right)\circ c.
\end{aligned}$$

Weiter gilt nach Gleichung (2.1) für $\frac{\nabla}{dt}X$ nun

$$\begin{aligned}
g\left(\tfrac{\nabla}{dt}X, Y\right) &= g\left(\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i,j=1}^{n} \dot{c}_i\ X_j\ \Gamma_{ij}^{k}\circ c + \dot{X}_k\right)\tfrac{\partial}{\partial x_k}\circ c, \sum_{l=1}^{n} Y_l \tfrac{\partial}{\partial x_l}\circ c\right) \\
&= \sum_{i,j,k,l=1}^{n} X_j\ Y_l\ \dot{c}_i\ \Gamma_{ij}^{k}\circ c\ g_{kl}\circ c + \sum_{k,l=1}^{n} \dot{X}_k\, Y_l\ g_{kl}\circ c \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \dot{X}_i\ Y_j\ g_{ij}\circ c + \sum_{i,j,k,l=1}^{n} X_i\ Y_j\ \dot{c}_k\ \left(\Gamma_{ki}^{l}\ g_{lj}\right)\circ c.
\end{aligned}$$

Durch Wechsel der Rollen von X und Y erhalten wir eine entsprechende Formel für $g\left(X, \frac{\nabla}{dt}Y\right)$ und durch Addition der beiden Formeln erhält man dann die behauptete Gleichheit.

Nun können wir parallele Vektorfelder längs differenzierbarer Kurven definieren:

Definition 2.24. Es sei $c : I \to M$ eine differenzierbare Kurve auf einer Mannigfaltigkeit M und $X \in \Gamma_c(TM)$ ein Vektorfeld längs c. Dann heißt X *parallel*, wenn $\frac{\nabla}{dt}X = 0$ ist.

Beispiel 2.25. Wir bemerken, dass das folgende alles auch für die pseudo-riemannschen Mannigfaltifgkeiten $\mathbb{R}^{p,n-p}$ und *pseudo-riemannsche* Untermannigfaltigkeiten (M, g) von $\mathbb{R}^{p,n-p}$ (d.h. $M \subseteq \mathbb{R}^n$ ist Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$, so dass die Einschränkung g von $\langle\cdot,\cdot\rangle_{p,n-p}$ auf M eine pseudo-riemannsche Metrik g auf M ist) gilt, wir es der Einfachheit halber aber alles nur im riemannschen Fall formulieren (und so später auch nur benötigen werden):

Aus Beispiel 2.12 wissen wir, dass die Christoffelsymbole des Levi-Civita-Zusammenhanges D der riemannschen Mannigfaltigkeit $\mathbb{R}^n$ bezüglich der Standardkarte $(\mathbb{R}^n, \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n})$, $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n} = (x_1, \ldots, x_n)$, von $\mathbb{R}^n$ alle gleich 0 sind. Weiter ist dann $\frac{\partial}{\partial x_i} = e_i$ und aus Gleichung (2.1) folgt $(\frac{D}{dt}X)(t) = \dot{X}(t)$ für jede differenzierbare Kurve $c : I \to \mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^n$ und jedes differenzierbares Vektorfeld $X : I \to \mathbb{R}^n$ längs c. Also ist hier $X : I \to \mathbb{R}^n$ genau dann parallel, wenn X konstant ist.

Sei nun (M, g) eine riemannsche Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$, sei $c : I \to M$ eine differenzierbare Kurve in M und sei $X \in \Gamma_c(TM)$ ein differenzierbares Vektorfeld längs c. Dann kann man c als differenzierbare Kurve in $\mathbb{R}^n$ auffassen und dann X als ein Element in $\Gamma_c(T\mathbb{R}^n)$ und die kovariante Ableitung $\frac{\nabla^g}{dt} : \Gamma_c(TM) \to \Gamma_c(TM)$ längs $c : I \to M$ ist dann durch $\frac{\nabla^g}{dt}X = \mathrm{pr}_{T_{c(t)}M}\left(\frac{D}{dt}X\right) = \mathrm{pr}_{T_{c(t)}M}\left(\dot{X}\right)$ gegeben:

Offensichtlich ist $\frac{\nabla^g}{dt}$ $\mathbb{R}$-bilinear und erfüllt (i) aus Proposition 2.22. Weiter gilt auch (ii) aus Proposition 2.22, denn für ein Vektorfeld $\tilde{X} \in \Gamma(TM)$ auf M mit $X = \tilde{X} \circ c$ folgt mit Beispiel 2.19 gerade

$$(\nabla^g_{\dot{c}}\tilde{X})(c(t)) = \mathrm{pr}_{T_{c(t)}M}(d\tilde{X}_{c(t)}(\dot{c}(t))) = \mathrm{pr}_{T_{c(t)}M}(\tfrac{d}{dt}(\tilde{X} \circ c)(t)) = \mathrm{pr}_{T_{c(t)}M}\left(\dot{X}(t)\right).$$

Daher ist ein Vektorfeld $X \in \Gamma_c(TM)$ längs einer differenzierbaren Kurve $c : I \to M$ in einer riemannschen Untermannigfaltigkeit (M, g) von $\mathbb{R}^n$ genau dann parallel, wenn $\mathrm{pr}_{T_{c(t)}M}\left(\dot{X}(t)\right) = 0$ für alle $t \in I$ ist, also genau dann, wenn $\dot{X}(t)$ senkrecht auf $T_{c(t)}M$ steht für jedes $t \in I$.

Sei nun $X \in \Gamma_c(TS^2)$ ein Vektorfeld längs des Äquators $c : \mathbb{R} \to S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$, $c(t) := (\cos(t), \sin(t), 0)$. Dann ist $X(t) \in T_{c(t)}S^2 = \mathrm{span}\{(0,0,1), (-\sin(t), \cos(t), 0)\}$ für jedes $t \in \mathbb{R}$, also $X(t) = (-\lambda(t)\sin(t), \lambda(t)\cos(t), z(t))$ für $\lambda, z \in C^\infty(\mathbb{R})$ und es ist $\dot{X}(t) = (-\dot{\lambda}(t)\sin(t), \dot{\lambda}(t)\cos(t), \dot{z}(t)) - \lambda(t)(\cos(t), \sin(t), 0)$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Also ist X genau dann parallel, wenn λ und z konstant sind, also genau dann, wenn $X(t) = (-\lambda_0\sin(t), \lambda_0\cos(t), z_0)$ für bestimmte $\lambda_0, z_0 \in \mathbb{R}$ gilt.

Es gibt zu jedem Startvektor v genau ein paralleles Vektorfeld X längs einer Kurve c:

Proposition 2.26. *Es sei $c : [a, b] \to M$ eine differenzierbare Kurve auf einer Mannigfaltigkeit M, ∇ ein Zusammenhang auf M und $v \in T_{c(a)}M$ gegeben. Dann existiert ein eindeutiges paralleles Vektorfeld $X \in \Gamma_c(TM)$ längs c mit $X(a) = v$.*

Beweis. Wir behandeln zunächst den Fall, dass eine Karte (U, φ), $\varphi = (x_1, \ldots, x_n)$, von M mit $c([a, b]) \subseteq U$ existiert. Dann können wir $v = \sum_{i=1}^n v_i \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_{c(a)}$ mit eindeutigen $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}$ schreiben. Ebenso können wir jedes Vektorfeld $X \in \Gamma_c(TM)$ längs c schreiben als $X = \sum_{i=1}^n X_i \frac{\partial}{\partial x_i} \circ c$ mit eindeutigen $X_1, \ldots, X_n \in C^\infty([a, b])$. Nach Gleichung (2.1) gilt dann

$$\frac{\nabla}{dt}X = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i,j=1}^n \dot{c}_i \; X_j \; \Gamma_{ij}^k \circ c + \dot{X}_k \right) \frac{\partial}{\partial x_k} \circ c.$$

Die Existenz eines parallelen Vektorfeldes $X \in \Gamma_c(TM)$ längs c mit $X(a) = v$ ist daher äquivalent zu folgendem Anfangswertproblem für reellwertige C^∞-Funktionen

$X_1, \ldots, X_n$:

$$\begin{aligned}
\dot{X}_1(t) &= -\sum_{i,j=1}^{n} \dot{c}_i(t)\ X_j(t)\ \Gamma_{ij}^1(c(t)), \qquad & X_1(a) &= v_1,\\
\vdots \ &= \qquad \vdots \qquad\qquad , & \vdots\ \ &,\\
\dot{X}_n(t) &= -\sum_{i,j=1}^{n} \dot{c}_i(t)\ X_j(t)\ \Gamma_{ij}^n(c(t)), \qquad & X_n(a) &= v_n.
\end{aligned}$$

Dieses Anfangswertproblem ist *linear*, d.h. das zugehörige System von gewöhnlichen Differentialgleichungen ist linear, und hat daher nicht nur eine lokale (eindeutige) Lösung, sondern eine globale eindeutige Lösung auf dem gesamten Intervall $[a, b]$, siehe beispielsweise [Wal]. Dies zeigt die Behauptung im Fall, dass $c([a, b]) \subseteq U$ für eine Karte (U, φ) ist.
Sei nun $c : [a, b] \to M$ eine beliebige differenzierbare Kurve nach M und sei

$$t_0 := \sup \left\{ t \in [a, b] \,\middle|\, \text{es existiert genau ein paralleles } X \in \Gamma_{c|_{[a,t]}}(TM) \text{ mit } X(a) = v \right\}.$$

Wir müssen zeigen, dass $t_0 = b$ ist. Wegen dem gerade gezeigten gilt schonmal $t_0 > a$. Angenommen, $t_0 < b$. Wähle dann eine Karte (U, φ) um $c(t_0) \in M$. Dann gibt es ein $\epsilon > 0$ mit $\epsilon < \min\{b - t_0, t_0 - a\}$ und $c([t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon]) \subseteq U$. Nach Definition von t_0 gibt es genau ein paralleles Vektorfeld X längs $c|_{[a, t_0 - \frac{\epsilon}{2}]}$ mit $X(a) = v$ und nach dem oben gezeigten gibt es weiter genau ein paralleles Vektorfeld Y längs $c|_{[t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon]}$ mit $Y(t_0 - \epsilon) = X(t_0 - \epsilon)$. Aufgrund der Eindeutigkeit folgt dann aber $X(t) = Y(t)$ für alle $t \in \left[t_0 - \epsilon, t_0 - \frac{\epsilon}{2}\right]$ und somit existiert genau ein paralleles Vektorfeld Z längs $c|_{[a, t_0 + \epsilon]}$ mit $Z(a) = v$, was der Definition von t_0 widerspricht. Also ist $t_0 = b$. □

Dies erlaubt uns nun, den *Paralleltransport längs Kurven* wie folgt zu definieren:

Definition 2.27. Es sei $c : [a, b] \to M$ eine differenzierbare Kurve in einer Mannigfaltigkeit M und ∇ ein Zusammenhang auf M. Dann ist der *Paralleltransport längs c* die Abbildung $P_c^\nabla : T_{c(a)}M \to T_{c(b)}M$, die einem Tangentialvektor $v \in T_{c(a)}M$ den Wert $X(b) \in T_{c(b)}M$ des eindeutigen parallelen Vektorfeldes X längs c mit $X(a) = v$ zuordnet. Ist $\nabla = \nabla^g$ der Levi-Civita-Zusammenhang einer pseudo-riemannschen Metrik g auf M, so schreiben wir auch P_c^g statt $P_c^{\nabla^g}$.

Bemerkung 2.28.
(i) P_c^∇ ist ein linearer Isomorphismus, da $\mathbb{R}$-Linearkombinationen von parallelen Vektorfeldern längs c wieder parallel sind und da der Paralleltransport $P_{c^-}^\nabla : T_{c(b)}M \to T_{c(a)}M$ längs der entgegengesetzt durchlaufenen Kurve $c^- : [a, b] \to M$, $c^-(t) := c(a + b - t)$ gerade die Umkehrabbildung von $P_c^\nabla : T_{c(a)}M \to T_{c(b)}M$ ist (Übung!).

(ii) Ist (M, g) eine pseudo-riemannsche Mannigfaltgkeit, so ist der Paralleltransport $P_c^g : T_{c(a)}M \to T_{c(b)}M$ längs einer Kurve $c : [a, b] \to M$ sogar eine lineare Isometrie.

Seien dazu $v, w \in T_{c(a)}M$ gegeben und seien $X, Y \in \Gamma_c(TM)$ die zugehörigen parallelen Vektorfelder längs c mit $X(a) = v$ und $Y(a) = w$. Dann gilt

$$\tfrac{d}{dt}\, g(X,Y) = g\left(\tfrac{\nabla}{dt}X, Y\right) + g\left(X, \tfrac{\nabla}{dt}Y\right) = 0$$

nach Bemerkung 2.23 und aufgrund der Parallelität von X und Y. Also ist die Abbildung $[a,b] \ni t \mapsto g(X,Y)(t) = g_{c(t)}(X(t), Y(t)) \in \mathbb{R}$ konstant und insbesondere gilt $g_{c(a)}(v,w) = g_{c(a)}(X(a), Y(a)) = g_{c(b)}(X(b), Y(b)) = g_{c(b)}(P^g_c(v), P^g_c(w))$.

(iii) Im Allgemeinen sind die Paralleltransporte $P^\nabla_{c_1}$ und $P^\nabla_{c_2}$ längs zweier differenzierbarer Kurven c_1, c_2 mit gleichem Anfangs- und Endpunkt nicht(!!!) gleich. Ein Maß dafür, wie stark der Paralleltransport von der gewählten differenzierbaren Kurve zwischen zwei Punkten abhängt, liefert die sogenannte *Holonomiegruppe* $Hol_p(\nabla)$ *von* ∇ *(im Punkt* $p \in M$*)*

$$Hol_p(\nabla) := \left\{ P^\nabla_c \in \mathrm{End}(T_pM) \,\middle|\, c : [a,b] \to M \ (\textit{stückweise})\ C^\infty,\ c(a) = c(b) = p \right\}.$$

Ist diese in jedem Punkt p gleich der trivialen Gruppe $\{\mathrm{id}_{T_pM}\}$ (was auf zusammenhängenden Mannigfaltigkeiten der Fall ist, wenn Sie in einem Punkt trivial ist), so ist der Paralleltransport unabhängig von der gewählten differenzierbaren Kurve zwischen zwei Punkten.

Wir hatten am Anfang des vorherigen Abschnittes erwähnt, dass ein Zusammenhang eine Art „infinitesimale“ Version des Paralleltransports längs Kurven ist. Was dies mathematisch präzise heißen soll, ist der Inhalt der folgenden Proposition:

Proposition 2.29. *Es sei* M *eine Mannigfaltigkeit,* ∇ *ein Zusammenhang auf* M*,* $p \in M$*,* $v \in T_pM$ *sowie* $X \in \Gamma(TM)$ *ein Vektorfeld auf* M*. Dann gilt für jede differenzierbare Kurve* $c : (-\epsilon, \epsilon) \to M$*,* $\epsilon > 0$*, mit* $c(0) = p$ *und* $c'(0) = v$ *gerade*

$$\nabla_v X = \tfrac{d}{dt}\Big|_{t=0} \left(P^\nabla_{c|_{[0,t]}}\right)^{-1} (X(c(t)).$$

Beweis. Es sei eine Basis $w_1, \ldots, w_n \in T_pM$ von T_pM gegeben. Dann existieren wegen Proposition 2.26 eindeutige parallele Vektorfelder $W_1, \ldots, W_n \in \Gamma_c(TM)$ längs c mit $W_i(0) = w_i$ für $i = 1, \ldots, n$. Da der Paralleltransport ein linearer Isomorphismus ist, ist $W_1(t), \ldots, W_n(t)$ eine Basis von $T_{c(t)}M$ für jedes $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ und wir können daher das Vektorfeld $X \circ c \in \Gamma_c(TM)$ längs c schreiben als $X \circ c = \sum_{i=1}^n f_i\, W_i$ mit eindeutig bestimmten differenzierbaren Funktionen $f_1, \ldots, f_n \in C^\infty((-\epsilon, \epsilon))$.
Dann ergibt sich einerseits die linke Seite der zu beweisenden Gleichung zu

$$\begin{aligned}
\nabla_v X = \nabla_{\dot c(0)} X &= \left(\tfrac{\nabla}{dt}(X \circ c)\right)(0) = \left(\tfrac{\nabla}{dt}\left(\sum_{i=1}^n f_i\, W_i\right)\right)(0) \\
&= \sum_{i=1}^n \left(f_i(0)\ \left(\tfrac{\nabla}{dt}W_i\right)(0) + f_i'(0)\ W_i(0)\right) = \sum_{i=1}^n f_i'(0)\ w_i
\end{aligned}$$

aufgrund der Parallelität von $W_1, \ldots, W_n$.

Andererseits ist

$$\begin{aligned}
\left(P^{\nabla}_{c|_{[0,t]}}\right)^{-1}(X(c(t))) &= \left(P^{\nabla}_{c|_{[0,t]}}\right)^{-1}\left(\sum_{i=1}^{n} f_i(t)\ W_i(t)\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} f_i(t) \left(P^{\nabla}_{c|_{[0,t]}}\right)^{-1}(W_i(t)) = \sum_{i=1}^{n} f_i(t)\ W_i(0) \\
&= \sum_{i=1}^{n} f_i(t)\ w_i
\end{aligned}$$

aufgrund der Linearität und Definition von $\left(P^{\nabla}_{c|_{[0,t]}}\right)^{-1}$ und somit ergibt sich die rechte Seite der zu beweisenden Gleichung ebenfalls zu

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\left(P^{\nabla}_{c|_{[0,t]}}\right)^{-1}(X(c(t))) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\left(\sum_{i=1}^{n} f_i(t)\ w_i\right) = \sum_{i=1}^{n} f_i'(0)\ w_i.$$

Dies zeigt die Behauptung. □

2.4 Geodätische und Exponentialabbildung

Wir beginnen mit der Definition von *Geodätischen*:

Definition 2.30. Es sei M eine Mannigfaltigkeit und ∇ ein Zusammenhang auf M. Dann heißt eine differenzierbare Kurve $c : I \to M$ *Geodätische (von* (M, ∇)*)*, falls $\dot{c}$ ein paralleles Vektorfeld längs c ist, d.h. falls

$$\frac{\nabla}{dt}\dot{c} = 0$$

gilt.

Notation. Ab jetzt werden wir als vereinfachte Schreibweise für die lokalen Koordinatenvektorfelder einer Karte (U, φ), $\varphi = (x_1, \ldots, x_n)$, statt $\frac{\partial}{\partial x_i}$ einfach nur ∂_i für jedes $i = 1, \ldots, n$ schreiben.

Proposition 2.31. *Es sei M eine Mannigfaltigkeit. Dann existiert zu jedem $v \in TM$ ein $\epsilon > 0$ und eine Geodätische $c : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ mit $c(0) = \pi(v) =: p$ und $c'(0) = v$. c ist eindeutig in dem Sinne, dass für jede andere Geodätische $\tilde{c} : J \to \mathbb{R}$, J offenes Intervall um 0, mit $\tilde{c}(0) = p$, $\dot{\tilde{c}}(0) = b$ gerade $\tilde{c}|_{J\cap(-\epsilon,\epsilon)} = c|_{J\cap(-\epsilon,\epsilon)}$ gilt.*

Notation. Wir werden im Folgenden unter Missachtung des Definitionsbereiches sagen, dass es zu jedem $v \in TM$ eine eindeutige Geodätische c mit $c(0) = \pi(v)$ und $\dot{c}(0) = v$ gibt und diese mit c_v oder $c_{\pi(v),v}$ bezeichnen.

Beweis (von Proposition 2.31). Wir wählen eine Karte (U, φ), $\varphi = (x_1, \ldots, x_n)$, von M um $p := \pi(v) \in M$.

Dann gilt für eine Kurve $c : (-\delta, \delta) \to M$ mit $c((-\delta, \delta)) \subseteq U$ wegen $\dot{c} = \sum_{i=1}^n \dot{c}_i \partial_i \circ$ mit $c_i := x_i \circ c$ für alle $i = 1, \ldots, n$ nach Gleichung (2.1) gerade

$$\frac{\nabla}{dt}\dot{c} = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i,j=1}^n \dot{c}_i \; \dot{c}_j \; \Gamma_{ij}^l \circ c + \ddot{c}_k \right) \partial_k \circ c.$$

Daher ist c genau dann eine Geodätische mit $c(0) = p$ und $\dot{c}(0) = v$, wenn $c_1, \ldots, c_)$ das folgende Anfangswertproblem lösen:

$$\begin{aligned}
\ddot{c}_1(t) &= -\sum_{i,j=1}^n \dot{c}_i(t) \; \dot{c}_j(t) \; \Gamma_{ij}^l(c(t)), & c_1(0) &= p_1, & \dot{c}_1(0) &= v_1, \\
\vdots &= \qquad \vdots \qquad\qquad , & \vdots &\;\; , & \vdots &\;\; , \\
\ddot{c}_n(t) &= -\sum_{i,j=1}^n \dot{c}_i(t) \; \dot{c}_j(t) \; \Gamma_{ij}^n(c(t)), & c_n(0) &= p_n, & \dot{c}_n(0) &= v_n
\end{aligned}$$

Dabei ist $(p_1, \ldots, p_n) = \varphi(p) \in \varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ und $(v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ ist eindeutig durch $v = \sum_{i=1}^n v_i \partial_i(p)$ bestimmt. Dies ist ein Anfangswertproblem für ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen zweiter Ordnung auf der offenen Teilmenge $\varphi(U)$ von $\mathbb{R}^n$ und die Behauptung folgt aus dem Satz von Picard-Lindelöf, da man jedes solche System in ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen erster Ordnung auf einer offenen Teilmenge von $\mathbb{R}^{2n}$ umschreiben kann (man führe dazu neue Variablen $\eta_1, \ldots, \eta_n$ ein, die $\dot{c}_i = \eta_i$ für alle $i = 1, \ldots, n$ erfüllen). $\square$

Bemerkung 2.32. Es sei M eine Mannigfaltigkeit und ∇ ein Zusammenhang.

(i) Es sei $c : I \to M$ eine Geodätische.

Offensichtlich ist dann $\dot{c}(t_2) = P_{c|_{[t_1,t_2]}}(\dot{c}(t_1))$ für alle $t_1, t_2 \in I$, $t_1 < t_2$ (und entsprechend für $t_1 > t_2$).

Da der Paralleltransport nach Bemerkung 2.28 (i) ein linearer Isomorphismus ist, folgt daher aus $\dot{c}(t_0) = 0 \in T_{c(t)}M$ für ein $t_0 \in I$ schon $\dot{c}(t) = 0$ für alle $t \in I$.

Ist g eine pseudo-riemannsche Metrik auf M und $\nabla = \nabla^g$ der Levi-Civita-Zusammenhang, so wissen wir aus Bemerkung 2.28 (ii), dass der Paralleltransport eine lineare Isometrie ist und somit gilt in diesem Fall sogar $g_{c(t_1)}(\dot{c}(t_1), \dot{c}(t_1)) = g_{c(t_2)}(\dot{c}(t_2), \dot{c}(t_2))$ für alle $t_1, t_2 \in I$.

(ii) Parametrisiert man eine Geodätische $c : I \to M$ mit $\dot{c}(t) \neq 0$ für ein und somit alle $t \in I$ um, so ist sie im Allgemeinen keine Geodätische mehr:

Denn ist $\alpha : J \to I$, J Intervall, eine Umparametrisierung, so sieht man aus Gleichung (2.1), dass für $X \in \Gamma_c(TM)$ die kovarianten Ableitung von $X \circ \alpha$ längs $\tilde{c} : J \to M$, $J \ni s \mapsto \tilde{c}(s) := c(\alpha(s)) \in M$ und die kovariante Ableitung von X längs c über

$$\Big(\tfrac{\nabla}{ds}(X \circ \alpha)\Big)(s) = \alpha'(s) \cdot (\tfrac{\nabla}{dt}X)(\alpha(s))$$

für alle $s \in J$ zusammenhängen. Da $\tilde{c}'(s) = \alpha'(s) \cdot \dot{c}(\alpha(s))$ für alle $s \in J$ gilt und c eine Geodätische ist, folgt

$$\begin{aligned}\Big(\tfrac{\nabla}{ds}(\tilde{c}')\Big)(s) &= \Big(\tfrac{\nabla}{ds}\,(\alpha' \cdot \dot{c} \circ \alpha)\Big)(s) = \alpha'(s) \cdot \Big(\tfrac{\nabla}{ds}\,(\dot{c} \circ \alpha)\Big)(s) + \alpha''(s) \cdot \dot{c}(\alpha(s)) \\ &= (\alpha'(s))^2 \cdot (\tfrac{\nabla}{dt}\dot{c})(\alpha(s)) + \alpha''(s) \cdot \dot{c}(\alpha(s)) = \alpha''(s) \cdot \dot{c}(\alpha(s))\end{aligned}$$

für alle $s \in J$. Daher ist auch $\tilde{c}$ eine Geodätische genau dann, wenn $\alpha'' \equiv 0$ ist, also genau dann, wenn $\alpha(s) = a \cdot s + b$ für bestimmte $a, b \in \mathbb{R}$ ist. Somit ist die Menge aller Geodätischen nur unter affin-linearen Umparametrisierung invariant.

Beispiel 2.33. Das Folgende gilt alles auch im entsprechenden pseudo-riemannschen Kontext. Der Einfachheit halber formulieren wir es aber nur im riemannschen Fall.

(i) Nach Beispiel 2.25 ist ein Vektorfeld $X \in \Gamma_c(T\mathbb{R}^n)$ längs einer differenzierbaren Kurve $c : I \to \mathbb{R}^n$ in der riemannschen Mannigfaltigkeit $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n,0}$ genau dann parallel, wenn es konstant ist. Daher ist die Geodätische $c_{p,v}$ mit $c_{p,v}(0) = p \in \mathbb{R}^n$ und $\dot{c}_{p,v}(0) = v \in \mathbb{R}^n = T_p\mathbb{R}^n$ durch $c_{p,v} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, $c_{p,v}(t) := p + tv$ für $t \in \mathbb{R}$, gegeben.

(ii) Sei nun (M, g) eine riemannsche Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$. Dann ist nach Beispiel 2.25 ein Vektorfeld $X \in \Gamma_c(TM)$ längs einer differenzierbaren Kurve $c : I \to M$ in M parallel genau dann, wenn $\dot{X}(t)$ senkrecht auf $T_{c(t)}M$ ist für alle $t \in I$. Also ist $c : I \to M$ eine Geodätische genau dann, wenn $\ddot{c}(t)$ senkrecht auf $T_{c(t)}M$ ist für alle $t \in I$.

(iii) Betrachten wir nun speziell die riemannsche Untermannigfaltigkeit (S^n, g_{st}) von $\mathbb{R}^{n+1}$ und sei $p \in S^n$ sowie $v \in T_pS^n = p^\perp$ gegeben. Für $v \neq 0$ ist dann der *Großkreis* durch $p \in S^n$ und $\frac{v}{\|v\|} \in S^n$, mit der richtigen Geschwindigkeit durchlaufen, die eindeutige Geodätische $c_{p,v}$ mit $c_{p,v}(0) = p$ und $\dot{c}_{p,v}(0) = v$. Genauer ist

$$c_{p,v} : \mathbb{R} \to S^n, \quad c_{p,v}(t) := \cos(\|v\|\,t)\,p + \sin(\|v\|\,t)\,\tfrac{v}{\|v\|},$$

denn es ist $c_{p,v}(0) = p$, $\dot{c}_{p,v}(0) = v$ und $\ddot{c}_{p,v}(t) \in \operatorname{span}\{c_{p,v}(t)\} = (c_{p,v}(t)^\perp)^\perp = (T_{c_{p,v}(t)}S^n)^\perp$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

Für $v = 0$ ist $c_{p,0}$ die konstante Punktkurve p, d.h. $c_{p,0}(t) = p$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

Die eindeutische Geodätische c_v für $v \in TM$ verhält sich folgendermaßen unter Skalierungen von v:

Lemma 2.34. *Es sei ∇ ein Zusammenhang auf einer Mannigfaltigkeit M. Ist für $v \in TM$ die Geodätische c_v auf $(-a, b)$ für $a, b > 0$ definiert, so ist für jedes $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ die Geodätische c_{av} auf $\left(-\frac{a}{\lambda}, \frac{b}{\lambda}\right)$ definiert und es gilt die Gleichheit*

$$c_{\lambda v}(t) = c_v(\lambda t)$$

für alle $t \in \left(-\frac{a}{\lambda}, \frac{b}{\lambda}\right)$.

Beweis. Nach Bemerkung 2.32 (ii) ist $\tilde{c} : \left(-\frac{a}{\lambda}, \frac{b}{\lambda}\right) \to M$, $\tilde{c}(t) := c_v(\lambda t)$, eine Geodätische. Da $\dot{\tilde{c}}(0) = \lambda \dot{c}_v(0) = \lambda v$ gilt, ist $\tilde{c} = c_{\lambda v}$, was die Behauptung zeigt. □

Als nächstes definieren wir die *Exponentialabbildung*:

Definition 2.35. Es sei ∇ ein Zusammenhang auf M und

$$\mathcal{D} := \{v \in TM \,|\, c_v \textit{ existiert auf } [0,1]\}$$

Die *Exponentialabbildung (von* (M, ∇)*)* ist dann definiert als

$$\exp : \mathcal{D} \to M, \quad \exp(w) := c_v(1)$$

für $v \in \mathcal{D}$. Wir bemerken, dass $\mathcal{D}$ offen und exp differenzierbar ist. Beides folgt aus der glatten Abhängigkeit von Lösungen von gewöhnlichen Differentialgleichungen von den Anfangsdaten. Für einen genaueren Beweis, der ein geeignetes differenzierbares Vektorfeld auf TM(!!!) verwendet, verweisen wir auf [Lee1, Proposition 5.7 (c)].
Für einen Punkt $p \in M$ setzen wir $\mathcal{D}_p := \mathcal{D} \cap T_pM$ sowie

$$\exp_p : \mathcal{D}_p \to M, \quad \exp_p := \exp|_{\mathcal{D}_p}$$

und nennen diese Abbildung die *Exponentialabbildung (von* (M, ∇)*) in* p. Wir bemerken, dass dann auch $\mathcal{D}_p$ offen in T_pM ist und dass mit exp auch $\exp_p$ differenzierbar ist, da T_pM für jedes $p \in M$ eine Untermannigfaltigkeit von M ist.

Wir notieren einige Eigenschaften von exp, die direkt aus Lemma 2.34 folgen:

Bemerkung 2.36. (i) Offensichtlich ist $0_p \in \mathcal{D}_p$ für jedes $p \in M$, da $c_{0_p} : \mathbb{R} \to M$, $c_{0_p} \equiv p$ gilt.

(ii) Weiter ist $\mathcal{D}_p$ sternförmig bezüglich 0_p, denn mit $v \in \mathcal{D}_p$ ist nach Lemma 2.34 die Geodätische c_{tv} auf $\left[0, \frac{1}{t}\right]$ (offensichtlich gilt das Lemma genauso für abgeschlossene Intervalle) für jedes $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ definiert, und somit für $0 < t < 1$ insbesondere auf $[0,1]$.

(iii) Es ist $c_v(t) = \exp(tv)$ für alle $(t,v) \in \mathbb{R} \times TM$ mit $tv \in \mathcal{D}$, denn nach Lemma 2.34 gilt $\exp(tv) = c_{tv}(1) = c_v(t)$.

Weiter ist $\exp_p : T_pM \to M$ ein *lokaler Diffeomorphismus in* 0_p:

Proposition 2.37. *Es sei* ∇ *ein Zusammenhang auf einer Mannigfaltigkeit* M *und* $p \in M$ *gegeben. Dann ist* $\exp_p : T_pM \to M$ *ein* lokaler Diffeomorphismus in $0 = 0_p$, *d.h. es existiert eine offene Umgebung* U *von* 0_p *in* T_pM, *so dass* $\exp_p|_U : U \to \exp_p(U)$ *ein Diffeomorphismus aufs offene Bild* $\exp_p(U) \subseteq M$ *ist.*

Beweis. Aufgrund des Umkehrsatzes (Satz 1.25) genügt es zu zeigen, dass $d(\exp_p)_0 : T_pM = T_0(T_pM) \to T_pM$ invertierbar ist. Wir zeigen, dass sogar $d(\exp_p)_0 = \mathrm{id}_{T_pM}$ gilt.

Sei dazu ein $v \in T_pM = T_{0_p}(T_pM)$ gegeben. Dann ist $\gamma : \mathbb{R} \to T_pM$, $\gamma(t) := tv$, eine differenzierbare Kurve in T_pM mit $\gamma(0) = 0$ und $\gamma'(0) = v$ und es folgt mit Bemerkung 2.36 (iii) dann

$$d(\exp_p)_0(v) = (\exp_p \circ \gamma)'(0) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (t \mapsto \exp_p(tv)) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (t \mapsto \gamma_v(t)) = \gamma_v'(0) = v,$$

also $d(\exp_p)_0 = \mathrm{id}_{T_pM}$ und somit, dass $\exp_p$ ein lokaler Diffeomorphismus in 0 ist. $\square$

Beispiel 2.38. In den folgenden Beispielen nehmen wir immer den Levi-Civita-Zusammenhang auf der jeweiligen pseudo-riemannschen Mannigfaltigkeit:

(i) Auf $\mathbb{R}^{p,n-p} = (\mathbb{R}^n, \langle\cdot,\cdot\rangle_{p,n-p}$ ist die Exponentialabbildung $\exp_x : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ in $x \in \mathbb{R}^n$ nach Beispiel 2.33 (i) auf ganz $\mathbb{R}^n = T_x\mathbb{R}^n$ definiert und durch $\exp_x(v) = x + v$ für $v \in \mathbb{R}^n$ gegeben.

   Betrachten wir nun statt der Mannigfaltigkeit $\mathbb{R}^n$ die Mannigfaltigkeit $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, so gilt für $\exp_x$ immer noch die gleiche Formel, allerdings ist dann $\exp_x$ nur noch auf dem offenen Ball um 0 in $\mathbb{R}^n$ mit euklidischem Radius $\|x\|$ definiert, da sonst $\exp_x(-x) = 0$ gelten würde. Die Exponentialabbildung in einem Punkt $x \in M$ ist also im Allgemeinen nicht auf dem gesamten Tangentialraum T_xM definiert.

(ii) Nach Beispiel 2.33 (iii) ist die Exponentialabbildung $\exp_p : T_pS^n \to S^n$ von (S^n, g_{st}) in jedem Punkt $p \in S^n$ auf ganz T_pS^n definiert und durch

$$\exp_p(v) = c_{p,v}(1) = \cos(\|v\|)\, p + \sin(\|v\|)\, \frac{v}{\|v\|}$$

   für $v \in T_pS^2 \setminus \{0\}$ und $\exp_p(0) = p$ gegeben.

(iii) Versehen wir $(0,\infty)$ mit der riemannschen Metrik $g = (g_x)_{x\in(0,\infty)}$, $g_x(v,w) = \frac{vw}{x^2}$ für $x \in (0,\infty)$, $v, w \in \mathbb{R} = T_x\mathbb{R}$, so ist die Exponentialabbildung in 1 gerade durch $\exp_1(x) = e^x$, also durch die „übliche" Exponentialabbildung gegeben (Übung!).

   Wir bemerken, dass $(0,\infty)$ mit der Multiplikation zweier reeller Zahlen gerade $\mathrm{GL}^+(1,\mathbb{R})$ ist und dass e^x gerade der Matrix-Exponentialabbildung entspricht.

   Analog erhält man für bestimmte riemannsche Metriken auf $\mathrm{O}(n)$ (Übung!) und auf bestimmten anderen *Matrix-Lie-Gruppen* G (d.h. G ist Untergruppe und Untermannigfaltigkeit von $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$) die gewöhnliche Matrix-Exponentialabbildung als Exponentialabbildung am Einselement I_n.

2.5 Riemannsche Mannigfaltigkeiten als metrische Räume

In diesem Abschnitt betrachten wir nur riemannsche(!!!) Mannigfaltigkeiten (M, g)
Wir zeigen zunächst, dass man M auf natürliche Weise mit einer Metrik d versehen kann, die die gegegebene Topologie induziert. Da nach Bemerkung 2.5 (a) jede Mannigfaltigkeit mit einer riemannschen Metrik versehen werden kann, ist also jede Mannigfaltigkeit metrisierbar. Der Abstand $d(p,q)$ zweier Punkte $p, q \in M$ ist dabei als das Infimum von

Längen von Kurven zwischen p und q definiert und wir zeigen dann, dass das Infimum nur für Geodätische angenommen werden kann und dass jede Geodätische „lokal“ das Infimum annimmt. Am Ende des Abschnittes beweisen wir den Satz von Hopf-Rinow, der unter anderem besagt, dass der metrische Raum (M, d) genau dann vollständig ist, wenn alle Geodätischen von (M, g) für alle Zeiten existieren und weiter besagt, dass das Infimum von oben immer angenommen wird.
Wir beginnen mit der Definition der Länge einer Kurve. Aus technischen Gründen bietet es sich an, nicht nur differenzierbare sondern allgemeiner *stückweise differenzierbare* Kurven zu betrachten:

Definition 2.39. Es sei M eine Mannigfaltigkeit. Eine stetige Abbildung $c : [a, b] \to M$ heißt *stückweise differenzierbare Kurve*, wenn es $a = t_0 < \ldots < t_N = b$ gibt, so dass $c|_{[t_i,t_{i+1}]}$ differenzierbar ist für jedes $i = 0, \ldots, N-1$ (es existieren also die links- und rechtsseitigen Ableitungen an $t_1, \ldots, t_{N-1}$, diese stimmen aber nicht unbedingt überein). Die Stellen $t_1, \ldots, t_{N-1}$ nennen wir dabei die *Knickstellen von c*.
Ist g eine riemannsche Metrik auf M, so definieren wir die *Länge* $L(c)$ einer stückweise differenzierbaren Kurve $c : [a, b] \to M$ durch

$$L(c) := \int_a^b \|\dot{c}(t)\|_{c(t)}\, dt.$$

Hierbei haben wir die Notation $\|v\|_p := \sqrt{g_p(v, v)}$ für $p \in M$ und $v \in T_pM$ benutzt, die wir auch im Rest des Skriptes verwenden werden.

Bemerkung 2.40. Es (M, g) eine riemannsche Mannigfaltigkeit. Dann ist die Länge $L(c)$ jeder stückweise differenzierbaren Kurve $c : [a, b] \to M$ offensichtlich endlich. Weiter gelten offensichtlich folgende Eigenschaften:

(i) Es ist $L(c) \geq 0$ und $L(c) = 0$ genau dann, wenn $c \equiv p$ für ein $p \in M$ gilt.

(ii) $L(c)$ ist offensichtlich invariant unter Umparametrisierungen.

(iii) Sind $c_1 : [a_1, b_1] \to M$ und $c_2 : [a_2, b_2] \to M$ stückweise differenzierbare Kurven mit $c_2(a_2) = c_1(b_1)$, so hat die *Hintereinanderausführung* $c_1 \star c_2 : [a_1, b_1 + b_2 - a_2] \to M$,

$$(c_1 \star c_2)(t) = \begin{cases} c_1(t) & \text{, falls } t \in [a_1, b_1], \\ c_2(b_1 - a_2 + t) & \text{, falls } t \in [b_1, b_1 + b_2 - a_2]. \end{cases}$$

die Länge

$$L(c_1 \star c_2) = L(c_1) + L(c_2)$$

Wir bemerken, dass für differenzierbare Kurven c_1, c_2 die Hintereinanderausführung $c_1 \star c_2$ im Allgemeinen nur noch stückweise differenzierbar ist. Dies ist der Grund, warum wir diese größere Klasse von Kurven betrachten.

(M, g) wird nun (falls M zusammenhängend ist) wie folgt zu einem metrischen Raum:

Satz 2.41. *Es sei (M,g) eine zusammenhängende riemannsche Mannigfaltigkeit. Dann definiert*

$$d(p,q) := \inf\{L(c)\,|c : [a,b] \to M \text{ stückweise differenzierbare Kurve, } c(a) = p,\ c(b) = q\}$$

für $p,q \in M$ eine Metrik $d : M \times M \to [0,\infty)$ auf M, die die Topologie von M induziert.

Beweis. Bemerkung 2.40 (i) impliziert direkt, dass $d(p,q) \geq 0$ für alle $p,q \in M$ ist. Weiter ist $d(p,p) = 0$ (man nehme die konstante Kurve $c \equiv p$ auf einem echten kompakten Intervall) und $d(p,q) = d(q,p)$ für alle $p,q \in M$, denn es ist $L(c) = L(c^-)$ für jede stückweise differenzierbare c Kurve von p nach q aufgrund der Invarianz unter Umparametrisierungen aus Bemerkung 2.40 (ii), wobei c^- die entgegengesetzt durchlaufene Kurve ist.
Seien nun $p,q,r \in M$ gegeben. Dann gilt für jede stückweise differenzierbare Kurve c_1 von p nach q und jede stückweise differenzierbare Kurve c_2 von q nach r, dass $c_1 \star c_2$ eine stückweise differenzierbare Kurve von p nach r ist und wegen Bemerkung 2.40 (iii) dann

$$d(p,r) \leq L(c_1 \star c_2) = L(c_1) + L(c_2).$$

Durch zweifache Infimumsbildung auf der rechten Seite dieser Ungleichung erhalten wir dann die Dreiecksungleichung $d(p,r) \leq d(p,q) + d(q,r)$.
Um zu zeigen, dass d eine Metrik auf M ist, müssen wir also noch zeigen, dass aus $d(p,q) = 0$ für $p,q \in M$ immer $p = q$ folgt. Weiter müssen wir noch nachweisen, dass die von d induzierte Topologie mit der Topologie von M übereinstimmt. Um dies nachzuweisen, zeigen wir, dass für jeden Punkt $p \in M$ und für jedes $\epsilon > 0$ eine offene Umgebung W von p in M existiert mit $W \subseteq B^d_\epsilon(p) := \{q \in M | d(p,q) < \epsilon\}$ und dass für jede Kartenumgebung U um einen Punkt $p \in M$ ein $\tilde{\epsilon} > 0$ existiert, so dass $B^d_{\tilde{\epsilon}}(p) \subseteq U$ ist (bemerke dazu, dass die Menge aller Kartenumgebungen von M offensichtlich eine Basis der Topologie von M ist).
Aus der zweiten Eigenschaft folgt dann auch, dass $d(p,q) = 0$ für $q \in M$ immer $p = q$ impliziert, denn wir können eine Folge $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Kartenumgebungen von p mit $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n = \{p\}$ wählen. Da $q \in B^d_\epsilon(p)$ für jedes $\epsilon > 0$ ist, ist $q \in U_n$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ und somit $q \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n = \{p\}$, also $p = q$.
Sei also nun ein Punkt $p \in M$ gegeben und sei (U,φ), $\varphi = (x_1,\ldots,x_n)$, eine Karte um p. Wir bezeichnen mit $\|\cdot\|$ die euklidische Norm auf $\mathbb{R}^n$ und mit $B_\epsilon(x)$ bzw. $\overline{B}_\epsilon(x)$ den offenen bzw. abgeschlossenen euklidischen Ball vom Radius $\epsilon > 0$ im $\mathbb{R}^n$ um $x \in \mathbb{R}^n$ herum.
Sei nun o.B.d.A. $\varphi(p) = 0$. Dann existiert ein $\delta > 0$ mit $\overline{B}_\delta(0) \subseteq \varphi(U)$ und $K := \varphi^{-1}(\overline{B}_\delta(0)) \subseteq U$. $K \subseteq M$ ist dann kompakt und auch

$$L := \left\{ \sum_{i=1}^n a_i \partial_i(q) \,\middle|\, q \in K,\ (a_1,\ldots,a_n) \in \mathbb{R}^n,\ \|(a_1,\ldots,a_n)\| = 1 \right\} \subseteq TM$$

ist kompakt (es ist $L = d\varphi^{-1}(\overline{B}_\delta(0) \times S^{n-1})$) und daher hat die stetige Funktion $L \ni v \mapsto \|v\|_{\pi(v)}$ auf L ein Maximum R und ein Minumum $r > 0$. Sei nun $v \in TK$ beliebig mit $v \neq 0_p$, $p := \pi(v)$. Schreiben wir $v = \sum_{i=1}^n v_i \partial_i(p)$ mit $(v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, so gelten daher folgende Ungeichungen:

$$\begin{aligned} R^2 \|(v_1, \ldots, v_n)\|^2 &\geq g_p\left(\tfrac{v}{\|(v_1,\ldots,v_n)\|}, \tfrac{v}{\|(v_1,\ldots,v_n)\|}\right) \cdot \|(v_1, \ldots, v_n)\|^2 \\ &= g_p(v, v) = \|v\|_p^2 = g_p(v, v) \\ &= g_p\left(\tfrac{v}{\|(v_1,\ldots,v_n)\|}, \tfrac{v}{\|(v_1,\ldots,v_n)\|}\right) \cdot \|(v_1, \ldots, v_n)\|^2 \\ &\geq r^2 \|(v_1, \ldots, v_n)\|^2 . \end{aligned}$$

Offensichtlich gilt dann auch $R^2 \|(v_1, \ldots, v_n)\|^2 \geq g_p(v, v) \geq r^2 \|(v_1, \ldots, v_n)\|^2$ für alle $v \in TK$.
Sei nun $q \in M \setminus U$ gegeben. Weiter sei $c : [a, b] \to M$ eine stückweise differenzierbare Kurve mit $c(a) = p$ und $c(b) = q$. Dann gibt es ein minimales $t_0 \in (a, b)$ mit $c(t_0) \in \partial K$ (Rand von K), d.h. mit $\|\varphi(c(t_0))\| = \delta$, und es folgt

$$L(c) \geq L(c|_{[a,t_0]}) = \int_a^{t_0} \|\dot c(t)\|_{c(t)}\, dt \geq r \int_a^{t_0} \|(\dot c_1(t), \ldots, \dot c_n(t))\|\, dt = rL(\varphi \circ c|_{[a,t_0]}),$$

wobei $L(\varphi\circ c|_{[a,t_0]})$ die euklidische Länge von $c|_{[a,t_0]}$ ist. Da diese euklidische Länge durch das Geradenstück zwischen den Endpunkten miminimiert wird (Übung!), folgt $L(c) \geq rL(\varphi \circ c) \geq r\delta$, also durch Infimumsbildung $d(p, q) \geq r\delta$. Dies zeigt, dass $B^d_{r\delta}(p) \subseteq U$ gilt und, wie oben bemerkt, auch, dass d wirklich eine Metrik auf M ist.
Sei nun $q \in K \subseteq U$. Wir betrachten dann die differenzierbare Kurve $c : [0, 1] \to M$, $c(t) := \varphi^{-1}(t\varphi(q))$. Es gilt $\dot c(t) = d(\varphi^{-1})_{t\varphi(q)}(\varphi(q))$, damit

$$(\dot c_1(t), \ldots, \dot c_n(t)) = d\varphi_{c(t)}(\dot c(t)) = \varphi(q)$$

für alle $t \in [0, 1]$ und somit

$$d(p, q) \leq L(c) = \int_0^1 \|\dot c(t)\|_{c(t)}\, dt \leq R \int_0^1 \|\varphi(q)\|\, dt = R \|\varphi(q)\| .$$

Sei nun ein $\epsilon > 0$ gegeben und sei $\epsilon' := \min\{\delta, \frac{\epsilon}{R}\}$ sowie $q \in \varphi^{-1}(B_{\epsilon'}(0))$. Dann ist $q \in K$ und somit folgt

$$d(p, q) \leq R \|\varphi(q)\| < R\tfrac{\epsilon}{R} = \epsilon,$$

also $q \in B^d_\epsilon(p)$ und somit ist die offene Umgebung $\varphi^{-1}(B_{\epsilon'}(0))$ von p in $B^d_\epsilon(p)$ enthalten. Dies zeigt, dass die von d induzierte Topologie mit der Topologie von M übereinstimmt. □

Als nächstes zeigen wir, dass Geodätische lokal die Länge minimieren. Dazu benötigen wir die folgenden beiden Lemmata:

Lemma 2.42. *Es sei (M, g) eine riemannsche Mannigfaltigkeit und $f : (a, b) \times (c, d) \to M$, $(a, b) \times (c, d) \ni (t, s) \mapsto f(t, s) \in M$ eine differenzierbare Abbildung. Dann gilt*

$$\frac{\nabla}{ds}\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\nabla}{dt}\frac{\partial f}{\partial s}.$$

Bemerkung. In Lemma 2.42 ist $\frac{\partial f}{\partial t}(t,s)$ für $(t,s) \in (a,b) \times (c,d)$ dadurch definiert, dass wir $s \in (c,d)$ fixieren und dann für die differenzierbare Kurve $f_s : (a,b) \to M$, $f_s(t) := f(t,s)$ gerade $\frac{\partial f}{\partial t}(t,s) := \dot{f}_s(t)$ setzen. Dies ist dann für fixes $t \in (a,b)$ ein Vektorfeld entlang der differenzierbaren Kurve $(c,d) \ni s \mapsto f_t(s) := f(t,s) \in M$, welches wir dann entlang dieser Kurve kovariant ableiten können. Entsprechend ist die rechte Seite der zu zeigenden Gleichung in Lemma 2.42 definiert.

Beweis von Lemma 2.42. Es sei (U,φ), $\varphi = (x_1,\dots,x_n)$, eine Karte um einen Punkt in $\mathrm{Bild}(f)$. Setzen wir $f_i := x_i \circ f : (a,b) \times (c,d) \to \mathbb{R}$, so gilt also

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t,s) = \dot{f}_s(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial t}(t,s) \cdot \partial_i(f(t,s))$$

für alle $(t,s) \in f^{-1}(U)$. Entsprechend gilt (' bezeichne die Ableitung nach s)

$$\frac{\partial f}{\partial s}(t,s) = f_t'(s) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial s}(t,s) \cdot \partial_i(f(t,s))$$

und somit

$$\frac{\nabla}{ds}\frac{\partial f}{\partial t} = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial s}(t,s)\ \frac{\partial f_i}{\partial t}(t,s)\ \Gamma_{ij}^k(f(t,s)) + \frac{\partial^2 f_k}{\partial s\,\partial t}(t,s) \right) \frac{\partial}{\partial x_k}(f(t,s))$$

für alle $(t,s) \in f^{-1}(U)$ nach Gleichung (2.1). Da dies symmetrisch in den Ableitungen nach t und s ist, folgt die behauptete Gleichheit. $\square$

Das nächste Lemma ist das sogenannte *Gauß-Lemma*, welches besagt, dass das Differential $d(\exp_p)_v : T_pM \to T_{\exp_p(v)}M$ in einem Punkt $v \in T_pM$ die Länge von v und das orthogonale Komplement von v in T_pM erhält. Dies können wir auch kürzer wie folgt formulieren:

Lemma 2.43 (Gauß-Lemma)**.** *Es sei (M,g) eine riemannsche Mannigfaltigkeit sowie $p \in M$ und $v \in \mathcal{D}_p \subseteq T_pM$ gegeben. Dann gilt*

$$g_{\exp_p(v)}(d(\exp_p)_v(v), d(\exp_p)_v(w)) = g_p(v,w)$$

für jedes $w \in T_vT_pM = T_pM$.

Beweis. Sei zunächst $w = \lambda v$ für ein $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$d(\exp_p)_v(w) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \exp_p(v+tw) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \exp_p((1+\lambda t)v) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} c_v(1+\lambda t) = \lambda \dot{c}_v(1)$$

nach Bemerkung 2.36 (iii) und entsprechend $d(\exp_p)_v(v) = \dot{c}_v(1)$. Daher ist

$$\begin{aligned} g_{\exp_p(v)}(d(\exp_p)_v(v), d(\exp_p)_v(w)) &= g_{c_v(1)}(\dot{c}_v(1), \lambda\dot{c}_v(1)) = g_{c(0)}(\dot{c}_v(0), \lambda\dot{c}_v(0)) \\ &= g_p(v,w) \end{aligned}$$

nach Bemerkung 2.32 (i).
Da die zu zeigende Gleichung linear in w ist, können wir nun annehmen, dass w senkrecht auf v bezüglich g_p steht und können dann sogar annehmen, dass $\|w|_p = \|v|_p$ ist. Wir müssen zeigen, dass dann $g_{\exp_p(v)}(d(\exp_p)_v(v), d(\exp_p)_v(w)) = 0$ gilt. Dazu setzen wir $\gamma : \mathbb{R} \to T_pM$, $\gamma(s) := \cos(s)v + \sin(s)w$. Dann gilt $\gamma(0) = v$, $\gamma'(0) = w$ und $\|\gamma(s)\| = \|v\|$ für alle $s \in \mathbb{R}$. Da $v \in \mathcal{D}_p$ ist, $\mathcal{D}_p$ offen und sternförmig bezüglich 0 ist und die Abbildung $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \ni (t, s) \mapsto t\gamma(s)$ stetig ist, gibt es $\epsilon, \delta > 0$ mit $t\gamma(s) \in \mathcal{D}_p$ für alle $(t, s) \in (-\delta, 1 + \delta) \times (-\epsilon, \epsilon)$. Betrachte nun die differenzierbare Abbildung

$$f : (-\delta, 1 + \delta) \times (-\epsilon, \epsilon) \to M, \quad f(t, s) := \exp_p(t\gamma(s)).$$

Es ist $\frac{\partial f}{\partial t}(1, 0) = d(\exp_p)_v(v)$ und $\frac{\partial f}{\partial s}(1, 0) = d(\exp_p)_v(\gamma'(0)) = d(\exp_p)_v(w)$. Wir müssen also zeigen, dass

$$g\left(\frac{\partial f}{\partial t}(1, 0), \frac{\partial f}{\partial s}(1, 0)\right) = 0$$

gilt. Wir zeigen zunächst, dass

$$(-\delta, 1 + \delta) \ni t \mapsto g\left(\frac{\partial f}{\partial t}(t, 0), \frac{\partial f}{\partial s}(t, 0)\right) \in \mathbb{R}$$

konstant ist, indem wir diese differenzierbare Funktion nach t ableiten. Aufgrund der Metrizität der kovarianten Ableitung entlang von Kurven, siehe Bemerkung 2.23, folgt

$$\frac{\partial}{\partial t} g\left(\frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial s}\right)(t, 0) = g\left(\frac{\nabla}{dt}\frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial s}\right)(t, 0) + g\left(\frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\nabla}{dt}\frac{\partial f}{\partial s}\right)(t, 0)$$

Nun ist $(-\delta, 1 + \delta) \ni t \mapsto f(t, 0) = \exp_p(tv) = c_v(t)$ eine Geodätische und daher ist $g\left(\frac{\nabla}{dt}\frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial s}\right)(t, 0) = 0$. Den zweiten Term können wir wie folgt mittels Lemma 2.42 und der Metrizität der kovarianten Ableitung entlang differenzierbarer Kurven umschreiben:

$$g\left(\frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\nabla}{dt}\frac{\partial f}{\partial s}\right)(t, 0) = g\left(\frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\nabla}{ds}\frac{\partial f}{\partial t}\right)(t, 0) = \frac{1}{2}\ \frac{\partial f}{\partial s} g(\frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial t})(t, 0).$$

Da für jedes $s \in (-\epsilon, \epsilon)$ die Kurve $(-\delta, 1 + \delta) \ni t \mapsto f(t, s) = \exp_p(t\gamma(s)) = c_{\gamma(s)}(t)$ eine Geodätische ist, ist aber

$$\begin{aligned}(-\epsilon, \epsilon) \ni s \mapsto g(\tfrac{\partial f}{\partial t}(t, s), \tfrac{\partial f}{\partial t}(t, s)) &= g(\dot c_{\gamma(s)}(t), \dot c_{\gamma(s)}(t)) = g(\dot c_{\gamma(s)}(0), \dot c_{\gamma(s)}(0)) \\ &= g(\gamma(s), \gamma(s)) = \|v\|_p\end{aligned}$$

konstant und somit $\frac{\partial f}{\partial s} g(\frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial t})(t, 0) = 0$, also insgesamt

$$\frac{\partial}{\partial t} g\left(\frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial s}\right)(t, 0) = 0.$$

Daher ist

$$(-\delta, 1 + \delta) \ni t \mapsto g\left(\frac{\partial f}{\partial t}(t, 0), \frac{\partial f}{\partial s}(t, 0)\right) \in \mathbb{R}$$

konstant. Da $\frac{\partial f}{\partial s}(0, 0) = \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} \exp_p(0) = \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} p = 0$ ist, gilt

$$g\left(\frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial s}\right)(1, 0) = g\left(\frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial s}\right)(0, 0) = 0.$$

Dies zeigt die Behauptung. $\square$

Bemerkung 2.44. $d(\exp_p)_v$ ist im Allgemeinen keine lineare Isometrie. Betrachte dazu beispielsweise (S^n, g_{st}) und $p = N$ sowie $v = e_1$. Dann gilt

$$\exp_N(e_1 + te_2) = c_{N,e_1+te_2}(1) = \cos\left(\sqrt{1+t^2}\right)\, N + \sin\left(\sqrt{1+t^2}\right)\, \frac{e_1 + te_2}{\sqrt{1+t^2}}$$

nach Beispiel 2.38 (ii). Dies impliziert

$$d(\exp_N)_{e_1}(e_2) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \exp_N(e_1 + te_2) = \sin(1)\, e_2$$

und somit

$$g_N(d(\exp_N)_{e_1}(e_2), d(\exp_N)_{e_1}(e_2)) = \sin^2(1) \neq 1 = g_N(e_2, e_2).$$

Um die Aussage, dass Geodätische lokal die Länge minimieren, exakt zu formulieren, führen wir folgende Begriffe ein:

Definition 2.45. Es sei (M, g) eine riemannsche Mannigfaltigkeit und $p \in M$ gegeben sowie $V \subseteq T_pM$ eine offene Umgebung von 0 in T_pM, auf der $\exp_p$ ein Diffeomorphismus aufs Bild $\exp_p(V)$ ist. Wir nennen dann $\exp_p(V)$ eine *normale* Umgebung von p. Ist $\epsilon > 0$ so klein, dass $B_\epsilon^{g_p}(0) := \left\{v \in T_pM \mid \|v\|_p < \epsilon\right\}$ in V enthalten ist, so nennen wir $\exp_p(B_\epsilon^{g_p}(0))$ einen *geodätischen Ball (um p)*.

Bemerkung. Das Gauß-Lemma besagt also insbesondere, dass die Geodätische $t \mapsto \exp_p(tv)$ für $p \in M$ und $v \in T_pM$ die Ränder aller geodätischen Bälle um p senkrecht schneidet.

Damit können wir nun zeigen, dass eine Geodätische lokal wie folgt die Länge minimiert:

Satz 2.46. *Es sei (M, g) eine zusammmenhängende riemannsche Mannigfaltigkeit und sei $B := \exp_p(B_\epsilon^{g_p}(0)) \subseteq U$ für ein $\epsilon > 0$ ein geodätischer Ball um p sowie $q \in B$. Dann gilt für die Geodätische $\gamma : [0,1] \to M$, $\gamma(t) := \exp_p(tv)$ mit $v \in B_\epsilon^{g_p}(0)$ eindeutig definiert über $\exp_p(v) = q$, dass $\gamma(0) = p$ und $\gamma(1) = q$ ist und dass für jede andere stückweise differenzierbare Kurve $c : [a,b] \to M$ mit $c(a) = p$, $c(b) = q$ gerade $L(\gamma) \geq L(c)$ gilt, was äquivalent zu $d(p,q) = L(c)$ ist. Weiter ist $L(c) = L(\gamma)$ genau dann, wenn c eine Umparametrisierung von γ ist.*

Bemerkung.
- Eine Umparametrisierung einer stückweise differenzierbaren Kurve $c_1 : [a_1, b_1] \to M$ ist hierbei etwas allgemeiner als üblich eine stückweise differenzierbare Kurve $c_2 : [a_2, b_2] \to M$, so dass eine monotone, stetige, auf (a_1, b_1) stückweise differenzierbare, surjektive Funktion $\alpha : [a_1, b_1] \to [a_2, b_2]$ mit $c_2 = c_1 \circ \alpha$ existiert. Man bemerke, dass dies keine Äquivalenzrelation mehr auf der Menge aller stückweise differenzierbaren Kurven ist, denn die Relation nicht mehr symmetrisch, da α beispielsweise auf einen Intervall konstant sein kann.
- Jede Geodätische die in p losgeht, ist bis auf lineare Umparametrisierungen lokal von der Form $\gamma(t) = \exp_p(tv)$ für ein $v \in B_\epsilon^{g_p}(0)$. In der Hinsicht minimiert also jede Geodätische lokal die Länge.

Beweis von Satz 2.46. Zunächst ist wegen $\|\dot\gamma(t)\|_{\gamma(t)} = \|\dot\gamma(0)\|_{\gamma(0)} = \|v\|_p$ die Länge $L(\gamma)$ von γ durch

$$L(\gamma) = \int_0^1 \|\dot\gamma(t)\|_{\gamma(t)}\, dt = \int_0^1 \|v\|_p\, dt = \|v\|_p$$

gegeben.
Sei nun zunächst $c : [a,b] \to M$ eine stückweise differenzierbare Kurve mit $c(a) = p$, $c(b) = q$ und $c([a,b]) \subseteq B$. Wir können o.B.d.A. annehmen, dass $c(t) = p$ nur für $t = a$ gilt (ansonsten setze $t_0 := \sup\{t \in [a,b] | \, c(t) = a\} = \max\{t \in [a,b] | \, c(t) = a\}$ und betrachte die Kurve $c|_{[t_0,b]}$, deren Länge kleiner oder gleich der von c ist). Dann können wir

$$c(t) = \exp_p(r(t)v(t))$$

für jedes $t \in (a,b]$ mit den stückweise differenzierbaren Funktionen $r : (a,b] \to (0,\infty)$, $r(t) := \left\|\exp_p^{-1}(c(t))\right\|_p$, und $v : (a,b] \to T_pM$, $v(t) = \frac{\exp_p^{-1}(c(t))}{r(t)}$ für $t \in (a,b]$ schreiben. Wir bemerken, dass $\|v(t)\|_p = 1$ ist für alle $t \in (a,b]$ und dass sich r durch $r(a) := 0$ in a stetig fortsetzen lässt.
Dann folgt für alle $t \in (a,b]$ (außer an den endlich vielen Stellen, an denen c nicht differenzierbar ist) zunächst aus $g_p(v(t),v(t)) = 1$ gerade $g_p(v(t),\dot v(t)) = 0$, weiter $\dot c(t) = d(\exp_p)_{r(t)v(t)}(\dot r(t)v(t) + r(t)\dot v(t))$ und daher mit dem Gauß-Lemma (Lemma 2.43)

$$\begin{aligned}
\|\dot c(t)\|^2_{c(t)} &= \tfrac{\dot r^2(t)}{r^2(t)}\, g_{c(t)}(d(\exp_p)_{r(t)v(t)}(r(t)v(t)), d(\exp_p)_{r(t)v(t)}(r(t)v(t))) \\
&\quad + 2\,\dot r(t)\, g_{c(t)}(d(\exp_p)_{r(t)v(t)}(r(t)v(t)), d(\exp_p)_{r(t)v(t)}(\dot v(t))) \\
&\quad + \left\| d(\exp_p)_{r(t)v(t)}(r(t)\dot v(t))\right\|^2_{c(t)} \\
&\geq \tfrac{\dot r^2(t)}{r^2(t)}\, g_p(r(t)v(t), r(t)v(t)) + 2\,\dot r(t)\; g_p(r(t)v(t), \dot v(t)) = \dot r^2(t).
\end{aligned}$$

Daher gilt wie gewünscht

$$\begin{aligned}
L(c) = \int_a^b \|\dot c(t)\|\, dt &\geq \int_a^b |\dot r(t)| dt \geq \left|\int_a^b \dot r(t) dt\right| = |r(b) - r(a)| = |r(b)| = \left\|\exp_p^{-1}(c(b))\right\|_p \\
&= \left\|\exp_p^{-1}(q)\right\|_p = \|v\|_p = L(\gamma).
\end{aligned}$$

Ist nun $c : [a,b] \to M$ eine stückweise differenzierbare Kurve mit $c(a) = p$, $c(b) = q$ und $c([a,b]) \not\subseteq B$, so existiert ein $\delta > 0$ mit $\|v\|_p < \delta < \epsilon$ und dazu ein maximales $t_0 \in [a,b]$ mit $c([a,t_0]) \subseteq \exp_p(\overline{B}^{g_p}_\delta(0))$ ist. Es ist $\left\|\exp_p^{-1}(c(t_0))\right\|_p = \delta$ und nach dem gerade gezeigtem, angewandt auf den Punkt $c(t_0) \in B$, gilt

$$L(c) \geq L(c|_{[a,t_0]}) \geq \left\|\exp_p^{-1}(c(t_0))\right\|_p = \delta > \|v\|_p = L(\gamma).$$

Dies zeigt $L(c) \geq L(\gamma)$ für alle stückweise differenzierbaren Kurve mit $c(a) = p$ und $c(b) = q$, wobei Gleichheit nur für $c([a,b]) \subseteq B$ auftreten kann. An den obigen Rechnungen mit der obigen Notation sehen wir, dass dies nur dann auftreten kann, wenn $\dot v \equiv 0$

ist (da $\exp_p$ auf $B^{g_p}_\epsilon(0)$ ein Diffeomorphismus aufs Bild ist und somit das Differential überall auf $B^{g_p}_\epsilon(0)$ ein linearer Isomorphismus ist) und $\dot{r}$ konstantes Vorzeichen hat. Es ist also $c(t) = \exp_p(r(t)v_0)$ für ein $v_0 \in T_pM$ mit $\|v_0\|_p = 1$ und für eine monotone Funktion $r : (a, b] \to (0, \infty)$. Da $\exp_p(v) = q = c(b) = \exp_p(r(b)v_0)$ ist und exp auf $B^{g_p}_\epsilon(0)$ injektiv ist, ist also $v = r(b)v_0$ und damit

$$c(t) = \exp_p(r(t)v_0) = \exp_p\left(\tfrac{r(t)}{r(b)} r(b)v_0\right) = \exp_p\left(\tfrac{r(t)}{r(b)} v\right) = \gamma\left(\tfrac{r(t)}{r(b)}\right),$$

also c eine Umparametrisierung von γ. Umgekehrt rechnet man direkt nach, dass die Länge unter Umparametrisierungen erhalten bleibt. □

Aus Satz 2.46 folgt direkt, dass die Exponentialabbildung in einem Punkt $p \in M$ offene Bälle um 0_p in (T_pM, g_p) auf offene Bälle um p in (M, d) des gleichen Radius abbildet:

Korollar 2.47. *In der Situation von Satz 2.46 ist $d(p, \gamma(t)) = L(\gamma|_{[0,t]}) = \|tv\|_p$ für jedes $t \in [0, 1]$ und somit $\exp_p(B^{g_p}_{\epsilon'}(0)) = B^d_{\epsilon'}(p)$ für alle $0 < \epsilon' < \epsilon$.*

Bemerkung 2.48. (i) Global müssen Geodätische nicht mehr unbedingt die Länge minimieren. Man denke etwa daran, dass man zwei Punkte p, q mit $p \neq -q$ auf der Sphäre S^n durch zwei entgegengesetzt laufende Großkreisstücke (was nach Beispiel 2.33 (iii), wenn mit konstanter Geschwindigkeit durchlaufen, Geodätische auf (S^n, g_{st}) sind) des gleichen Großkreises verbinden kann und dass diese unter der Voraussetzung $p \neq -q$ unterschiedliche Längen haben. Allerdings minimiert hier trotzdem das Kürzere der beiden Großkreisstücke die Länge.

(ii) Im Gegensatz dazu kann es sein, dass es gar keine stückweise differenzierbare Kurve zwischen zwei Punkten p und q einer riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g) geben muss, das Infimum in der Definition von d ist also im Allgemeinen kein Minimum (der Satz von Hopf-Rinow weiter unten wird uns ein Kriterium geben, wann es doch überall ein Minimum ist)

Betrachte dazu beispielsweise die riemannschen Mannigfaltigkeit $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ und die Punkte $x, -x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Dann ist $d(x, -x) = 2\|x\|$ aber es gibt keine stückweise differenzierbare Kurve γ von x nach $-x$ in $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ (!!!), da eine solche (bis auf Umparametrisierung) durch das Geradenstück von x nach $-x$ gegeben sein müsste (Übung!).

Im Gegensatz zu Bemerkung 2.48 (ii) kann man jedoch zeigen, dass jede stückweise differenzierbare Kurve zwischen zwei Punkten, die die Länge minimiert (bis auf Umparametrisierung) eine Geodätische ist. Dies ist der Inhalt von Satz 2.51 weiter unter, für dessen Beweis wir die folgenden beiden Lemmata benötigen.

Lemma 2.49. *Es sei $F : \mathcal{D} \to M \times M$, $F(v) := (\pi(v), \exp(v))$. Dann ist für jedes $p \in M$ das Differential $dF_{0_p} : T_{0_p}M \to T_{(p,p)}(M \times M) \cong T_pM \times T_pM$ in 0_p ein linearer Isomorphismus, also F ein lokaler Diffeomorphismus in 0_p.*

Beweis. Es sei $p \in M$. Da sowohl TM als auch $M \times M$ die Dimension $2\dim(M)$ haben, genügt es die Surjektivität von $dF_{0_p} : T_{0_p}M \to T_pM \times T_pM$ zu zeigen. Sei dazu $(v, w) \in T_pM \times T_pM$ gegeben. Dann gilt für die Kurve $c_1 : (-\epsilon_1, \epsilon_1) \to TM$, $c_1(t) := t \cdot (w - v)$, $\epsilon_1 > 0$ klein genug, gerade

$$dF_{0_p}(\dot{c}_1(0)) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} F(c_1(t)) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (p, \exp_p(t(w-v))) = (0, w - v)$$

und für die Kurve $c_2 : (-\epsilon_2, \epsilon_2) \to TM$, $c_2(t) := 0_{\exp_p(tv)}$, $\epsilon_2 > 0$ klein genug, gerade

$$dF_{0_p}(\dot{c}_2(0)) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} F(c_2(t)) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (\exp_p(tv), \exp_p(tv)) = (v, v),$$

also

$$dF_{0_p}(\dot{c}_1(0) + \dot{c}_2(0)) = dF_{0_p}(\dot{c}_1(0)) + dF_{0_p}(\dot{c}_2(0)) = (0, w - v) + (v, v) = (v, w).$$

Dies zeigt die Surjektivität $dF_{0_p} : T_{0_p}M \to T_pM \times T_pM$ und damit die Behauptung. $\square$

Lemma 2.50. *Es sei (M, g) eine riemannsche Mannigfaltigkeit und $p \in M$. Dann existiert eine offene Umgebung U von p in M und ein $\epsilon > 0$, so dass für alle $q \in U$ gilt:*

(i) $\exp_q$ *ist auf ganz $B^{g_q}_\epsilon(0) \subseteq T_qM$ definiert und dort ein Diffeomorphismus aufs Bild*

(ii) und $U \subseteq \exp_q(B^{g_q}_\epsilon(0)) = B^d_\epsilon(q)$.

Dies bedeutet, dass U für jeden Punkt $q \in U$ eine normale Umgebung von q ist.

Beweis. Wir betrachten die Abbildung $F : \mathcal{D} \to M \times M$, $F(v) := (\pi(v), \exp(v))$ aus Lemma 2.49. Nach diesem Lemma existiert eine offene Umgebung W von 0_p in TM auf der M ein Diffeomorphismus auf eine offene Umgebung $\tilde{U}$ von (p, p) in $M \times M$ ist Wir bemerken, dass wir annehmen können, dass $0_q \in W$ ist für jedes $q \in \pi(W)$:
Denn F ist ja auch in 0_q für $q \in W$ ein lokaler Diffeomorphismus und wir können die Vereinigung der offenen Umgebungen W_q von 0_q auf denen F ein lokaler Diffeomorphismus ist mit der offenen Menge $TW = \pi^{-1}(\pi(W))$ schneiden und erhalten so ein neues W mit der gewünschten Eigenschaft, wobei wir bemerken, dass F immer noch auf W injektiv ist, das $F(w_1) = F(w_2)$ für $w_1, w_2 \in W$ ja $\pi(w_1) = \pi(w_2)$ impliziert.
Es existiert nun eine offene Umgebung V von p in M und ein $\epsilon > 0$, so dass

$$W' := \Big\{ v \in TM \,\Big|\, \pi(v) \in V,\ \|v\|_{\pi(v)} < \epsilon \Big\}$$

in W enthalten ist:
Dazu wählen wir eine Karte $(\tilde{V}, \varphi)$ um p, $\varphi = (x_1, \ldots, x_n)$, sowie eine offene Umgebung V von p in M mit $\overline{V} \subseteq \tilde{V}$ und kompakten $\overline{V}$ und behaupten, dass es dann ein $\epsilon > 0$ gibt, so dass W' wie oben definiert in W enthalten ist:
Angenommen dies ist nicht der Fall. Dann gibt es eine Folge $(v_i)_{j \in \mathbb{N}}$ von Punkten in $TV \setminus W$ mit $\|v_i\|_{q_i} \to 0$ für $i \to \infty$, wobei $q_i := \pi(v_i)$ ist. Da $\overline{V}$ kompakt ist, können wir nach Übergang zu einer gleich bezeichneten Teilfolge annehmen, dass $\lim\limits_{i\to\infty} q_i = q$ für ein

$q \in \overline{V}$ ist. Mit ähnlichen Argumenten wie bestimmte Abschätzungen im Beweis von Satz 2.46 erzielt wurden, zeigt man, dass ein $C > 0$ existiert, so dass für alle $(w_1, \ldots, w_n) \in \mathbb{R}^n$ und alle $\tilde{q} \in \overline{V}$ gerade $\left\| \sum_{j=1}^n w_j \partial_j(q) \right\|_q \leq C \left\| \sum_{j=1}^n w_j \partial_i(\tilde{q}) \right\|_{\tilde{q}}$ gilt. Schreiben wir $v_i = \sum_{j=1}^i v_{i,j} \partial_j(q_i)$ mit eindeutig bestimmten $(v_{i,1}, \ldots, v_{i,n}) \in \mathbb{R}^n$ für jedes $i = 1, \ldots, n$, so folgt also $\lim_{i \to \infty} \left\| \sum_{j=1}^n v_{i,j} \partial_j(q) \right\|_q = 0$, also $\lim_{i \to \infty} v_{i,j} = 0$ für jedes $j = 1, \ldots, n$ und somit $\lim_{i \to \infty} v_i = 0_p$. Da $TM \setminus \mathcal{D}$ abgeschlossen ist, muss $0_q = \lim_{i \to \infty} v_i \in TM \setminus \mathcal{D}$ sein, ein Widerspruch, da wir oben gezeigt haben, dass wir $0_q \in W \in \mathcal{D}$, für $q \in \overline{V} \subseteq \pi(W)$ annehmen können.
Wir wählen nun eine offene Umgebung U von p in M, so dass $U \times U \subseteq F(W')$ gilt und behaupten, dass U und $\epsilon > 0$ die gewünschten Eigenschaften erfüllen:
Zunächst gilt $B_\epsilon^{g_q}(0) = W' \cap T_qM$ und somit ist $\exp_q$ auf $B_\epsilon^{g_q}(0)$ definiert und dort ein Diffeomorphismus, da $F : W' \to F(W')$ einer ist und somit $\exp_q^{-1}(\tilde{q}) = F^{-1}(q, \tilde{q})$ für $\tilde{q} \in \exp_q(B_\epsilon^{g_q}(0))$ ist. Also gilt (i).
Weiter ist auch (ii) erfüllt, da $\{q\} \times U \subseteq F(W' \cap T_qM) = \{q\} \times \exp_q(B_\epsilon^{g_q}(0))$ gilt. □

Satz 2.51. *Es sei (M, g) eine zusammenhängende riemannsche Mannigfaltigkeit, $p, q \in M$ sowie $c : [a, b] \to M$ eine stückweise differenzierbare Kurve mit $c(a) = p$ und $c(b) = q$* proportional zur Bogenlänge parametrisiert*, d.h. $[a, b] \ni t \mapsto \|\dot{c}(t)\| \in [0, \infty)$ ist konstant (an den Knickstellen von c stimmt $\|\dot{c}(t)\|_{c(t)}$ für die links- und rechtsseitige Ableitung von c überein). Gilt dann $L(c) = d(p, q)$, so ist c eine Geodätische.*

Beweis. Es sei $t \in [a, b]$ gegeben. Für $c(t) \in M$ seien eine Umgebung U und ein $\epsilon > 0$ wie in Lemma 2.50 gewählt. Dann existiert ein echtes abgeschlossenes Intervall $[\tilde{a}, \tilde{b}]$ mit $t \in [\tilde{a}, \tilde{b}] \subseteq [a, b]$ und $c([\tilde{a}, \tilde{b}]) \subseteq U$. Nun ist $c|_{[\tilde{a}, \tilde{b}]}$ eine stückweise differenzierbare Kurve mit $L(c|_{[\tilde{a}, \tilde{b}]}) = d(\tilde{a}, \tilde{b})$, denn sonst gäbe es eine kürzere stückweise differenzierbare Kurve γ zwischen $c(\tilde{a})$ und $c(\tilde{b})$ und man würde durch Ersetzen des Abschnittes $c|_{[\tilde{a}, \tilde{b}]}$ durch γ in c eine kürzere stückweise differenzierbare Kurve zwischen $c(a)$ und $c(b)$ erhalten. Nach Satz 2.46 ist daher $c|_{[\tilde{a}, \tilde{b}]}$ eine Umparametrisierung einer Geodätischen zwischen $c(\tilde{a})$ und $c(\tilde{b})$. Da aber $c|_{[\tilde{a}, \tilde{b}]}$ proportional zur Bogenlänge parametrisiert ist, muss $c|_{[\tilde{a}, \tilde{b}]}$ selbst schon Geodätische sein. Da dies für jedes $t \in [a, b]$ gilt, ist c eine Geodätische. □

Zum Abschluss dieses Abschnittes zeigen wir den Satz von Hopf-Rinow, welcher eine Charakterisierung der riemannschen Mannigfaltigkeiten gibt, die *geodätisch vollständig* sind:

Definition 2.52. Eine riemannsche Mannigfaltigkeit (M, g) heißt *geodätisch vollständig*, falls $\mathcal{D} = TM$ ist, also falls exp auf ganz TM definiert ist. Dies ist wegen Bemerkung 2.36 (iii) äquivalent dazu, dass jede Geodätische von (M, g) auf ganz $\mathbb{R}$ erweiterbar ist.

Der Satz von Hopf-Rinow lautet nun

Satz 2.53 (Hopf-Rinow)**.** *Es sei (M, g) eine zusammenhängende riemannsche Mannigfaltigkeit. Dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent:*

(i) (M, g) *ist geodätisch vollständig.*

(ii) *Es gibt ein* $p \in M$ *mit* $\mathcal{D}_p = T_pM$*, d.h. so, dass* $\exp_p$ *auf ganz* T_pM *definiert ist.*

(ii) *Jede beschränkte und abgeschlossene Teilmenge von* (M, g) *ist kompakt.*

(iv) *Der metrische Raum* (M, d) *ist* vollständig*, d.h. jede Cauchy-Folge in* (M, d) *konvergiert.*

Jede der Bedingungen (i) – (iv) impliziert, dass es zu je zwei Punkten $p_1, p_2 \in M$ *eine Geodätische* $c : [a, b] \to M$ *mit* $c(a) = p_1$*,* $c(b) = p_2$ *und* $d(p_1, p_2) = L(c)$ *gibt.*

Bemerkung 2.54. Es gibt zusammenhängende riemannsche Mannigfaltigkeiten, für die es zwischen je zwei Punkten eine längenminimierende Geodätische gibt, die aber selbst nicht geodätisch vollständig sind, beispielsweise der offene Einheitsball in $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n,0}$.

Beweis von Satz 2.53. Bevor wir durch einen Ringschluss die Äquivalenz von (i) – (iv) beweisen, zeigen wir, dass aus (i) die Existenz einer Geodätischen $c : [a, b] \to M$ mit $c(a) = p_1$, $c(b) = p_2$ und $d(p_1, p_2) = L(c)$ folgt:
Sei dazu $r := d(p_1, p_2)$ und sei $B^d_\delta(p_1)$ ein geodätischer Ball um $p_1 \in M$, $\delta > 0$, sowie $S_\delta(p_1)$ der Rand von $B^d_\delta(p_1)$. Man bemerke, dass $S_\delta(p_1) = \{q \in M | d(p_1, q) = \delta\} = \exp_{p_1}(\overline{B}^{g_{p_1}}_\delta)(0))$ gilt und diese Menge daher kompakt ist (formal genau muss man eventuell erst δ etwas verkleinern, da der Rand nicht mehr unbedingt in $\mathcal{D}_{p_1}$ liegt).
Die stetige Funktion $q \mapsto d(p_2, q)$ nimmt auf der kompakten Menge $S_\delta(p_1)$ ein Minimum in einem Punkt $p_0 \in S_\delta(p_1)$ an und es ist dann $p_0 = \exp_{p_1}(\delta v)$ für ein $v \in T_{p_1}M$ mit $\|v\|_{p_1} = 1$. Wir betrachten die Geodätische $c : \mathbb{R} \to M$, $c(t) := \exp_{p_1}(tv)$ und zeigen, dass $c(r) = p_2$ ist. Dies zeigt die Behauptung, da $L(c) = \int_0^r \|\dot c(t)\|_{c(t)}\, dt = \int_0^r \|\dot c(0)\|_{c(0)}\, dt = \int_0^r \|v\|_p\, dt = \int_0^r 1\, dt = r = d(p_1, p_2)$ folgt, wobei die zweite Gleichheit gilt, da c eine Geodätische ist.
Dazu betrachten wir die Menge

$$I := \{s \in [0, r] \,|\, d(c(s), p_2) = r - s\}\,.$$

Dann ist I nicht-leer, da $0 \in I$ ist und offensichtlich abgeschlossen. Wir zeigen, dass $\sup I = r$ ist, was dann aufgrund der Abgeschlossenheit von A impliziert, dass $r \in I$ ist und somit, dass dann $d(c(r), p_2) = 0$, also $c(r) = p_2$ ist. Sei dazu $s_0 \in I$ mit $s_0 < r$ gegeben und es sei $B^d_{\delta'}(c(s_0))$ ein geodätischer Ball um $c(s_0) \in M$ mit $0 < \delta' < r - s_0$ sowie $S_{\delta'}(c(s_0))$ der Rand von $B^d_{\delta'}(c(s_0))$. Dann nimmt die stetige Funktion $\tilde p \mapsto d(\tilde p, p_2)$ auf der kompakten Menge $S_{\delta'}(c(s_0))$ ein Minimum in einem Punkt $p'_0 \in S_{\delta'}(c(s_0))$ an. Weiter ist $d(c(s_0), p_2) = \delta' + d(p'_0, p_2)$:
Ist $\gamma : [a, b] \to$ eine stückweise differenzierbare Kurve mit $\gamma(a) = c(s_0)$ und $\gamma(b) = p_2$, so gibt es ein $t_0 \in [a, b]$ mit $\gamma(t_0) \in S_{\delta'}(c(s_0))$ und es folgt $L(\gamma) = L(\gamma|_{[a,t_0]}) + L(\gamma|_{[t_0,b]}) \geq \delta' + d(p'_0, p_2)$, also durch Infimumsbildung $d(c(s_0), p_2) \geq \delta' + d(p'_0, p_2)$. Da aufgrund der Dreiecksungleichung die umgekehrte Ungleichung $d(c(s_0), p_2) \leq d(c(s_0), p'_0) + d(p'_0, p_2) = \delta' + d(p'_0, p_2)$ gilt, ist also $d(c(s_0), p_2) = \delta' + d(p'_0, p_2)$ wie behauptet.

Da $s_0 \in I$ ist, folgt daher

$$r - s_0 = d(c(s_0), p_2) = \delta' + d(p_0', p_2),$$

also $d(p_0', p_2) = r - (s_0 + \delta')$ und somit $r = d(p_1, p_2) \leq d(p_1, p_0') + d(p_0', p_2) = d(p_1, p_0') + r - (s_0 + \delta')$, d.h. $d(p_1, p_0') \geq s_0 + \delta'$. Nun hat die stückweise differenzierbare Kurve $\tilde{c}$, die entlang von c von $p_1 = c(a)$ nach $c(s_0)$ läuft und dann mit der gleichen Geschwindigkeit entlang der eindeutigen minimierenden Geodätischen von $c(s_0)$ nach p_0' läuft, gerade Länge $s_0 + \delta'$, was $d(p_1, p_0') = s_0 + \delta'$ zeigt und nach Satz 2.51 impliziert, dass γ eine Geodätische ist, und somit gleich c sein muss. Es ist also $c(s_0 + \delta') = p_0'$, also $d(c(s_0 + \delta'), p_2) = d(p_0', p_2) = r - (s_0 + \delta')$, was bedeutet, dass $s_0 + \delta' \in I$ ist. Wie oben erläutert, folgt daraus zunächst $r \in I$, damit $c(r) = p_2$ und schließlich $L(c) = r = d(p_1, p_2)$.
Wir bemerken, dass wir im Beweis gerade nur benutzt haben, dass $\exp_{p_1}$ auf ganz $T_{p_1}M$ definiert ist. Daher folgt aus der Gültigkeit von (ii) für jedes $q \in M$ die Existenz einer Geodätischen c die p und q verbindet und $L(c) = d(p, q)$ erfüllt. Die Äquivalenz von (i) – (iv) ergibt sich nun wie folgt:
„$(i) \to (ii)$“: Klar.
„$(ii) \to (iii)$“: Es sei A eine abgeschlossene und beschränkte Teilmenge von M. Es gibt also ein $R > 0$ mit $A \subseteq B_R^d(p)$ und daher gibt es wegen dem oben gezeigten zu jedem $q \in A$ eine Geodätische der Länge $\leq R$ von p nach q. Es ist also $A \subseteq \exp_p(\overline{B}_R^{g_p}(0))$. Als Bild einer kompakten Menge unter der stetigen Abbildung $\exp_p$ ist $\exp_p(\overline{B}_R^{g_p}(0))$ kompakt und daher A als abgeschlossene Teilmenge der kompakten Menge $\exp_p(\overline{B}_R^{g_p}(0))$ selbst kompakt (siehe Abschnitt 1.1).
„$(iii) \to (iv)$“: Es sei $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in (M, d). Dann ist $\overline{\{p_1, p_2, \ldots\}}$ abgeschlossen und beschränkt und daher kompakt. Also besitzt $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge. Da $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist, konvergiert dann aber auch die eigentliche Folge $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
„$(iv) \to (i)$“: Wir nehmen an, dass (M, g) nicht geodätisch vollständig wäre. Dann gibt es also eine Geodätische $c : (a, b) \to M$ mit $-\infty \leq a < 0 < b \leq \infty$ und o.B.d.A. $b < \infty$, so dass sich c nicht über b hinaus als Geodätische fortsetzen lässt. Wir können annehmen, dass c nach Bogenlänge parametrisiert ist, so dass $L(c|_{[t,s]}) = s - t$ für alle $t, s \in (a, b)$ mit $t < s$ gilt. Sei nun $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in (a, b) die gegen b konvergiert. Dann gilt also $d(c(t_i), c(t_j)) \leq |t_i - t_j|$ für alle $i, j \in \mathbb{N}$ und somit ist $(c(t_n))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in (M, d) und konvergiert daher nach Annahme gegen einen Punkt $p_0 \in M$. Es sei nun U eine offene Umgebung von p_0 wie in Lemma 2.50, d.h. es existiere ein $\epsilon > 0$, so dass für jedes $q \in U$ die Abbildung $\exp_q$ auf $B_\epsilon^{g_q}(0)$ ein Diffeomorphismus aufs Bild ist und $\exp_q(B_\epsilon^{g_q}(0)) \subseteq U$ ist. Es gibt nun ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $b - t_n < \epsilon$ und $c(t_n), c(t_m) \in U$ ist für alle $n, m \geq N$. Wählen nun beliebige $n, m \geq N$ mit $c(t_n) \neq c(t_m)$ und $t_n < t_m$. Dann gibt es nach Satz 2.46 eine bis auf Translationen eindeutige, nach Bogenlänge parametrisierte Geodätische $\tilde{c}$ von $c(t_n)$ nach $c(t_m)$ der Länge $L(\tilde{c}) < \epsilon$. Es muss daher $c(t) = \tilde{c}(t - t_n)$ für alle $t \in [t_n, t_m]$ gelten. Da $\tilde{c}$ zumindest auf $[0, \epsilon]$ definiert ist (denn $\tilde{c}(t) = \exp_{c(t_n)}(t\dot{c}(t_n))$ ist wegen $t\dot{c}(t_n) \in B_\epsilon^{g_{c(t_n)}}(0)$ für $t \in [0, \epsilon]$ für alle diese t definiert) und $b - t_n < \epsilon$ gilt, können wir c durch $c(t) := \tilde{c}(t - t_n)$ für alle $t \in [t_n, t_n + \epsilon]$ über b hinaus als Geodätische fortsetzen, ein Widerspruch. Also ist (M, g) geodätisch vollständig. $\square$

Da abgeschlossene Teilmengen von kompakten Mengen selbst kompakt sind (siehe Abschnitt 1.1), folgt unter Anwendung des Satzes von Hopf-Rinow (Satz 2.53) auf jede Zusammenhangskomponente von M:

Korollar 2.55. *Jede kompakte riemannsche Mannigfaltigkeit ist geodätisch vollständig.*

Bemerkung. Genauso wie im riemannschen Fall definiert man im pseudo-riemannschen Fall „geodätische Vollständigkeit“. Natürlich können wir in diesem Fall keine äquivalente Charakterisierung als Vollständigkeit eines metrischen Raumes (M, d) erwarten, da wir (M, d) nicht mehr definieren können.
Tatsächlich ist die Situation noch „schlimmer“ und auch Korollar 2.55 gilt nicht mehr, d.h. es gibt kompakte pseudo-riemannsche Mannigfaltigkeiten, die nicht geodätisch vollständig sind. Beispielsweise trägt schon T^2 eine Lorentz-Metrik, die geodätisch nicht vollständig ist („Clifton-Pohl-Torus“), siehe beispielsweise [ON]. Die Charakterisierung der kompakten, geodätisch vollständigen, pseudo-riemannschen Mannigfaltigkeiten ist tatsächlich immer noch ein aktives Forschungsgebiet.

2.6 Krümmungsgrößen

Wir beginnen mit der grundlegenden Definition dieses Abschnittes:

Definition 2.56. Es sei ∇ ein Zusammenhang auf einer Mannigfaltigkeit M. Dann ist der *(riemannsche) Krümmungstensor* $R = R^\nabla$ *von* ∇ definiert als die $\mathbb{R}$-trilineare Abbildung

$$\Gamma(TM)^3 \in (X, Y, Z) \mapsto R^\nabla(X, Y)Z := \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z \in \Gamma(TM).$$

Ist g eine pseudo-riemannsche Metrik auf M und $\nabla = \nabla^g$, so schreiben wir auch R^g statt R^∇ und nennen R^g den *(riemannschen) Krümmungstensor von* g bzw. *von* (M, g)

Bemerkung. Nach Lemma 2.57 ist R ein $(3, 1)$-Tensorfeld und somit ist die Abbildung $T_pM \in w \ni R(u, v)w \in T_pM$ für fixes $p \in M$ und fixe $u, v \in T_pM$ ein Endomorphismus von T_pM, ein sogenannter *(riemannsche) Krümmungsendomorphismus.* Dies erkärt auch die Schreibweise $R(X, Y)Z$ bzw. $R(u, v)w$ statt $R(X, Y, Z)$ bzw. $R(u, v, w)$ für $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$, $u, v, w \in T_pM$, da so die Endomorphismuseigenschaft im letzten Argument von R bei fixierten ersten beiden Argumenten deutlicher wird.

R^∇ ist tatsächlich ein Tensor(-feld):

Lemma 2.57. *Für jeden Zusammenhang* ∇ *auf einer Mannigfaltigkeit* M *ist* R^∇ *ein* $(3, 1)$-*Tensorfeld, welches antiymmetrisch in den ersten beiden Argumenten ist.*

Beweis. Die Antisymmetrie in den ersten beiden Argumenten folgt direkt aus der Definition. Wir müssen also nur noch zeigen, dass R^∇ in jedem Argument $C^\infty(M)$-linear ist, wobei wir uns aufgrund der Antisymmetrie auf das erste und dritte Argument beschränken können.

Für alle $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ und alle $f \in C^\infty(M)$ gilt nun

$$\begin{aligned} R^\nabla(fX,Y)Z &= \nabla_{fX}\nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_{fX} Z - \nabla_{[fX,Y]}Z \\ &= f\nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y(f\nabla_X Z) - \nabla_{f[X,Y]-Y(f)X} Z \\ &= f\nabla_X\nabla_Y Z - f\nabla_Y\nabla_X Z - Y(f)\,\nabla_X Z - f\nabla_{[X,Y]}Z + Y(f)\,\nabla_X Z \\ &= fR^\nabla(X,Y)Z \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} R^\nabla(X,Y)fZ &= \nabla_X\nabla_Y(fZ) - \nabla_Y\nabla_X(fZ) - \nabla_{[X,Y]}(fZ) \\ &= \nabla_X(f\nabla_Y Z + Y(f)\,Z) - \nabla_Y(f\nabla_X Z + X(f)\,Z) - f\nabla_{[X,Y]}Z - [X,Y](f)\,Z \\ &= f\nabla_X\nabla_Y Z + X(f)\,\nabla_Y Z + Y(f)\,\nabla_X Z + X(Y(f))\,Z \\ &\quad - f\nabla_Y\nabla_X Z - Y(f)\,\nabla_X Z - X(f)\,\nabla_Y Z - Y(X(f))\,Z - f\nabla_{[X,Y]}Z - [X,Y](f)\,Z \\ &= f\nabla_X\nabla_Y Z - f\nabla_Y\nabla_X Z - f\nabla_{[X,Y]}Z + X(Y(f))\,Z - Y(X(f))\,Z - [X,Y](f)Z \\ &= fR^\nabla(X,Y,Z) + [X,Y](f) - [X,Y](f) = fR^\nabla(X,Y)Z, \end{aligned}$$

was die Behauptung zeigt. □

Bemerkung 2.58. Da R ein $(3,1)$-Tensorfeld ist, können wir also für jedes $p \in M$ drei Tangentialvektoren $u, v, w \in T_pM$ in p in R einsetzen und erhalten wieder einen Tangentialvektor $R(u,v)w$ heraus. Ist nun (U, φ), $\varphi = (x_1, \dots, x_n)$, eine Karte um $p \in M$, so ist mit $u = \sum_{i=1}^n u_i \partial_i(p)$, $v = \sum_{i=1}^n v_i \partial_i(p)$ und $w = \sum_{i=1}^n w_i \partial_i(p)$ für eindeutig bestimmte $u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_n, w_1, \dots, w_n \in \mathbb{R}$ gerade

$$R(u,v)w = \sum_{i,j,k=1} u_i v_j w_k\, R(\partial_i(p), \partial_j(p))\partial_k(p).$$

Nun ist $R(\partial_i(p), \partial_j(p), \partial_k(p)) \in T_pM$ und wir können also

$$R(\partial_i(p), \partial_j(p))\partial_k(p) = \sum_{l=1}^n R^l_{ijk}(p)\,\partial_l(p)$$

mit eindeutigen $R^l_{ijk} \in C^\infty(U)$, $l = 1, \dots, n$, für alle $i, j, k = 1, \dots, n$ schreiben. Dann ist also

$$R(u,v)w = \sum_{i,j,k,l=1} R^l_{ijk}(p) u_i v_j w_k\, \partial_l(p).$$

Daneben ist

$$R(\partial_i, \partial_j)\partial_k = \nabla_{\partial_i}\nabla_{\partial_j}\partial_k - \nabla_{\partial_j}\nabla_{\partial_i}\partial_k - \nabla_{[\partial_i,\partial_j]}\partial_k = (\nabla_{\partial_i}\nabla_{\partial_j} - \nabla_{\partial_j}\nabla_{\partial_i})\partial_k = [\nabla_{\partial_i}, \nabla_{\partial_j}]\partial_k$$

für alle $i, j, k = 1, \dots, n$. Da diese Terme R vollständig bestimmen, misst R in gewisser Weise, inwieweit kovariante Ableitungen miteinander vertauschen. Weiter können wir

$(R^l_{ijk})_{i,j,k,l=1,\ldots,n}$ aus den Christoffelsymbolen $(\Gamma^k_{ij})_{i,j,k=1,\ldots,n}$ von ∇ bezüglich φ berechnen, denn es ist

$$\begin{aligned}
R(\partial_i,\partial_j)\partial_k &= \nabla_{\partial_i}\nabla_{\partial_j}\partial_k - \nabla_{\partial_j}\nabla_{\partial_i}\partial_k = \nabla_{\partial_i}\left(\sum_{r=1}^n \Gamma^r_{jk}\partial_r\right) - \nabla_{\partial_j}\left(\sum_{r=1}^n \Gamma^r_{ik}\partial_r\right)\\
&= \sum_{r=1}^n \left(\Gamma^r_{jk}\nabla_{\partial_i}\partial_r + \frac{\partial\Gamma^r_{jk}}{\partial x_i}\partial_r - \Gamma^r_{ik}\nabla_{\partial_j}\partial_r - \frac{\partial\Gamma^r_{ik}}{\partial x_j}\right)\partial_r\\
&= \sum_{r,l=1}^n \left(\Gamma^l_{ir}\Gamma^r_{jk} - \Gamma^l_{jr}\Gamma^r_{ik}\right)\partial_l + \sum_{r=1}^n \left(\frac{\partial\Gamma^r_{jk}}{\partial x_i} - \frac{\partial\Gamma^r_{ik}}{\partial x_j}\right)\partial_r\\
&= \sum_{l=1}^n \left(\frac{\partial\Gamma^l_{jk}}{\partial x_i} - \frac{\partial\Gamma^l_{ik}}{\partial x_j} + \sum_{r=1}^n(\Gamma^l_{ir}\Gamma^r_{jk} - \Gamma^l_{jr}\Gamma^r_{ik})\right)\partial_l,
\end{aligned}$$

für alle $i,j,k = 1,\ldots,n$, also

$$R^l_{ijk} = \frac{\partial\Gamma^l_{jk}}{\partial x_i} - \frac{\partial\Gamma^l_{ik}}{\partial x_j} + \sum_{r=1}^n(\Gamma^l_{ir}\Gamma^r_{jk} - \Gamma^l_{jr}\Gamma^r_{ik}) \tag{2.2}$$

für alle $i,j,k,l = 1,\ldots,n$.

Wir werden weiter unten eine geometrische Interpretation des riemannschen Krümmungstensors R^g einer pseudo-riemannschen Metrik g geben, der die Namensgebung motivieren wird. Eine kleine Motivation ist aber schon durch das folgende Beispiel gegeben, welches zeigt, dass der riemannsche Krümmungstensor von $\mathbb{R}^{p,n-p}$ gleich 0 ist:

Beispiel 2.59. Die pseudo-riemannsche Mannigfaltigkeit $\mathbb{R}^{p,n-p}$ ist *flach*, d.h. der riemannsche Krümmungstensor R von $\mathbb{R}^{p,n-p}$ ist identisch gleich 0:
Denn nach Beispiel 2.12 ist $\Gamma^k_{ij} = 0$ für alle $i,j,k = 1,\ldots,n$ bezüglich der Standardkarte $(\mathbb{R}^n, \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n})$ von $\mathbb{R}^n$ und somit nach Gleichung (2.2) $R^l_{ijk} \equiv 0$ für alle $i,j,k = 1,\ldots,n$, also $R \equiv 0$.

Der riemannsche Krümmungstensor einer pseudo-riemannschen Metrik hat folgende Symmetrien:

Proposition 2.60. *Es sei (M,g) eine pseudo-riemannsche Mannigfaltigkeit. Dann erfüllt der riemannschen Krümmungstensor R von (M,g) für alle $X,Y,Z,W \in \Gamma(TM)$ folgende Gleichungen:*

1. $R(X,Y)Z = -R(Y,X)Z$ *(„Antisymmetrie in den ersten beiden Argumenten“).*
2. $R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = 0$ *(„1. Bianchi-Identität“).*
3. $g(R(X,Y)Z,W) = -g(R(X,Y)W,Z)$ *(„Antisymmetrie im dritten und vierten Argument“).*
4. $g(R(X,Y)Z,W) = g(R(Z,W)X,Y)$ *(„Symmetrie bei Blockvertauschung“).*

Beweis. 1. haben wir schon in Lemma 2.57 vermerkt.
Weiter folgt aufgrund der Torsionsfreiheit von ∇^g und der Jacobi-Identität des Kommutators von Vektorfeldern gerade

$$\begin{aligned} R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y &= \nabla^g_X \nabla^g_Y Z - \nabla^g_Y \nabla^g_X Z - \nabla^g_{[X,Y]} Z \\ &\quad + \nabla^g_Y \nabla^g_Z X - \nabla^g_Z \nabla^g_Y X - \nabla^g_{[Y,Z]} X \\ &\quad + \nabla^g_Z \nabla^g_X Y - \nabla^g_X \nabla^g_Z Y - \nabla^g_{[Z,X]} Y \\ &= \nabla^g_X [Y,Z] + \nabla^g_Y [Z,X] + \nabla^g_Z [X,Y] \\ &\quad - \nabla^g_{[X,Y]} Z - \nabla^g_{[Y,Z]} X - \nabla^g_{[Z,X]} Y \\ &= [X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] = 0 \end{aligned}$$

für alle $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$, also ist 2. wahr.
3. ist offensichtlich äquivalent zu $g(R(X,Y)Z, Z) = 0$ für alle $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ (eine Richtung klar, für die andere setze man $Z+W$ statt Z ein), was sich nun unter Benutzung der Metrizität von ∇^g wie folgt ergibt:

$$\begin{aligned} g(R(X,Y)Z,Z) &= g(\nabla^g_X \nabla^g_Y Z - \nabla^g_Y \nabla^g_X Z - \nabla^g_{[X,Y]} Z, Z) \\ &= g(\nabla^g_X \nabla^g_Y Z, Z) - g(\nabla^g_Y \nabla^g_X Z, Z) - g(\nabla^g_{[X,Y]} Z, Z) \\ &= X(g(\nabla^g_Y Z, Z)) - g(\nabla^g_Y Z, \nabla^g_X Z) - Y(g(\nabla^g_X Z, Z)) + g(\nabla^g_X Z, \nabla^g_Y Z) \\ &\quad - \tfrac{1}{2}[X,Y](g(Z,Z)) \\ &= \tfrac{1}{2}\, XY(g(Z,Z)) - \tfrac{1}{2}\, YX(g(Z,Z)) - \tfrac{1}{2}[X,Y](g(Z,Z)) \\ &= \tfrac{1}{2}\,[X,Y](g(Z,Z)) - \tfrac{1}{2}[X,Y](g(Z,Z)) = 0. \end{aligned}$$

Zum Beweis von 4. schreiben wir alle vier möglichen Summen von 2. für $X, Y, Z, W \in \Gamma(TM)$ folgendermaßen hin:

$$\begin{aligned} g(R(X,Y)Z,W) + g(R(Y,Z)X,W) + g(R(Z,X)Y,W) &= 0, \\ g(R(Y,Z)W,X) + g(R(Z,W)Y,X) + g(R(W,Y)Z,X) &= 0, \\ g(R(Z,W)X,Y) + g(R(W,X)Z,Y) + g(R(X,Z)W,Y) &= 0, \\ g(R(W,X)Y,Z) + g(R(X,Y)W,Z) + g(R(Y,W)X,Z) &= 0. \end{aligned}$$

Addieren wir die ersten beiden Zeilen und ziehen davon dann die dritte und vierte Zeile ab, so erhalten wir unter Benutzung von 1. und 3. gerade

$$\begin{aligned} 0 &= g(R(X,Y)Z,W) + g(R(Y,Z)X,W) + g(R(Z,X)Y,W) + g(R(Y,Z)W,X) \\ &\quad + g(R(Z,W)Y,X) + g(R(W,Y)Z,X) - g(R(Z,W)X,Y) - g(R(W,X)Z,Y) \\ &\quad - g(R(X,Z)W,Y) - g(R(W,X)Y,Z) - g(R(X,Y)W,Z) - g(R(Y,W)X,Z) \\ &= g(R(X,Y)Z,W) + g(R(Y,Z)X,W) - g(R(X,Z)Y,W) - g(R(Y,Z)X,W) \\ &\quad - g(R(Z,W)X,Y) - g(R(Y,W)Z,X) - g(R(Z,W)X,Y) - g(R(W,X)Z,Y) \\ &\quad + g(R(X,Z)Y,W) + g(R(W,X)Z,Y) + g(R(X,Y)Z,W) + g(R(Y,W)Z,X) \\ &= 2g(R(X,Y)Z,W) - 2g(R(Z,W)X,Y), \end{aligned}$$

also $g(R(X,Y)Z,W) = g(R(Z,W)X,Y)$ für alle $X,Y,Z,W \in \Gamma(TM)$ und damit ist 4. gezeigt. $\square$

Bemerkung. Nach dem Beweis von Proposition 2.60 gilt 1. für den riemannschen Krümmungstensor R^∇ jedes Zusammenhanges ∇, 2. falls ∇ torsionsfrei ist und 3. falls ∇ metrisch bezüglich der in der Gleichung vorkommenden pseudo-riemannschen Metrik g ist. Weiter folgt 4. aus 1. – 3., ist also eigentlich keine weitere Symmetrie von R^g sondern schon in den anderen Symmetrien 1. – 3. von R^g enthalten. Da die Herleitung sehr trickreich war, werden wir trotzdem auch direkt mit der Symmetrie 4. arbeiten.

Der riemannsche Krümmungstensor R^g einer (pseudo-)riemannschen Mannigfaltigkeit (M,g) ist als $(3,1)$-Tensorfeld ein sehr kompliziertes Objekt. Wir werden weiter unten eine äquivalente Beschreibung von R in Termen der sogenannten *Schnittkrümmungen* von allen *Tangentialebenen*, d.h. von zweidimensionalen Unterräumen eines T_pM, $p \in M$, geben. Zum Beweis der Äquivalenz führen wir folgenden Begriff ein und bemerken, dass wir uns hier und auch weiter unten auf den riemannschen Fall beschränken werden, obwohl entsprechende Aussagen auch für pseudo-riemannsche Mannigfaltigkeiten gelten. Es ergeben sich im echten pseudo-riemannschen Fall aber technische Schwierigkeiten daraus, dass nicht mehr alle Tangentialebenen nicht ausgeartet sind.

Definition 2.61. Es sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein endlich-dimensionaler euklidischer Vektorraum. Ein *algebraischer Krümmungstensor* (auf $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$) ist eine $\mathbb{R}$-trilineare Abbildung $R : V \times V \times V \to V$, $V \times V \times V \ni (u,v,w) \mapsto R(u,v)w \in V$, so dass für alle u,v,w,z gilt:

1. $R(u,v)w = -R(v,u)w$,
2. $R(u,v)w + R(v,w)u + R(w,u)v = 0$,
3. $\langle R(u,v)w, z\rangle = -\langle R(u,v)z, w\rangle$ und
4. $\langle R(u,v)w, z\rangle = \langle R(w,z)u, v\rangle$.

Bemerkung 2.62. Nach Proposition 2.60 ist also für eine riemannsche Mannigfaltigkeit (M,g) der riemannsche Krümmungstensor R^g_p für jedes $p \in M$ ein algebraischer Krümmungstensor auf (T_pM, g_p).

Bevor wir uns nun der Schnittkrümmung widmen, wollen wir noch die Invarianz des riemannschen Krümmungstensors unter Isometrien zeigen. Dazu erinnern wir an folgende Definition von Blatt 8, Aufgabe 3 der Übungen:

Definition 2.63. Es seien M und N zwei Mannigfaltigkeiten sowie $f : M \to N$ ein Diffeomorphismus.
Für ein Vektorfeld $X \in \Gamma(TN)$ auf N können wir ein Vektorfeld f^*X auf M durch $f^*X := df^{-1} \circ X \circ f$ definieren. Dieses nennen wir den *Pullback von X (längs f)*.
Ist g eine pseudo-riemannsche Metrik auf M sowie h eine pseudo-riemannsche Metrik auf N, so nennen wir f eine *Isometrie* und (M,g) und (N,h) dann *isometrisch*, wenn $g = f^*h$ ist, d.h. wenn

$$g_p(v,w) = (f^*h)_p(v,w) = h_{f(p)}(df_p(v), df_p(w))$$

für alle $p \in M$ und alle $v, w \in T_pM$ gilt.

Der riemannsche Krümmungstensor einer pseudo-riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g) ist nun im folgenden Sinne „invariant“ unter Isometrien:

Lemma 2.64. *Es seien (M, g) und (N, h) pseudo-riemannsche Mannigfaltigkeiten sowie $f : M \to N$ eine Isometrie. Dann gilt für die zugehörigen riemannschen Krümmungstensoren R^g und R^h und alle $u, v, w \in T_pM$ gerade*

$$df_p(R^g_p(u, v)w) = R^h_{f(p)}(df_p(u), df_p(v))df_p(w)$$

für alle $p \in M$ und alle $u, v, w \in T_pM$.

Beweis. Nach Blatt 8, Aufgabe 3 gilt $\nabla^g_{f^*X} f^*Y = f^*(\nabla^h_X Y)$ und $f^*[X, Y] = [f^*X, f^*Y]$ für alle Vektorfelder $X, Y \in \Gamma(TN)$ auf N und somit

$$\begin{aligned} R^g(f^*X, f^*Y)f^*Z &= \nabla^g_{f^*X}\nabla^g_{f^*Y} f^*Z - \nabla^g_{f^*Y}\nabla^g_{f^*X} f^*Z - \nabla_{[f^*X, f^*Y]} f^*Z \\ &= \nabla^g_{f^*X} f^*(\nabla^h_Y Z) - \nabla_{f^*Y} f^*(\nabla^h_X Z) - \nabla^g_{f^*[X,Y]} f^*Z \\ &= f^*(\nabla^h_X \nabla^h_Y - \nabla^h_Y \nabla^h_X - \nabla^h_{[X,Z]} Z) = f^*(R^h(X, Y)Z) \end{aligned}$$

für alle Vektorfelder $X, Y, Z \in \Gamma(TN)$ auf N. Wähle nun für gegebenes $p \in M$ und gegebene $u, v, w \in T_pM$ Vektorfelder $X, Y, Z \in \Gamma(TN)$ auf N mit $X(f(p)) = df_p(u)$, $Y(f(p)) = df_p(v)$ und $Z(f(p)) = df_p(w)$ (diese existieren nach Bemerkung 2.9). Dann ist $(f^*X)(p) = df^{-1}(X(f(p))) = u$ und ebenso $(f^*Y)(p) = v$ sowie $(f^*Z)(p) = w$. Daher folgt mit dem oben gezeigten gerade

$$\begin{aligned} df_p(R^g_p(u, v)w) &= df_p\Big((R^g(f^*X, f^*Y)f^*Z)(p)\Big) = df_p\Big((f^*(R^h(X, Y)Z))(p)\Big) \\ &= R^h(X(f(p)), Y(f(p)))Z(f(p)) = R^h(df_p(u), df_p(v))df_p(w) \end{aligned}$$

wie behauptet. □

Nun wenden wir uns der *Schnittkrümmung* zu:

Definition 2.65. Es sei (M, g) eine riemannsche Mannigfaltigkeit, $p \in M$ sowie $\sigma \subseteq T_pM$ eine Tangentialebene in T_pM. Dann nennen wir die reelle Zahl

$$K(\sigma) := \frac{g_p(R^g_p(v, w)w, v)}{\|v\|_p^2 \, \|w\|_p^2 - g_p(v, w)^2} \tag{2.3}$$

die *Schnittkrümmung von σ*, wobei v, w eine Basis von T_pM ist. Wir bemerken, dass $K(\sigma)$ wohldefiniert, d.h. unabhängig von der gewählten Basis v, w von T_pM, ist (Übung!!!) und dass für eine Orthonormalbasis v, w von (σ, g_p) gerade $K(\sigma) = g_p(R^g_p(v, w)w, v)$ gilt.

Bemerkung. Man kann zeigen, dass für eine zweidimensionale riemannsche Untermannigfaltigkeit (S, g) des $\mathbb{R}^3$, eine sogenannte *Fläche im* $\mathbb{R}^3$, die Schnittkrümmung $K(T_pS)$ für $p \in S$ gerade mit der Gauß-Krümmung in p übereinstimmt. Wir bemerken, dass dies dann wegen Lemma 2.69 das berühmte „Theorema Egregrium“, d.h. die Invarianz der Gauß-Krümmung unter lokalen Isometrien, impliziert.

Wir hatten oben erwähnt, dass sich der riemannsche Krümmungstensor R äquivalent durch die Schnittkrümmungen aller Tangentialebenen beschreiben lässt. Genauer gilt, wenn wir die Schnittkrümmung einer Ebene in einem euklidischen Vektorraum $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, der mit einem algebraischen Krümmungstensor ausgestattet ist, analog zu Gleichung (2.3) definieren:

Proposition 2.66. *Es sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein euklidischer Vektorraum, R und R' algebraische Krümmungstensoren auf $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ sowie K bzw. K' die zugehörigen Schnittkrümmungen. Ist $K(\sigma) = K'(\sigma)$ für alle Ebenen σ in V, so ist auch $R = R'$.*

Beweis. Da der Nenner in Gleichung (2.3) unabhängig von R bzw. R' ist, haben wir $\langle R(v,w)w, v\rangle = \langle R'(v,w)w, v\rangle$ für alle linear unabhängigen $v, w \in V$ und somit aus Stetigkeitsgründen (oder wegen den Eigenschaften 1. oder 3. eines algebraischen Krümmungstensors) für alle $v, w \in V$.
Seien nun $u, v, w, z \in V$ gegeben. Dann gilt zunächst

$$\begin{aligned}\langle R(u,v)w, u\rangle + \langle R(u,w)v, u\rangle &= \langle R(u, v+w)v+w, u\rangle - \langle R(u,v)v, u\rangle - \langle R(u,w)w, u\rangle \\ &= \langle R'(u, v+w)v+w, u\rangle - \langle R'(u,v)v, u\rangle - \langle R'(u,w)w, u\rangle \\ &= \langle R'(u,v)w, u\rangle + \langle R'(u,w)v, u\rangle.\end{aligned}$$

Unter Benutzung der Eigenschaften 1., 3. und 4. eines algebraischen Krümmungstensors folgt weiter

$$\langle R(u,w)v, u\rangle = \langle R(v,u)u, w\rangle = \langle R(u,v)w, u\rangle,$$

und entsprechend $\langle R'(u,w)v, u\rangle = \langle R'(u,v)w, u\rangle$, womit sich dann

$$\langle R(u,v)w, u\rangle = \langle R'(u,v)w, u\rangle$$

ergibt. Damit folgt nun

$$\begin{aligned}\langle R(u,v)w, z\rangle + \langle R(z,v)w, u\rangle &= \langle R(u+z, v)w, u+z\rangle - \langle R(u,v)w, u\rangle - \langle R(z,v)w, z\rangle \\ &= \langle R'(u+z, v)w, u+z\rangle - \langle R'(u,v)w, u\rangle - \langle R'(z,v)w, z\rangle \\ &= \langle R'(u,v)w, z\rangle + \langle R'(z,v)w, u\rangle.\end{aligned}$$

Nun ist nach Eigenschaft 2., 3. und 4. eines algebraischen Krümmungstensor gerade

$$\langle R(z,v)w, u\rangle = \langle R(w,u)z, v\rangle = -\langle R(w,u)v, z\rangle = \langle R(u,v)w, z\rangle + \langle R(v,w)u, z\rangle,$$

und entsprechend

$$\langle R'(z,v)w, u\rangle = \langle R'(u,v)w, z\rangle + \langle R'(v,w)u, z\rangle,$$

so dass wir

$$\begin{aligned}2\langle R(u,v)w, z\rangle + \langle R(v,w)u, z\rangle &= \langle R(u,v)w, z\rangle + \langle R(z,v)w, u\rangle \\ &= \langle R'(u,v)w, z\rangle + \langle R'(z,v)w, u\rangle \\ &= 2\langle R'(u,v)w, z\rangle + \langle R'(v,w)u, z\rangle,\end{aligned}$$

also

$$2R(u,v)w + R(v,w)u = 2R'(u,v)w + R'(v,w)u$$

erhalten. Genauso gilt dann

$$2R(v,w)u + R(w,u)v = 2R'(v,w)u + R'(w,u)v.$$

Addieren wir das $\frac{1}{2}$-fache dieser Gleichung zur vorherigen Gleichung, so folgt

$$2R(u,v)w + 2R(v,w)u + \tfrac{1}{2}R(w,u)v = 2R'(u,v)w + 2R'(v,w)u + \tfrac{1}{2}R'(w,u)v,$$

woraus sich unter Benutzung von Eigenschaft 2. eines algebraischen Krümmungstensors gerade

$$\begin{aligned} -\tfrac{3}{2}R(w,u)v &= -2R(w,u)v + \tfrac{1}{2}R(w,u)v = 2R(u,v)w + 2R(v,w)u + \tfrac{1}{2}R(w,u)v \\ &= 2R'(u,v)w + 2R'(v,w)u + \tfrac{1}{2}R'(w,u)v = -\tfrac{3}{2}R'(w,u)v, \end{aligned}$$

also

$$R(w,u)v = R'(w,u)v$$

ergibt. Dies zeigt die Behauptung. □

Im Falle *konstanter (Schnitt-)Krümmung* einer riemannschen Mannigfaltigkeit (M,g) lässt sich R^g explizit durch die Schnittkrümmung ausdrücken:

Proposition 2.67. *Es sei (M,g) eine riemannsche Mannigfaltigkeit mit* konstanter (Schnitt-)Krümmung *$\kappa \in \mathbb{R}$, d.h. für jeden Punkt $p \in M$ und jede Tangentialebene $\sigma \subseteq T_pM$ in T_pM ist $K(\sigma) = \kappa$. Dann gilt für den riemannschen Krümmungstensor R^g von (M,g) für alle $p \in M$ und alle $u,v,w \in T_pM$ gerade*

$$R^g_p(u,v)w = \kappa \cdot (g_p(v,w)u - g_p(u,w)v)\,.$$

Beweis. Es sei $p \in M$ fix und $R' : T_pM \times T_pM \times T_pM \to T_pM$, $R'(u,v)w := \kappa \cdot (g_p(v,w)u - g_p(u,w)v)$. Wir zeigen, dass R' ein algebraischer Krümmungstensor auf (T_pM, g_p) mit Schnittkrümmung $K(\sigma) = \kappa$ für jede Tangentialebene $\sigma \subseteq T_pM$ in T_pM ist. Aus Proposition 2.66 folgt dann $R^g_p = R'$, also die Behauptung.
Zunächst erfüllt R' offensichtlich Eigenschaft 1. eines algebraischen Krümmungstensors, d.h. es gilt $R'(u,v)w = -R'(v,u)w$ für alle $u,v,w \in T_pM$. Weiter gilt auch Eigenschaft 2. eines algebraischen Krümmungstensors, denn es ist

$$\begin{aligned} &R'(u,v)w + R'(v,w)u + R'(w,u)v \\ &= \kappa \cdot (g_p(v,w)u - g_p(u,w)v + g_p(w,u)v - g_p(v,u)w + g_p(u,v)w - g_p(w,v)u) \\ &= 0 \end{aligned}$$

für alle $u,v,w \in T_pM$. Weiter gilt für alle $u,v,w,z \in T_pM$ gerade

$$\begin{aligned} g_p(R'(u,v)w,z) &= \kappa \cdot (g_p(v,w)g_p(u,z) - g_p(u,w)g_p(v,z)) \\ &= -\kappa \cdot (g_p(v,z)g_p(u,w) - g_p(u,z)g_p(v,w)) \\ &= -g_p(R'(u,v)z,w), \end{aligned}$$

also Eigenschaft 3. eines algebraischen Krümmungstensors, und

$$\begin{aligned} g_p(R'(u,v)w,z) &= \kappa \cdot (g_p(v,w)g_p(u,z) - g_p(u,w)g_p(v,z)) \\ &= \kappa \cdot (g_p(z,u)g_p(w,v) - g_p(w,u)g_p(z,v)) \\ &= g_p(R'(w,z)u,v), \end{aligned}$$

also Eigenschaft 4. eines algebraischen Krümmungstensors. Daher ist R' ein algebraischer Krümmungstensor auf (T_pM, g_p). Sei nun σ eine Tangentialebene in T_pM und v, w eine Orthonormalbasis von (σ, g_p). Dann gilt

$$K(\sigma) = g_p(R'(v,w)w,v) = \kappa \cdot (g_p(w,w)g_p(v,v) - g_p(v,w)g_p(w,v)) = \kappa,$$

was wie oben bemerkt die Behauptung zeigt. □

Beispiel 2.68. Nach Beispiel 2.59 ist der Krümmungstensor von $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n,0}$ identisch gleich 0 und somit hat $\mathbb{R}^n$ konstante Krümmung 0.

Wir zeigen in diesem und im nächsten Abschnitt, dass S^n, ausgestattet mit der Standardmetrik g_{st}, konstante Krümmung 1 hat und in den Übungen zeigen wir, dass der hyperbolische Raum (H^n, g_{H^n}) konstante Krümmung -1. Weiter zeigen wir, dass der n-Torus T^n, ausgestattet mit einer kanonischen Metrik, konstante Krümmung 0 hat. In all diesen Fällen wird das folgende Lemma über die Invarianz der Schnittkrümmung unter Isometrien benutzt:

Lemma 2.69. *Es seien (M, g) und (N, h) riemannsche Mannigfaltigkeiten sowie $f : M \to N$ eine Isometrie zwischen (M, g) und (N, h). Dann gilt für jeden Punkt $p \in M$ und jede Tangentialebene $\sigma \subseteq T_pM$ in T_pM die Gleichheit*

$$K^h(df_p(\sigma)) = K^g(\sigma)$$

wobei K^g bzw. K^h die Schnittkrümmungen von (M, g) bzw. (N, h) sind.

Beweis. Es sei v, w eine Orthonormalbasis von (σ, g_p). Dann folgt die Behauptung direkt aus Lemma 2.64, denn da f eine Isometrie ist, ist $df_p(v), df_p(w)$ eine Orthonormalbasis von $(df_p(\sigma), h_{f(p)})$ und es folgt

$$\begin{aligned} K^h(df_p(\sigma)) &= h_{f(p)}(R^h_{f(p)}(df_p(v), df_p(w))df_p(w), df_p(v)) = h_{f(p)}(df_p(R^g_p(v,w)w), df_p(v)) \\ &= g_p(R^g_p(v,w)w, v) = K^g(\sigma). \end{aligned}$$

Beispiel 2.70. (a) Nach Blatt 10, Aufgabe 1 (b) gibt es eine eindeutige riemannsche Metrik $\tilde{g}$ auf $T^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ $(n \geq 2)$ mit $\pi^*\tilde{g} = \langle \cdot, \cdot \rangle$, wobei $\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ die natürliche Projektion ist. Dann ist π eine *lokale Isometrie*, d.h. es gibt um jeden Punkt $p \in \mathbb{R}^n$ eine offene Umgebung U um p, so dass $\pi|_U$ eine Isometrie von $(U, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ nach $(\pi(U), \tilde{g}|_{\pi(U)})$ ist. Nach Lemma 2.69 und Beispiel 2.68 hat daher $(T^n, \tilde{g})$ konstante Schnittkrümmung 0. Wir bemerken, dass für $n = 2$ die riemannsche Metrik $\tilde{g}$ auf T^2 *nicht* diejenige riemannsche Metrik $\hat{g}$ ist, die man für die übliche Einbettung von T^2 in $\mathbb{R}^3$ durch Einschränkung des Standardskalarproduktes von $\mathbb{R}^3$ bekommt. Diese riemannsche Metrik $\hat{g}$ auf T^2 ist entsprechend der Anschauung tatsächlich nicht flach, hat also nicht konstante Krümmung 0. Weiter bemerken wir, dass die gleiche Überlegung allgemein zeigt:

Ist (M, g) eine riemannsche Mannigfaltigkeit konstanter Krümmung $\kappa \in \mathbb{R}$ und $\pi : (M, g) \to (M/\Gamma, \tilde{g})$ eine riemannsche Überlagerung (zur Definition siehe die Übungen bzw. Definition 3.7 weiter unten), Γ eine eigentlich und frei wirkende diskrete Lie-Gruppe von Isometrien von (M, g), so hat auch $(M/\Gamma, \tilde{g})$ konstante Krümmung κ.

Hierbei ist mit *diskret* folgendes gemeint: Man kann die Gruppe der Isometrien $\mathrm{Isom}(M, g)$ von (M, g) mit einer „natürlichen" Topologie versehen, so dass $\mathrm{Isom}(M, g)$ eine Lie-Gruppe wird. Dann soll Γ als topologischer Teilraum von $\mathrm{Isom}(M, g)$ diskret sein.

(b) Wir zeigen, dass (S^n, g_{st}) konstante Schnittkrümmung hat: Seien dazu $p_1, p_2 \in M$ und Tangentialebenen $\sigma_1 \subseteq T_{p_1}M$ in $T_{p_1}M$ sowie $\sigma_2 \subseteq T_{p_2}M$ in $T_{p_2}M$ gegeben. Wir bemerken, dass die Einschränkung eines Elementes $A \in \mathrm{O}(n+1)$ auf S^n offensichtlich eine Isometrie von (S^n, g_{st}) liefert (da ja g_{st} die Einschränkung des Standardskalarproduktes von $\mathbb{R}^{n+1}$ auf die Tangentialräume von S^n ist). Wir können annehmen, dass $n \geq 2$ ist (für $n = 1$ ist die Schnittkrümmung nicht definiert bzw. automatisch konstant gleich irgendeiner reellen Zahl, da es gar keine Tangentialebenen gibt). Wir wählen eine Orthonormalbasis v_1, w_1 von $\sigma_1 \subseteq T_{p_1}S^n$ und eine Orthonormalbasis v_2, w_2 von $\sigma_2 \subseteq T_{p_2}S^n$. Da $v_i, w_i \in T_{p_i}S^n = p_i^\perp$ für $i = 1, 2$ ist, ist (p_i, v_i, w_i) ein Orthonormalsystem von $\mathbb{R}^n$ für $i = 1, 2$. Daher gibt es ein $A \in \mathrm{O}(n+1)$ ($n + 1 \geq 3$ nach Voraussetzung!!!), so dass $Ap_1 = p_2$, $Av_1 = v_2$ und $Aw_1 = w_2$ ist. Die Isometrie $f := A|_{S^n} : S^n \to S^n$ von (S^n, g_{st}) bildet also die Tangentialebene σ_1 auf die Tangentialebene σ_2 ab (da $df_{p_1} = A|_{T_{p_1}S^n} : T_{p_1}S^n \to T_{p_2}S^n$ aufgrund der Linearität von A ist) und somit gilt nach Lemma 2.69 gerade $K(\sigma_2) = K(df_{p_1}(\sigma_1)) = K(\sigma_1)$. Also hat (S^n, g_{st}) konstante Krümmung gleich einem $\kappa \in \mathbb{R}$. Um die Konstante κ zu bestimmen, könnte man nun die Schnittkrümmung einer beliebigen Tangentialebene berechnen. Wir werden dies hier nicht tun, sondern die Konstante κ im nächsten Abschnitt einfacher mittels der Theorie der Jacobifelder bestimmen.

$\square$

2.7 Jacobifelder

In diesem Abschnitt beschränken wir uns wieder auf riemannsche Mannigfaltigkeiten und betrachten die *Variationsvektorfelder* von differenzierbaren „Deformationen" von Geodätischen, sogenannten *geodätischen Variationen*:

Definition 2.71. Es sei (M, g) eine riemannsche Mannigfaltigkeit und $c : [a, b] \to M$ eine Geodätische von (M, g). Eine *geodätische Variation von c* ist eine differenzierbare

Abbildung $(-\epsilon, \epsilon) \times [a, b] \ni (t, s) \mapsto f(s, t) \in M$, so dass $f_s := f(s, \cdot) : [a, b] \to M$ für jedes $s \in (-\epsilon, \epsilon)$ eine Geodätische ist und so, dass $f_0 = c$ gilt.
Das *Variationsvektorfeld (von f)* ist das Vektorfeld $J : [a, b] \to TM$, $J(t) := \frac{\partial f}{\partial s}(0, t) \in T_{c(t)}M$ längs c.

Das Variationsvektorfeld einer geodätischen Variation erfüllt die sogenannte *Jacobi-Gleichung*, siehe Lemma 2.73. Um dies zu zeigen, benötigen wir noch folgendes Lemma:

Lemma 2.72. *Es sei (M, g) eine riemannsche Mannigfaltigkeit, $(-\epsilon, \epsilon) \times [a, b] \ni (s, t) \mapsto f(s, t) \in M$ differenzierbar und V ein* Vektorfeld längs f, *d.h. eine differenzierbare Abbildung $V : (-\epsilon, \epsilon) \to TM$ mit $V(s, t) \in T_{f(s,t)}M$ für alle $(s, t) \in (-\epsilon, \epsilon) \times [a, b]$. Dann gilt*

$$\frac{\nabla}{ds}\frac{\nabla}{dt}V = \frac{\nabla}{dt}\frac{\nabla}{ds}V + R\left(\frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t}\right)V.$$

Beweis. Wir skizzieren hier nur wie man die Rechnung durchführen muss und überlassen die Details der Rechnung dem Leser als Übungsaufgabe:
Wir fixieren $(s_0, t_0) \in (-\epsilon, \epsilon) \times [a, b]$ und wählen eine Karte (U, φ), $\varphi = (x_1, \ldots, x_n)$, um $f(s_0, t_0)$. Dann schreiben wir $V(s, t) = \sum_{i=1}^n V_i(s, t)\partial_i(f(s, t))$ lokal um $(s_0, t_0) \in (-\epsilon, \epsilon) \times [a, b]$ mit lokalen C^∞-Funktionen $V_1, \ldots, V_n$ und setzen $f_i := x_i \circ f : (-\epsilon, \epsilon) \times [a, b] \to \mathbb{R}$ für alle $i = 1, \ldots, n$. Unter zweimaliger Benutzung von Gleichung (2.1) bekommt man dann einen lokalen Ausdruck für $\frac{\nabla}{ds}\frac{\nabla}{dt}V$ und genauso für $\frac{\nabla}{dt}\frac{\nabla}{ds}V$. Zieht man diese voneinander ab, erhält man unter Benutzung von Gleichung (2.2), dass diese Differenz gerade $R\left(\frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t}\right)V$ entspricht. □

Damit können wir nun wie gewünscht zeigen:

Lemma 2.73. *Es sei (M, g) eine riemannsche Mannigfaltigkeit, $c : [a, b] \to M$ eine Geodätische von (M, g) und $f : (-\epsilon, \epsilon) \times [a, b] \to M$ eine geodätische Variation von c. Dann erfüllt das Variationsvektorfeld $J \in \Gamma_c(TM)$ von f die sogenannte* Jacobi-Gleichung

$$\frac{\nabla^2}{dt^2}J + R(J, \dot{c})\dot{c} = 0. \tag{2.4}$$

Beweis. Da f_s für jedes $s \in (-\epsilon, \epsilon)$ eine Geodätische ist, ist $\frac{\nabla}{dt}\frac{\partial f}{\partial t} = 0$. Nun ist $\frac{\partial f}{\partial t}$ ein Vektorfeld längs f, auf welches wir Lemma 2.72 anwenden können. Dieses Lemma und Lemma 2.42 ergibt uns nun

$$0 = \frac{\nabla}{ds}\frac{\nabla}{dt}\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\nabla}{dt}\frac{\nabla}{ds}\frac{\partial f}{\partial t} + R\left(\frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t}\right)\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\nabla}{dt}\frac{\nabla}{dt}\frac{\partial f}{\partial s} + R\left(\frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t}\right)\frac{\partial f}{\partial t}.$$

Für $s = 0$ erhalten wir daraus wegen $\frac{\partial f}{\partial t}(0, t) = \dot{c}(t)$ und $\frac{\partial f}{\partial s}(0, t) = J(t)$ für alle $t \in [a, b]$ gerade wie behauptet

$$0 = \frac{\nabla}{dt}\frac{\nabla}{dt}J + R(J, \dot{c})\dot{c}.$$

□

Dies führt zu folgender Definition:

Definition 2.74. Es sei (M, g) eine riemannsche Mannigfaltigkeit und $c : [a, b] \to M$ eine Geodätische von (M, g). Dann heißt ein Vektorfeld $J \in \Gamma_c(TM)$ längs c *Jacobifeld (längs c)*, wenn es die Jacobi-Gleichung (2.4) erfüllt, wenn also $\frac{\nabla^2}{dt^2} J + R(J, \dot{c})\dot{c} = 0$ gilt.

Wir zeigen gleich, dass Jacobifelder genau die Variationsvektorfelder von geodätischen Variationen sind. Dazu benötigen wir folgende Proposition, die den Vektorraum aller Jacobifelder längs c beschreibt und daher von eigenem Interesse ist:

Proposition 2.75. *Es sei (M, g) eine n-dimensionale riemannsche Mannigfaltigkeit und $c : [a, b] \to M$ eine Geodätische von (M, g). Dann ist die Abbildung*

$$J \mapsto \left(J(a), \tfrac{\nabla J}{dt}(a)\right) \in T_{c(a)}M \oplus T_{c(a)}M$$

ein Vektorraumisomorphismus vom Raum aller Jacobifelder längs c in den Vektorraum $T_{c(a)}M \oplus T_{c(a)}M$ und somit ist der Raum aller Jacobifelder längs c insbesondere $2n$-dimensional.

Beweis. Wir müssen also zeigen, dass es zu jedem Paar $(v, w) \in T_{c(a)}M \oplus T_{c(a)}M$ genau ein Jacobifeld längs c gibt mit $J(a) = v$ und $\frac{\nabla J}{dt}(a) = w$. Dazu schreiben wir die Jacobigleichung in ein System von Differentialgleichungen zweiter Ordnung um. Sei dazu $(u_1, \ldots, u_n)$ eine Orthonormalbasis von $(T_{c(a)}M, g_{c(a)})$ und $X_1, \ldots, X_n \in \Gamma_c(TM)$ die eindeutigen parallelen Vektorfelder längs c mit $X_i(a) = u_i$ für $i = 1, \ldots, n$. Es sei ein Vektorfeld $J \in \Gamma_c(TM)$ längs c gegeben. Schreiben wir $J = \sum_{i=1}^n f_i X_i$ mit eindeutigen differenzierbaren Funktionen $f_1, \ldots, f_n : [a, b] \to M$, so folgt

$$\frac{\nabla^2}{dt^2} J = \frac{\nabla^2}{dt^2} \left(\sum_{i=1}^n f_i X_i \right) = \sum_{i=1}^n \ddot{f}_i X_i,$$

da $X_1, \ldots, X_n$ parallel sind. Weiter gilt

$$\begin{aligned} R(J, \dot{c})\dot{c} &= \sum_{i=1}^n g(R(J, \dot{c})\dot{c}, X_i) X_i = \sum_{i,j=1}^n g(R(\sum_{i=1}^n f_j X_j, \dot{c})\dot{c}, X_i) X_i \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n g(R(X_j, \dot{c})\dot{c}, X_i) f_j \right) X_i = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{ji} f_j \right) X_i \end{aligned}$$

wobei wir $a_{ji} := g(R(X_j, \dot{c})\dot{c}, X_i) : [a, b] \to \mathbb{R}$ gesetzt haben und benutzt haben, dass $X_1(t), \ldots, X_n(t)$ für jedes $t \in [a, b]$ eine Orthonormalbasis von $T_{c(t)}M$ ist. Schreiben wir nun $v = \sum_{i=1}^n \alpha_i u_i$ und $w = \sum_{i=1}^n \beta_i u_i$ mit eindeutigen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_n \in \mathbb{R}$, so ist also wegen $\frac{\nabla J}{dt}(a) = \sum_{i=1} \dot{f}_i(a) X(a) = \sum_{i=1} \dot{f}_i(a) u_i$ das Vektorfeld J längs c ein Jacobifeld mit $J(a) = v$ und $\frac{\nabla J}{dt}(a) = w$ genau dann, wenn $(f_1, \ldots, f_n)$ das folgende

Anfangswertproblem zweiter Ordnung löst:

$$
\begin{aligned}
\ddot{f}_1 + \sum_{j=1}^{n} a_{j1} f_1 &= 0, \quad f_1(a) = \alpha_1, \quad \dot{f}_1(a) = \beta_1,\\
\vdots \qquad &= \vdots, \qquad \vdots \quad, \qquad \vdots \quad,\\
\ddot{f}_n + \sum_{j=1}^{n} a_{jn} f_j &= 0, \quad f_n(a) = \alpha_n, \quad \dot{f}_n(a) = \beta_n.
\end{aligned}
$$

Da dieses Anfangswertproblem linear ist, existiert eine eindeutige Lösung auf ganz $[a, b]$. Dies zeigt die Behauptung. □

Damit können wir nun zeigen:

Proposition 2.76. *Es sei (M, g) eine n-dimensionale riemannsche Mannigfaltigkeit und $c : [a, b] \to M$ eine Geodätische von (M, g). Dann ist ein Vektorfeld $J \in \Gamma_c(TM)$ längs c genau dann ein Jacobifeld längs c, wenn es das Variationsvektorfeld einer geodätischen Variation von c ist.*

Beweis. Ist J das Variationsvektorfeld einer geodätischen Variation von c, so ist J nach Lemma 2.73 ein Jacobifeld längs c.
Sei umgekehrt ein Jacobifeld $J \in \Gamma_c(TM)$ längs c gegeben. Es sei $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ eine differenzierbare Kurve mit $\gamma(0) = c(a)$ und $\dot{\gamma}(0) = J(a)$ sowie X ein Vektorfeld längs $(-\epsilon, \epsilon) \ni s \mapsto \gamma(s) \in M$ mit $X(0) = \dot{c}(a)$ und $\frac{\nabla X}{ds}(0) = \frac{\nabla J}{dt}(a)$. Ein solches ist z.B. durch $X(s) = Y(s) + sZ(s)$ gegeben, wobei $Y \in \Gamma_\gamma(TM)$ das eindeutige parallele Vektorfeld längs γ mit $Y(0) = \dot{c}(a)$ und $Z \in \Gamma_\gamma(TM)$ das eindeutige parallele Vektorfeld längs γ mit $Z(0) = \frac{\nabla J}{dt}(a)$ ist. Nach eventuellem Verkleinern von $\epsilon > 0$ ist wegen $(t - a)\dot{c}(a) \in \mathcal{D}_{c(a)} = \mathcal{D}_{\gamma(0)}$ für alle $t \in [a, b]$ auch $(t - a)X(s) \in \mathcal{D}_{\gamma(s)}$ für alle $(s, t) \in (-\epsilon, \epsilon) \times [a, b]$. Damit folgt, dass

$$
f : (-\epsilon, \epsilon) \times [a, b] \to M, \quad f(s, t) := \exp_{\gamma(s)}((t - a)X(s))
$$

eine geodätische Variation von c ist, da $f_s(t) = c_{X(s)}(t-a)$, $t \in [a, b]$, für jedes $s \in (-\epsilon, \epsilon)$ eine Geodätische ist und

$$
f_0(t) = \exp_{\gamma(0)}((t - a)X(0)) = \exp_{c(a)}((t - a)\dot{c}(a)) = c_{\dot{c}(a)}(t - a) = c(a + t - a) = c(t)
$$

für alle $t \in [a, b]$ gilt. Sei nun $\tilde{J} := \frac{\partial f}{\partial s}(0, \cdot) : [a, b] \to M$ das Variationsvektorfeld von f. Dann ist $\tilde{J}$ nach Lemma 2.73 ein Jacobifeld längs c. Weiter ist wegen $(-\epsilon, \epsilon) \ni s \mapsto f(s, a) = \exp_{\gamma(s)}(0) = \gamma(s) \in M$ gerade $\tilde{J}(a) = \frac{\partial f}{\partial s}(0, a) = \dot{\gamma}(0) = J(a)$. Außerdem gilt mit Lemma 2.42 und wegen $\frac{\partial f}{\partial t}(s, a) = \dot{f}_s(a) = \dot{c}_{X(s)}(0) = X(s)$ auch

$$
\frac{\nabla \tilde{J}}{dt}(a) = \left(\frac{\nabla}{dt}\frac{\partial f}{\partial s}\right)(0, a) = \left(\frac{\nabla}{ds}\frac{\partial f}{\partial t}\right)(0, a) = \frac{\nabla X}{ds}(0) = \frac{\nabla J}{dt}(a).
$$

Aus Proposition 2.75 folgt daher $J = \tilde{J}$. Insbesondere ist also J das Variationsvektorfeld einer geodätischen Variation. □

Es folgen nun einige Beispiel von Jacobifeldern:

Beispiel 2.77. Es sei $c : [a, b] \to M$ eine Geodätische von einer riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g).

(a) Das Vektorfeld $\dot{c}$ längs c ist wegen $\frac{\nabla}{dt}\dot{c} \equiv 0$ (da c Geodätische) immer ein Jacobifeld längs c, denn es erfüllt $\frac{\nabla^2}{dt^2}\dot{c} \equiv 0$ und $R(\dot{c}, \dot{c})\dot{c} \equiv 0$ und somit die Jacobi-Gleichung.

(b) Ebenso ist $X : [a, b] \to TM$, $X(t) := t\dot{c}(t)$ ein Jacobifeld, da wegen $\frac{\nabla^2}{dt^2}X = \frac{\nabla}{dt}\dot{c} \equiv 0$ und $R(X(t), \dot{c}(t))\dot{c}(t) = tR(\dot{c}(t), \dot{c}(t))\dot{c}(t) = 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$ wiederum beide Terme in der Jacobi-Gleichung individuell gleich 0 sind.

(c) Allgemein ist ein Vektorfeld Y längs c der Form $Y(t) = f(t)\dot{c}(t)$ für $f \in C^\infty([a, b])$ wegen $\frac{\nabla^2}{dt^2}Y = \ddot{f}\,Y$ und $R(Y, \dot{c})\dot{c} = f\,R(\dot{c}, \dot{c})\dot{c} = 0$ genau dann ein Jacobifeld, wenn $\ddot{f} = 0$ ist, also f affin-linear ist.

(d) Wir bestimmen nun die Form von Jacobifeldern längs c mit $J(a) = 0$. Zur einfacheren Notation können wir annehmen, dass $a = 0$ ist. Wir setzen außerdem $p := c(0)$ und $v := \dot{c}(0)$. Aus dem Beweis von Proposition 2.76 erkennen wir, dass wir für festes $w \in T_pM$ das eindeutige Jacobifeld J längs c mit $J(0) = 0$ und $\frac{\nabla J}{dt}(0) = w \in T_pM$ als Variationsvektorfeld der geodätischen Variation

$$f(s, t) := \exp_p(t(v + sw))$$

für genügend kleines $\epsilon > 0$ bekommen (die dort auftauchende differenzierbare Kurve γ kann als die Punktkurve p und das dort auftauchende Vektorfeld X längs γ kann dann gleich $X(s) := v + sw$ gewählt werden. Man überlege sich dazu, dass für eine Punktkurve γ die kovariante Ableitung längs γ mit X' übereinstimmt). Es ist daher also

$$J(t) = \frac{\partial f}{\partial s}(0, t) = d(\exp_p)_{tv}(tw). \tag{2.5}$$

Insbesondere erkennt man, dass Jacobifelder etwas mit dem Differential von $\exp_p$ in Punkten ungleich 0_p zu tun hat (in diesen Punkten ist das Differential eventuell nicht mehr invertierbar und man kann zur Untersuchung der Invertierbarkeit Jacobifelder mit $J(0) = 0$ benutzen).

Auf Mannigfaltigkeiten konstanter Krümmung können wir die Jacobifelder J längs einer Geodätischen $c : [0, a] \to (M, g)$ mit $J(0) = 0$ (und einer Zusatzeigenschaft) aus Beispiel 2.77 (d) auch wie folgt beschreiben:

Proposition 2.78. *Es sei (M, g) eine riemannsche Mannigfaltigkeit konstanter Krümmung $\kappa \in \mathbb{R}$. Weiter sei $c : [0, a] \to M$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Geodätische von (M, g) und J ein Jacobifeld mit $J(0) = 0$ und $g_{c(t)}(J(t), \dot{c}(t)) = 0$ („J steht überall* *senkrecht auf c") für alle $t \in [0, a]$. Daneben sei X das eindeutige parallele Vektorfeld längs c mit $X(0) = \frac{\nabla J}{dt}(0)$. Dann gilt*

$$J(t) = \begin{cases} \frac{\sin(\sqrt{\kappa}t)}{\sqrt{\kappa}} X(t) & , \textit{falls } \kappa > 0, \\ tX(t) & , \textit{falls } \kappa = 0, \\ \frac{\sinh(\sqrt{-\kappa}t)}{\sqrt{-\kappa}} X(t) & , \textit{falls } \kappa < 0. \end{cases}$$

für alle $t \in [0, a]$.

Beweis. Es sei ein Vektorfeld $\tilde{J} \in \Gamma_c(TM)$ längs c über die rechte Seite in Proposition 2.78 definiert. Dann ist $\tilde{J}(0) = 0 = J(0)$ und $\frac{\nabla \tilde{J}}{dt}(0) = X(0) = \frac{\nabla J}{dt}(0)$ für jedes $\kappa \in \mathbb{R}$. Weiter ist

$$0 = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} g(J(t), \dot{c}(t)) = g\left(\frac{\nabla J}{dt}(0), \dot{c}(0)\right), = g(X(0), \dot{c}(0))$$

da c eine Geodätische ist. Somit folgt

$$g(X(t), \dot{c}(t)) = g(X(0), \dot{c}(0)) = 0$$

für jedes $t \in [a, b]$, da sowohl X als auch $\dot{c}$ parallele Vektorfelder längs c sind. Wegen Proposition 2.67 und da c nach Bogenlänge parametrisiert ist, ergibt sich daher

$$R(\tilde{J}, \dot{c})\dot{c} = \kappa(g(\dot{c}, \dot{c})\tilde{J} - g(\tilde{J}, \dot{c})\dot{c}) = \kappa\tilde{J}$$

und somit

$$\frac{\nabla^2}{dt^2}\tilde{J} + R(\tilde{J}, \dot{c})\dot{c} = \frac{\nabla^2}{dt^2}\tilde{J} + \kappa\tilde{J} = (\ddot{f}_\kappa + \kappa f_\kappa)X,$$

wenn f_κ den Vorfaktor in $\tilde{J}$ vor X für konstante Krümmung $\kappa \in \mathbb{R}$ bezeichnet, d.h. f_κ ist durch $\tilde{J} = f_\kappa X$ eindeutig definiert. Durch direktes Nachrechnen sehen wir, dass für jedes $\kappa \in \mathbb{R}$ gerade $\ddot{f}_\kappa + \kappa f_\kappa \equiv 0$ gilt. Also ist auch $\tilde{J}$ ein Jacobifeld längs c und aus Proposition 2.75 folgt $J = \tilde{J}$, also die Behauptung. □

Bemerkung 2.79. In Proposition 2.78 hatten wir alle Jacobifelder längs Geodätischer $c : [0, a] \to M$ in riemannschen Mannigfaltigkeiten konstanter Krümmung mit $J(0) = 0$ und $g_{c(t)}(J(t), \dot{c}(t)) = 0$ für alle $t \in [0, a]$ beschrieben. Wir bemerken, dass die letzte Bedingung ganz allgemein, auch wenn die Krümmung von (M, g) nicht konstant ist, äquivalent zu $g_{c(0)}\left(\frac{\nabla J}{dt}(0), \dot{c}(0)\right) = 0$ ist:
Nach Gleichung (2.5) und dem Gauß-Lemma (Lemma 2.43) ist mit $p := c(0)$, $w := \frac{\nabla J}{dt}(0)$ und $v := \dot{c}(0)$ gerade

$$g_{c(t)}(J(t), \dot{c}(t)) = g_{c(t)}(d(\exp_p)_{tv}(tw), d(\exp_p)_{tv}(v)) = g_p(tw, v) = t \cdot g_{c(0)}\left(\frac{\nabla J}{dt}(0), \dot{c}(0)\right)$$

für alle $t \in [0, a]$.
Ein Jacobifeld $\tilde{J}$ längs c mit $\tilde{J}(0) = 0$ und $\frac{\nabla \tilde{J}}{dt}(0) = \dot{c}(0)$ ist nach Beispiel 2.77 (b) durch $\tilde{J}(t) = t\dot{c}(t)$, $t \in [0, a]$ gegeben, so dass sich jedes Jacobifeld $\hat{J}$ längs c auf einer riemannschen Mannigfaltigkeit konstanter Krümmung mit $\hat{J}(0) = 0$ aufgrund von Proposition 2.75 als $\mathbb{R}$-Linearkombination von J wie in Proposition 2.78 und $\tilde{J}$ schreiben lässt.

Beispiel 2.80. In Beispiel 2.70 (b) hatten wir gesehen, dass (S^n, g_{st}) (für $(n \geq 2)$) konstante Krümmung $\kappa \in \mathbb{R}$ hat, aber die Konstante $\kappa \in \mathbb{R}$ noch nicht bestimmt. Dies tun wir nun mittels Proposition 2.78. Dazu betrachten wir die nach Bogenlänge parametrisierte Geodätische $c : [0, \pi] \to S^n$, $c(t) := \cos(t)e_1 + \sin(t)e_2$. Eine geodätische Variation f von c ist durch

$$f : (-\pi, \pi) \times [0, \pi] \to S^n, \quad f(s, t) := \cos(t)e_1 + \sin(t)(\cos(s)e_2 + \sin(s)e_3)$$

gegeben. Das zugehörige Variationsvektorfeld $J = \frac{\partial f}{\partial s}(0, \cdot)$ ist durch

$$J(t) = \sin(t)e_3$$

für $t \in [0, \pi]$ gegeben und nach Lemma 2.73 ein Jacobifeld. Es ist $J(0) = 0$ und $g_{st}(J(t), \dot{c}(t)) = \langle J(t), \dot{c}(t)\rangle = 0$ und weiter ist $X : [0, \pi] \to TS^n$, $X \equiv e_3$ das eindeutige parallele Vektorfeld längs c mit $X(0) = \frac{\nabla J}{dt}(0) = e_3$. Aus der Formel für J in Proposition 2.78 folgt daher $\kappa = 1$.

Zum Abschluss dieses Abschnittes und Kapitels geben hier eine geometrische Interpretation der Schnittkrümmung $K(\sigma)$ einer Tangentialebene $\sigma \subseteq T_pM$ in einem Punkt $p \in M$ einer riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g) als Abweichung der asymptotischen Länge eines *geodätischen Kreises um* $p \in M$ vom Radius $r > 0$ für $r \to 0$ vom Wert $2\pi r$ im euklidischen Fall. Dazu benötigen wir zunächst folgendes Lemma über die asymptotische Norm eines Jacobifeldes J längs einer Geodätischen $c : [0, a] \to M$ mit $J(0) = 0$:

Lemma 2.81. *Es sei (M, g) eine riemannsche Mannigfaltigkeit und $c : [0, a] \to M$ eine Geodätische von (M, g). Für $v := \dot{c}(0) \in T_pM$ und $w \in T_vT_pM = T_pM$ mit $\|w\|_p = 1$, $p := c(0)$, betrachten wir das Jacobifeld*

$$J : [0, a] \to TM, \qquad J(t) := d(\exp_p)_{tv}(tw)$$

längs c. Dann gilt

$$\|J(t)\|_{c(t)}^2 = t^2 - \frac{g_p(R_p(v, w)w, v)}{3} t^4 + S(t)$$

für eine Funktion S mit $\lim\limits_{t \to 0} \frac{S(t)}{t^4} = 0$.

Beweis. Wir berechnen die Taylorentwicklung der C^∞-Funktion

$$[0, a] \ni t \mapsto \|J(t)\|_{c(t)}^2 =: f(t) \in \mathbb{R}$$

in $t = 0$ und müssen also zeigen, dass $f(0) = f'(0) = 0$, $f''(0) = 2$, $f'''(0) = 0$ und $f''''(0) = -8g_p(R_p(v, w)w, v)$ gilt.
Zunächst ist $J(0) = d(\exp_p)_0(0) = 0$, woraus sich $f(0) = \|J(0)\|^2 = 0$ und wegen $f'(t) = 2g\left(\frac{\nabla J}{dt}(t), J(t)\right)$ für alle $t \in [0, a]$ auch $f'(0) = 0$ ergibt. Daneben ist

$$f''(t) = 2g\left(\frac{\nabla^2 J}{dt^2}(t), J(t)\right) + 2g\left(\frac{\nabla J}{dt}(t), \frac{\nabla J}{dt}(t)\right).$$

Da $\frac{\nabla J}{dt}(0) = w$ ist, folgt daraus wegen $J(0) = 0$ gerade $f''(0) = 2g_p(w, w) = 2\|w\|_p^2 = 2$. Daneben ist

$$f'''(t) = 2g\left(\frac{\nabla^3 J}{dt^3}(t), J(t)\right) + 6g\left(\frac{\nabla^2 J}{dt^2}(t), \frac{\nabla J}{dt}(t)\right).$$

Da $J(0) = 0$ gilt und sich aus der Jacobi-Gleichung $\frac{\nabla^2 J}{dt^2}(0) = -R(J(0), \dot{c}(0))\dot{c}(0) = 0$ ergibt, folgt hieraus auch $f'''(0) = 0$. Schließlich ist

$$\begin{aligned} f''''(0) &= 2g_p\left(\frac{\nabla^4 J}{dt^4}(0), J(0)\right) + 8g_p\left(\frac{\nabla^3 J}{dt^3}(0), \frac{\nabla J}{dt}(0)\right) + 6g_p\left(\frac{\nabla^2 J}{dt^2}(0), \frac{\nabla^2 J}{dt^2}(0)\right) \\ &= 8g_p\left(\frac{\nabla^3 J}{dt^3}(0), \frac{\nabla J}{dt}(0)\right) = -8_p\left(\frac{\nabla}{dt}(R(J, \dot{c})\dot{c})(0), w\right) \end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt die Jacobi-Gleichung für J benutzt haben. Wir zeigen nun, dass $\frac{\nabla}{dt}\left(R(J, \dot{c})\dot{c}\right)(0) = \left(R\left(\frac{\nabla J}{dt}, \dot{c}\right)\dot{c}\right)(0)$ gilt. Sei dazu $X \in \Gamma_c(TM)$ ein beliebiges Vektorfeld längs c. Dann gilt unter Benutzung der Symmetrien von R, der Metrizität von g und wegen $J(0) = 0$ gerade

$$\begin{aligned} g\left(\frac{\nabla}{dt}\left(R(J, \dot{c})\dot{c}\right), X\right)(0) &= \frac{d}{dt}g(R(J, \dot{c})\dot{c}), X)(0) - g\left(R(J(0), \dot{c}(0))\dot{c}(0), \frac{\nabla X}{dt}(0)\right) \\ &= \frac{d}{dt}g(R(X, \dot{c})\dot{c}), J)(0) \\ &= g\left(\frac{\nabla}{dt}(R(X, \dot{c})\dot{c})(0), J(0)\right) + g\left(R(X, \dot{c})\dot{c}, \frac{\nabla J}{dt}\right)(0) \\ &= g\left(R(X(0), \dot{c}(0))\dot{c}(0), \frac{\nabla J}{dt}(0)\right) = g\left(R(\frac{\nabla J}{dt}(0), \dot{c}(0))\dot{c}(0), X(0)\right). \end{aligned}$$

Dies zeigt $\frac{\nabla}{dt}\left(R(J, \dot{c})\dot{c}\right)(0) = \left(R\left(\frac{\nabla J}{dt}, \dot{c}\right)\dot{c}\right)(0)$. Somit ergibt sich unter Benutzung der Symmetrien von R gerade

$$\begin{aligned} f''''(0) &= -8g_p\left(\frac{\nabla}{dt}(R(J, \dot{c})\dot{c})(0), w\right) = -8g_p\left(\left(R\left(\frac{\nabla J}{dt}, \dot{c}\right)\dot{c}\right)(0), w\right) = -8g_p(R(w, v)v, w) \\ &= -8g_p(R(v, w)w, v), \end{aligned}$$

was wie oben ausgeführt die Behauptung zeigt. □

Wir kommen nun zur Definition eines *geodätischen Kreises*:

Definition 2.82. Es sei (M, g) eine riemannsche Mannigfaltigkeit, $p \in M$ und $\sigma \subseteq T_pM$ eine Tangentialebene in $p \in M$. Weiter sei $v, w \in \sigma \subseteq T_pM$ eine Orthomormalbasis von σ. Betrachte zunächst die differenzierbare Kurve $\gamma : [0, 2\pi] \to T_pM$, $\gamma(s) := \cos(s)v + \sin(s)w$ in T_pM. Für $r > 0$ klein genug ist dann die differenzierbare Kurve

$$\gamma_r : [0, 2\pi] \to M, \quad \gamma_r(s) := \exp_p(r\gamma(s))$$

in M wohldefiniert. Wir nennen γ_r einen *geodätischer Kreis (vom Radius $r > 0$ um p)*.

Bemerkung. Ein geodätischer Kreis ist im Allgemeinen keine(!!!) Geodätische, auch nicht bis auf Umparametrisierung.

Die schon oben angekündigte geometrische Interpretation der Schnittkrümmung lautet mathematisch präzise wie folgt:

Proposition 2.83. *Es sei (M,g) eine riemannsche Mannigfaltigkeit, $p \in M$ und $\sigma \subseteq T_pM$ eine Tangentialebene in $p \in M$. Dann gilt für die Länge $L(\gamma_r)$ eines geodätischen Kreises γ_r vom Radius $r > 0$ um p gerade*

$$L(r) := L(\gamma_r) = 2\pi r - \tfrac{\pi}{3}K(\sigma)r^3 + Q(r)$$

für eine Funktion Q mit $\lim\limits_{r\to 0} \frac{Q(r)}{r^3} = 0$.

Beweis. Wir nehmen im folgenden immer an, dass $r > 0$ klein genug ist, so dass γ_r wohldefiniert ist. Für solche $r > 0$ ist

$$L(r) = L(\gamma_r) = \int_0^{2\pi} \|\gamma_r'(s)\|_{\gamma_r(s)}\, ds = \int_0^{2\pi} \left\| d(\exp_p)_{r\gamma(s)}(r\gamma'(s)) \right\|_{\gamma_r(s)} ds.$$

Nun ist für fixes $s \in [0, 2\pi]$ nach Gleichung (2.5) das Vektorfeld

$$J_s(r) := d(\exp_p)_{r\gamma(s)}(r\gamma'(s))$$

längs $r \mapsto \exp_p(rc(s)) = \gamma_r(s)$ ein Jacobifeld mit $J_s(0) = 0$ längs dieser Kurve. Nach Lemma 2.81 ist daher

$$\|J_s(r)\|^2_{\gamma_r(s)} = r^2 - \frac{g_p(R(\tilde{v},\tilde{w})\tilde{w},\tilde{v})}{3} r^4 + S(r)$$

mit einer Funktion S mit $\lim\limits_{r\to 0} \frac{S(r)}{r^4} = 0$. Hierbei ist

$$\tilde{v} := \tfrac{\partial}{\partial r}\Big|_{r=0} (\exp_p(r\gamma(s))) = d(\exp_p)_0(\gamma(s)) = \gamma(s)$$

und $\tilde{w} := \frac{\nabla J_s}{dr}(0) = \gamma'(s)$ nach Beispiel 2.77 (d). Da $\gamma(s), \gamma'(s)$ für jedes $s \in [0, 2\pi]$ eine Orthonormalbasis von σ ist, folgt $g_p(R(\tilde{v},\tilde{w})\tilde{w},\tilde{v}) = K(\sigma)$, also

$$\|J_s(r)\|^2_{\gamma_r(s)} = r^2 - \frac{1}{3}K(\sigma)r^4 + S(r).$$

Wir bemerken, dass $\|J_s(r)\|_{\gamma_r(s)}$ für $r = 0$ im Allgemeinen nicht differenzierbar ist wegen $J_s(0) = 0$ und wir daher nicht einfach die Wurzel ziehen und eine Taylorentwicklung dieser machen können.
Daher berechnen wir nun zunächst

$$0 = \lim_{r\to 0} \frac{\|J_s(r)\|^2_{\gamma_r(s)} - r^2}{r^2} = \lim_{r\to 0} \frac{\|J_s(r)\|^2_{\gamma_r(s)}}{r^2} - 1,$$

was

$$\lim_{r\to 0} \left(\frac{\|J_s(r)\|_{\gamma_r(s)}}{r} \right)^2 = 1,$$

und somit, da der Bruch für $r > 0$ immer positiv ist, sogar

$$\lim_{r\to 0} \frac{\|J_s(r)\|_{\gamma_r(s)}}{r} = 1$$

impliziert. Mit diesem Ergebnis folgt nun

$$\begin{aligned}0 &= \lim_{r\to 0} \frac{\|J_s(r)\|^2_{\gamma_r(s)} - r^2 + \frac{1}{3}K(\sigma)r^4}{r^4} = \lim_{r\to 0} \frac{\|J_s(r)\|_{\gamma_r(s)} - r}{r^3} \frac{\|J_s(r)\|_{\gamma_r(s)} + r}{r} + \frac{1}{3}K(\sigma)\\ &= \frac{1}{3}K(\sigma) + 2\lim_{r\to 0} \frac{\|J_s(r)\|_{\gamma_r(s)} - r}{r^3},\end{aligned}$$

also

$$\lim_{r\to 0} \frac{\|J_s(r)\|_{\gamma_r(s)} - r}{r^3} = -\frac{1}{6}K(\sigma).$$

Dies zeigt, dass

$$\|J_s(r)\|_{\gamma_r(s)} = r - \frac{1}{6}K(\sigma)r^3 + \tilde{S}(s,r).$$

für eine Funktion $\tilde{S}(s,r)$ mit $\lim_{r\to 0} \frac{\tilde{S}(s,r)}{r^3} = 0$ für jedes $s \in [0, 2\pi]$ ist. Damit ergibt sich nun

$$\begin{aligned}L(r) &= \int_0^{2\pi} \left\| d(\exp_p)_{r\gamma(s)}(r\dot{\gamma}(s)) \right\|_{\gamma_r(s)} ds = \int_0^{2\pi} \|J_s(r)\|_{\gamma_r(s)}\, ds\\ &= \int_0^{2\pi} (r - \frac{1}{6}K(\sigma)r^3 + \tilde{S}(s,r))ds\\ &= 2\pi r - \frac{\pi}{3}K(\sigma)r^3 + Q(r)\end{aligned}$$

für eine Funktion Q mit $\lim_{r\to 0} \frac{Q(r)}{r^3} = 0$. □

Bemerkung 2.84. Für positive Schnittkrümmung ist also die Länge eines geodätischen Kreises vom Radius $r > 0$ für genügend kleines r kleiner als $2\pi r$, für negative Schnittkrümmung größer als $2\pi r$. Für Schnittkrümmung gleich 0 ist der Radius eines geodätischen Kreises gleich $2\pi r$ bis auf einen Fehlerterm der stärker als r^3 für $r \to 0$ abfällt.

Kapitel 3

Globale riemannsche Geometrie

3.1 Der Satz von Hadamard

In diesem Abschnitt beweisen wir den Satz von Hadamard, der in einer der möglichen äquivalenten Versionen besagt, dass bei jeder geodätisch vollständigen riemannsche Mannigfaltigkeit (M, g) mit *nichtpositiver Krümmung*, d.h. die Schnittkrümmung ist für jede Tangentialebene nicht positiv, die Abbildung $\exp_p : T_pM \to M$ für jedes $p \in M$ eine *differenzierbare Überlagerung* ist.
Insbesondere ist dann im Fall, dass M auch noch *einfach-zusammenhängend* (zur Definition, siehe weiter unten) ist, M diffeomorph zu $\mathbb{R}^n$. Damit $\exp_p : T_pM \to M$ eine differenzierbare Überlagerung wird, muss $\exp_p$ überall ein lokaler Diffeomorphismus sein, also $d(\exp_p)_v : T_pM \to T_{\exp_p(v)}M$ für jedes $v \in T_pM$ ein linearer Isomorphismus. Wir hatten in Beispiel 2.77 (b) bemerkt, dass diese Eigenschaft von $d(\exp_p)_v$ etwas mit weiteren Nullstellen von Jacobifeldern längs Geodätischer durch p die am Anfangspunkt Null sind, zu tun hat:

Definition 3.1. Es sei (M, g) eine riemannsche Mannigfaltigkeit, $c : [a, b] \to M$ eine nichtkonstante Geodätische von (M, g) sowie $p := c(a)$ und $q := c(b)$. Wir sagen, dass *q entlang c zu p konjugiert* ist, wenn es ein Jacobifeld $J \not\equiv 0$ längs c mit $J(a) = 0$ und $J(b) = 0$ gibt. Die Dimension des Raumes aller Jacobifelder J längs c mit $J(a) = 0$ und $J(b) = 0$ nennen wir die *Multiplizität* oder *Vielfachheit von q* als konjugierter Punkt.

Bemerkung 3.2. Nach Proposition 2.75 wissen wir, dass der Raum aller Jacobifelder längs c mit $J(a) = 0$ gerade n-dimensional ist, $n := \dim(M)$. Da weiter das Jacobifeld $\tilde{J}(t) := (t - a)\dot{c}(t)$ nur in $t = a$ gleich 0 ist, ist die Multiplizität jedes konjugierten Punktes maximal $n - 1$.

Beispiel 3.3. (a) Wir betrachten (S^n, g_{st}) und die Geodätische $c : [0, \pi] \to S^n$, $c(t) := \cos(t)e_1 + \sin(t)e_2$. In Beispiel 2.80 hatten wir gesehen, dass $J_3 : [0, \pi] \to TM$, $J_3(t) = \sin(t)e_3$ ein Jacobifeld ist, da J_3 das Variationsvektorfeld der geodätischen Variation

$$f_3 : (-\pi, \pi) \times [0, \pi] \to S^n, \quad f_3(s, t) := \cos(t)e_1 + \sin(t)(\cos(s)e_2 + \sin(s)e_3)$$

von c war. Genauso wie dort sieht man allgemein ein, dass für jedes $i = 3, \dots, n+1$ die Abbildung

$$f_i : (-\pi, \pi) \times [0, \pi] \to S^n, \quad f_i(s,t) := \cos(t)e_1 + \sin(t)(\cos(s)e_2 + \sin(s)e_i)$$

eine geodätischen Variation von c mit Variationsvektorfeld $J_i : [0, \pi] \to TM$, $J_i(t) = \sin(t)e_i$ ist. Offensichtlich gilt $J_i(0) = J_i(\pi) = 0$ für jedes $i = 3, \dots, n+1$, so dass $-e_1$ ein zu e_1 konjugierter Punkt der maximalen Vielfachheit $n-1$ ist.

(b) Ist (M,g) eine riemannsche Mannigfaltigkeit konstanter Krümmung $\kappa \leq 0$ und $c : [a,b] \to M$ eine Geodätische von (M,g), so ist nach Bemerkung 2.79 jedes Jacobifeld $\tilde{J}$ längs c mit $\tilde{J}(a) = 0$ von der Form $\tilde{J}(t) = \lambda J(t) + \mu(t-a)\dot{c}(t)$ für bestimmte $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, wobei

$$J(t) = \begin{cases} (t-a)X(t) & \text{, falls } \kappa = 0, \\ \frac{\sinh(\sqrt{-\kappa}(t-a))}{\sqrt{-\kappa}} X(t) & \text{, falls } \kappa < 0. \end{cases}$$

für alle $t \in [a,b]$ ist, $g_{c(t)}(J(t), \dot{c}(t)) = 0$ ist für alle $t \in [a,b]$ und X das eindeutige parallele Vektorfeld längs c mit $X(a) = \frac{\nabla J}{dt}(a)$ ist. Wir sehen, dass für $\tilde{J} \not\equiv 0$ das Jacobifeld $\tilde{J}$ keine weitere Nullstelle außer $t = a$ hat. Daher hat (M,g) gar keine konjugierten Punkte.

Dies gilt nach dem Satz von Hadamard weiter unten allgemein für riemannsche Mannigfaltigkeiten nichtpositiver Krümmung.

Wie weiter oben schon angedeutet, haben konjugierte Punkte etwas mit den Punkten $v \in T_pM$ zu tun, für die $d(\exp_p)_v : T_pM \to T_{\exp_p(v)}M$ nicht invertierbar ist:

Proposition 3.4. *Es sei $c : [0,a] \to M$ eine Geodätische in einer riemannschen Mannigfaltigkeit (M,g), $p := c(0)$ und $v := \dot{c}(0)$. Für $t_0 \in (0,a]$ ist der Punkt $c(t_0)$ entlang c konjugiert zu p genau dann, wenn t_0v ein kritischer Punkt von $\exp_p : T_pM \to M$ ist. Ist dies der Fall, so ist die Multiplizität von $c(t_0)$ als konjugierter Punkt zu p entlang c durch die Dimension des Kernes von $d(\exp_p)_{t_0v} : T_pM \to T_{c(t_0)}M$ gegeben.*

Beweis. Nach Gleichung (2.5) ist jedes Jacobifeld J längs c mit $J(0) = 0$ durch

$$J(t) = d(\exp_p)_{tv}(tw)$$

für $t \in [0,a]$ mit einem $w \in T_pM$ gegeben. Wir bemerken, dass $w = \frac{\nabla J}{dt}(0)$ nach Beispiel 2.77 (d) gilt. Nach Proposition 2.75 ist die Abbildung $J \mapsto \frac{\nabla J}{dt}(0)$ ein Isomorphismus zwischen dem $\mathbb{R}$-Vektorraum aller Jacobifelder J längs c mit $J(0) = 0$ und T_pM. Daher ist $c(t_0)$ ein konjugierter Punkt entlang c, zu p, d.h. es existiert ein Jacobifeld $J \not\equiv 0$ längs c mit $J(0) = 0$ und $J(t_0) = 0$, genau dann, wenn $d(\exp_p)_{t_0v}$ nicht invertierbar ist, also genau dann, wenn t_0v ein kritischer Punkt von $\exp_p$ ist. Weiter ist die Dimension des Kernes von $d(\exp_p)_{t_0v} : T_pM \to T_{c(t_0)}M$ deswegen gleich der Dimension aller $w \in T_pM$ mit $d(\exp_p)_{t_ov}(t_0w) = 0$, also gleich der Dimension aller Jacobifelder J längs c mit $J(0) = 0$ und $J(t_0) = 0$. Dies zeigt die Behauptung. $\square$

Wir kommen nun zur ersten Version des Satzes von Hadamard:

Satz 3.5 (Satz von Hadamard (erste Version))**.** *Es sei (M, g) eine geodätisch vollständige riemannsche Mannigfaltigkeit mit* nichtpositiver Krümmung, *d.h. es ist $K(\sigma) \leq 0$ für jede Tangentialebene von M. Dann hat (M, g) keine konjugierten Punkte und $\exp_p : T_pM \to M$ ist für jedes $p \in M$ ein lokaler Diffeomorphismus.*

Beweis. Wir bemerken, dass wegen Proposition 3.4 und des Umkehrsatzes die zweite Aussage aus der ersten folgt.
Sei also $p \in M$ gegeben und sei $c : \mathbb{R} \to M$ eine beliebige Geodätische von (M, g) mit $c(0) = p$ (wir können durch eine affin-lineare Umparametrisierung von c immer voraussetzen, dass c bei 0 durch p geht).
Sei weiter $J \in \Gamma_c(TM)$ ein Jacobifeld längs c mit $J(0) = 0$ und $J \not\equiv 0$. Setzen wir $f : [0, a] \to [0, \infty)$, $f(t) := \|J(t)\|^2_{c(t)}$, so folgt also $f(0) = 0$ und unter Benutzung der Jacobi-Gleichung für J weiter

$$\begin{aligned}
\ddot{f}(t) &= \frac{d}{dt}\left(2g_{c(t)}\left(\tfrac{\nabla J}{dt}(t), J(t)\right)\right) = 2g_{c(t)}\left(\tfrac{\nabla^2 J}{dt^2}(t), J(t)\right) + 2g_{c(t)}\left(\tfrac{\nabla J}{dt}(t), \tfrac{\nabla J}{dt}(t)\right) \\
&= -2g_{c(t)}\left(R(J(t), \dot{c}(t))\dot{c}(t), J(t)\right) + 2\left\|\tfrac{\nabla J}{dt}(t)\right\|^2_{c(t)} \\
&\geq -2g_{c(t)}\left(R(J(t), \dot{c}(t))\dot{c}(t), J(t)\right)
\end{aligned}$$

für jedes $t \in \mathbb{R}$. Nun ist aber $g_{c(t)}\left(R(J(t), \dot{c}(t))\dot{c}(t), J(t)\right)$ gleich 0 falls $\dot{c}(t)$ und $J(t)$ linear abhängig sind und sonst bis ein positives Vielfaches gleich $K(\sigma)$ für die Tangentialebene $\sigma := \operatorname{span}\{\dot{c}(t), J(t)\}$ in $T_{c(t)}M$. Da $K(\sigma) \leq 0$ ist, erhalten wir also in jedem Fall $-2g_{c(t)}\left(R(J(t), \dot{c}(t))\dot{c}(t), J(t)\right) \geq 0$, also $\ddot{f}(t) \geq 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Also ist f konvex, d.h. es ist

$$f\left(s\tilde{t} + (1-s)\hat{t}\right) \leq sf(\tilde{t}) + (1-s)f(\hat{t})$$

für alle $s, \tilde{t}, \hat{t} \in \mathbb{R}$. Da $J \not\equiv 0$ ist, existiert weiter ein $t_0 \in \mathbb{R}$ mit $f(t_0) > 0$.
Angenommen, es gäbe nun einen konjugierten Punkt $c(t_1)$ entlang c zu p, $t_1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Dann gilt für $s = 1 - \frac{t_0}{t_1}$ gerade $(1-s) \cdot t_1 = \frac{t_0}{t_1} \cdot t_1 = t_0$ und somit

$$f(t_0) = f(s \cdot 0 + (1-s) \cdot t_1)) \leq sf(0) + (1-s)f(t_1) = 0,$$

ein Widerspruch. Also hat (M, g) keine konjugierten Punkte. $\square$

Bemerkung 3.6. Der Beweis von Satz 3.5 zeigt, dass auch eine geodätisch nicht(!!!) vollständige riemannsche Mannigfaltigkeit keine konjugierten Punkte besitzt und $\exp_p : \mathcal{D}_p \to M$ ein lokaler Diffeomorphismus ist. Die Vollständigkeit benötigt man nur dazu, dass $\exp_p$ für jedes $p \in M$ auf ganz T_pM definiert ist.

Der Vollständigkeit halber wiederholen wir die folgenden, schon im Rahmen der Übungen eingeführten, Begriffe der Überlagerungstheorie und beschränken uns direkt auf den differenzierbaren Fall:

Definition 3.7. Eine *differenzierbare Überlagerung* ist eine surjektive differenzierbare Abbildung $\pi : N \to M$ zwischen zwei zusammenhängenden Mannigfaltigkeiten N und M, so dass es um jeden Punkt $p \in M$ eine offene Umgebung U von p in M gibt, so dass $\pi^{-1}(U)$ eine Vereinigung offener disjunkter Mengen von N ist und die Einschränkung von π auf jede dieser offenen Mengen einen Diffeomorphismus von dieser offenen Mengen auf U liefert.
Es sei nun $\pi : N \to M$ eine differenzierbare Überlagerung. Dann nennen wir einen Diffeomorphismus $f : N \to N$ mit $\pi \circ f = \pi$ eine *Decktransformation von* π und bezeichnen die Gruppe aller Decktransformationen mit $\mathrm{Deck}(\pi)$. Ist weiter h eine riemannsche Metrik auf N und g eine riemannsche Metrik auf M mit $h = \pi^* g$, so nennen wir π eine *riemannsche Überlagerung.*

Eine riemannsche Überlagerung ist offensichtlich eine surjektive lokale Isometrie. Die Umkehrung dieser Aussage gilt (unter einer kleinen Zusatzannahme) auch:

Proposition 3.8. *Es seien (N, h) und (M, g) riemannsche Mannigfaltigkeiten sowie $\pi : N \to M$ eine surjektive lokale Isometrie. Ist (N, h) zusammenhängend und geodätisch vollständig, so ist π eine riemannsche Überlagerung.*

Beweis. Wir bemerken zunächst, dass auch $M = \pi(N)$ als stetiges Bild der zusammenhängenden Mannigfaltigkeit N auch zusammenhängend ist. Weiter bildet π als lokale Isometrie nach Blatt 9, Aufgabe 2 (c) Geodätische von (N, h) auf Geodätische von (M, g) ab. Da π eine lokaler Diffeomorphismus ist, bekommt man so alle Geodätischen von (M, g) und dav (N, h) geodätisch vollständig ist, ist also auch (M, g) geodätisch vollständig.
Wir fixieren nun $p \in M$ und $q \in \pi^{-1}(p)$. Aus der Tatsache, dass Geodätische von (N, h) mittels π auf Geodätische von (M, g) abgebildet werden, folgt nun, dass für jedes $v \in T_qN$ gerade $\pi(\exp_q(v)) = \pi(c_v(1)) = c_{d\pi_p(v)}(1) = \exp_p(d\pi_p(v))$ gilt ($\pi \circ c_v$ und $c_{d\pi_p(v)}$ sind beides Geodätische c von (M, g) mit $c(0) = p$ und $\dot{c}(0) = d\pi_p(v)$, stimmen also daher überein), d.h. dass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} T_qN \arrow[r, "\exp_q"] \arrow[d, "d\pi_q"'] & N \arrow[d, "\pi"] \\ T_pM \arrow[r, "\exp_p"'] & M \end{tikzcd}$$

Wir wählen nun $\epsilon > 0$ so klein, dass $\exp_p|_{B_\epsilon^{g_p}(0)} : B_\epsilon^{g_p}(0) \to M$ ein Diffeomorphismus aufs Bild $\exp_p(B_\epsilon^{g_p}(0)) = B_\epsilon^{d_g}(p)$ ist. Das obige kommutative Diagramm liefert uns, dass dann auch $\exp_q|_{B_\epsilon^{h_q}(0)} : B_\epsilon^{h_q}(0) \to N$ für jedes $q \in \pi^{-1}(p)$ ein Diffeomorphismus aufs Bild $\exp_q(B_\epsilon^{h_q}(0)) = B_\epsilon^{d_h}(q)$ ist (da $d\pi_q : T_qN \to T_pM$ invertierbar und sogar eine lineare Isometrie zwischen (T_qN, h_q) und (T_pM, g_p) ist). Daher ist $\pi|_{B_\epsilon^{d_h}(q)}$ injektiv und bildet surjektiv auf $B_\epsilon^{d_g}(p)$ ab und ist daher nach dem obigen Diagramm ein Diffeomorphismus von $B_\epsilon^{d_h}(q)$ nach $B_\epsilon^{d_g}(p)$

Wir indizieren nun die Element der Urbildmenge $\pi^{-1}(p)$ mit Indizes aus einer Indexmenge I, d.h. es soll $\pi^{-1}(p) = \{q_i | i \in I\}$ gelten, und behaupten, dass dann die Gleichheit

$$\pi^{-1}(B_\epsilon^{d_g}(p)) = \bigcup_{i \in I} B_\epsilon^{d_h}(q_i)$$

gilt. Die obigen Überlegungen zeigen die Gültigkeit der Inklusion „$\supseteq$ “.
Sei also $\tilde{q} \in \pi^{-1}(B_\epsilon^{d_g}(p))$ gegeben. Dann ist $\pi(\tilde{q}) \in B_\epsilon^{d_g}(p) = \exp_p(B_\epsilon^{g_p}(0))$ und es existiert daher ein $\tilde{v} \in B_\epsilon^{g_p}(0) \subseteq T_pM$ mit $\exp_p(\tilde{v}) = \pi(\tilde{q})$. Die differenzierbare Kurve $c : \mathbb{R} \to (M, g)$, $c(t) := \exp_p((1-t)\tilde{v})$ ist eine Geodätische von (M, g) mit $c(0) = \pi(\tilde{q})$ und $c(1) = p$. Es ist also $\exp_{\pi(\tilde{q})}(v) = c(1) = p$ für $v := \dot{c}(0) \in B_\epsilon^{g_p}(0)$ (da für c als Geodätische die Norm von c konstant ist und $c(1) = -\tilde{v}$ ist) und somit $c(t) = \exp_{\pi(\tilde{q})}(tv)$ für jedes $t \in \mathbb{R}$. Setze nun $w := (d\pi_{\tilde{q}})^{-1}(v) \in T_{\tilde{q}}N$ und $\gamma : \mathbb{R} \to N$, $\gamma(t) = \exp_{\tilde{q}}(tw)$. Da γ eine Geodätische von (N, h) und c eine Geodätische von (M, g) ist und $(\pi \circ \gamma)(0) = \pi(\gamma(0)) = \pi(\tilde{q}) = c(0)$ als auch $\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(\pi \circ \gamma) = d\pi_{\tilde{q}}(\dot{\gamma}(0)) = d\pi_{\tilde{q}}(w) = v = \dot{c}(0)$ gilt und auch $\pi \circ \gamma$ nach Blatt 9, Aufgabe 2 (c) eine Geodätische von (M, g) ist, folgt $\pi \circ \gamma = c$. Insbesondere ist $\pi(\gamma(1)) = c(1) = p$, also $\gamma(1) = q_{i_0}$ für ein $i_0 \in I$. Da π eine lokale Isometrie ist, haben wir $L(\gamma|_{[0,1]}) = L(c|_{[0,1]}) < \epsilon$ und somit also $\tilde{q} = \gamma(0) \in B_\epsilon^{d_h}(\gamma(1)) = B_\epsilon^{d_h}(q_{i_0})$, d.h. $\tilde{q} \in \bigcup_{i \in I} B_\epsilon^{d_h}(q_i)$ und die umgekehrte Inklusion $\pi^{-1}(B_\epsilon^{d_g}(p)) \subseteq \bigcup_{i \in I} B_\epsilon^{d_h}(q_i)$ gilt auch.
Nun ist $d_h(q_i, q_j) \geq \epsilon$ für $i, j \in I$, $i \neq j$, da sonst $q_j \in B_\epsilon^{d_h}(q_i)$ wäre und somit $\pi|_{B_\epsilon^{d_h}(q_i)}$ wegen $\pi(q_j) = p = \pi(q_i)$ nicht mehr injektiv wäre. Damit sind aber nach der Dreiecksungleichung die Bälle $\left(B_{\frac{\epsilon}{2}}^{d_h}(q_i)\right)_{i \in I}$ vom Radius $\frac{\epsilon}{2}$ paarweise disjunkt und es gilt natürlich immer noch $\pi^{-1}\left(B_{\frac{\epsilon}{2}}^{d_g}(p)\right) = \bigcup_{i \in I} B_{\frac{\epsilon}{2}}^{d_h}(q_i)$. Da $\pi|_{B_{\frac{\epsilon}{2}}^{d_h}(q_i)} : B_{\frac{\epsilon}{2}}^{d_h}(q_i) \to B_{\frac{\epsilon}{2}}^{d_g}(p)$ für jedes $i \in I$ ein Diffeomorphismus ist und nach Voraussetzung $h = \pi^* g$ gilt, ist $\pi : (N, h) \to (M, g)$ wie behauptet eine riemannsche Überlagerung. $\square$

Damit können wir nun folgende stärkere zweite Version des Satzes von Hadamard beweisen:

Satz 3.9 (Satz von Hadamard (zweite Version))**.** *Es sei (M, g) eine geodätisch vollständige riemannsche Mannigfaltigkeit mit nichtpositiver Krümmung. Dann ist $\exp_p : T_pM \to M$ für jedes $p \in M$ eine differenzierbare Überlagerung.*

Beweis. Sei $p \in M$ fix. Nach der ersten Version des Satzes von Hadamard (Satz 3.5) wissen wir bereits, dass $\exp_p : T_pM \to M$ ein lokaler Diffeomorphismus ist. Versehen wir T_pM mit der Metrik $h := \exp_p^* g$, so ist $\exp_p : (T_pM, h) \to (M, g)$ eine lokale Isometrie. Nach dem Satz von Hopf-Rinow gibt es aufgrund der geodätischen Vollständigkeit von (M, g) zu jedem Punkt $q \in M$ eine längenminimierende Geodätische von p nach q. Insbesondere ist also $q = \exp_p(v)$ für ein $v \in T_pM$. Dies zeigt die Surjektivität von $\exp_p : T_pM \to M$.
Wir müssen noch die geodätische Vollständigkeit von (T_pM, h) zeigen, um Proposition 3.8 anwenden zu können. Betrachte dazu die differenzierbaren Kurven $\gamma_v : \mathbb{R} \to T_pM$,

$\gamma_v(t) := tv$. Diese differenzierbaren Kurven werden unter $\exp_p$ auf Geodätische von (M, g) abgebildet und müssen, da $\exp_p$ eine lokale Isometrie ist, somit nach Blatt 9, Aufgabe 2 (c) selbst Geodätische von (T_pM, h) sein. Da für jedes $v \in T_pM = T_{0_p}M$ die Geodätische γ_v von (T_pM, h) gerade $\gamma_v(0) = 0_p$ und $\dot\gamma_v(0) = v$ erfüllt, sind dies alle Geodätische durch 0_p und diese existieren für alle Zeiten $t \in \mathbb{R}$. Nach dem Satz von Hopf-Rinow ist daher (T_pM, h) geodätisch vollständig, so dass wir Proposition 3.8 anwenden können und diese Proposition die Behauptung zeigt. $\square$

Um die dritte Version des Satzes von Hadamard formulieren zu können, müssen wir die *Fundamentalgruppe von M* einführen:

Definition 3.10. Es sei M eine Mannigfaltigkeit, $p \in M$ fix und $c_0, c_1 : [0,1] \to M$ zwei stetige *in p geschlossene* Kurven, d.h. es gilt $c_0(0) = c_0(1) = c_1(0) = c_1(1) = p$. Dann nennen wir c_0 und c_1 *zueinander homotop (unter Festhaltung der Endpunkte)*, wenn es eine stetige Abbildung $H : [0,1] \times [0,1] \to M$ mit $H(0,t) = c_0(t)$, $H(1,t) = c_1(t)$ und $H(s,0) = H(s,1) = p$ für alle $t, s \in [0,1]$ gibt. In diesem Fall schreiben wir $c_0 \sim c_1$. Man zeigt leicht, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller in p geschlossenen Kurven ist. Dann ist die *Fundamentalgruppe $\pi_1(M, p)$ von M in p* definiert als die Menge

$$\pi_1(M,p) := \{ c : [0,1] \to M |\, c \text{ stetig},\ c(0) = c(1) = p\} / \sim .$$

Diese Menge wird zu einer Gruppe, indem wir die Gruppenmultiplikation $\cdot : \pi_1(M,p) \times \pi_1(M,p) \to \pi_1(M,p)$ auf $\pi_1(M,p)$ durch $[c_1] \cdot [c_2] := [c_1 \star c_2]$ mit

$$(c_1 \star c_2)(t) := \begin{cases} c_1(2t) & \text{, falls } t \in [0, \frac{1}{2}], \\ c_2(2t-1) & \text{, falls } t \in [\frac{1}{2}, 1], \end{cases}$$

für $c_1, c_2 \in \pi_1(M,p)$ definieren (Übung!!!). Dabei ist das neutrale Element durch die Äquivalenzklasse $[p]$ der konstanten Punktkurve $p : [0,1] \to M$, $p(t) = p$ für alle $t \in [0,1]$ gegeben und das inverse Element von $[c]$ ist die Äquivalenzklasse $[c^-]$ der umgekehrt durchlaufenen Kurve $c^- : [0,1] \to M$, $c^-(t) := c(1-t)$ für $t \in [0,1]$.
Ist M zusammenhängend, so zeigt man leicht, dass die Fundamentalgruppen $\pi_1(M, p_1)$ und $\pi_1(M, p_2)$ von M in verschiedenen Punkten $p_1, p_2 \in M$ zueinander isomorph sind und man kann dann von *der Fundamentalgruppe von M* sprechen, die wir durch $\pi_1(M)$ notieren.
Wir nennen eine zusammenhängende Mannigfaltigkeit *einfach-zusammenhängend*, wenn $\pi_1(M) = \{e\}$ ist, d.h. wenn jede in einem Punkt $p \in M$ geschlossene Kurve c homotop zur konstanten Punktkurve p ist.

Bemerkung. $\pi_1(M,p)$ wird oft auch als *erste Homotopiegruppe von M in p* bezeichnet, was auch den Index „1" erklärt. Durch Betrachtung stetiger Abbildungen $f : [0,1]^n \to M$, so dass der gesamte Rand $\partial\,[0,1]^n$ von $[0,1]^n$ nach p abgebildet wird, kann man analog allgemein die *n-te Homotopiegruppe $\pi_n(M,p)$ von M in p* für jedes $n \in \mathbb{N}$ definieren.

Wir geben einige Beispiele einfach-zusammenhängender Mannigfaltigkeiten:

Beispiel 3.11. (a) $\mathbb{R}^n$ ist einfach-zusammenhängend: Eine in 0 geschlossene stetige Kurve $c : [0,1] \to M$ ist mittels der stetigen Abbildung $H : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}^n$, $H(s,t) := (1-s)c(t)$ homotop zur konstanten Punktkurve 0.

(b) Für $n \geq 2$ ist die Sphäre S^n einfach-zusammenhängend:

Leider können wir hier kein vollständiges Argument liefern. Das Problem ist dabei die Existenz stetiger Kurven $c : [0,1] \to S^n$ mit $c([0,1]) = S^n$. Ist jedoch $c([0,1]) \neq S^n$, so gibt es also einen Punkt $p \in S^n$ mit $c([0,1]) \subseteq S^n \setminus \{p\}$. Da $S^n \setminus \{p\}$ mittels der stereographischen Projektion von p aus homöomorph zu $\mathbb{R}^n$ ist, folgt daher direkt aus (a), dass c homotop zur konstanten Punktkurve $c(0)$ ist.

Jede zusammenhängende Mannigfaltigkeit besitzt eine im folgenden Sinne eindeutige differenzierbare Überlagerungen $\pi : \widetilde{M} \to M$, so dass $\widetilde{M}$ einfach-zusammenhängend ist, für die dann auch folgende Beziehungen zwischen $\pi_1(M)$, $\mathrm{Deck}(\pi)$ und der Faser von π über einem Punkt gelten:

Proposition 3.12. *Es sei M eine zusammenhängende Mannigfaltigkeit. Dann existiert eine differenzierbare Überlagerungen $\pi : \widetilde{M} \to M$, so dass $\widetilde{M}$ eine einfach-zusammenhängende Mannigfaltigkeit ist. Diese differenzierbare Überlagerung ist eindeutig in dem Sinne, dass für jede weitere differenzierbare Überlagerungen $p : N \to M$ mit N eine einfach-zusammenhängende Mannigfaltigkeit ein Diffeomorphismus $F : \widetilde{M} \to N$ mit $\pi = p \circ F$ existiert. Weiter ist die Gruppe der Decktransformationen $\mathrm{Deck}(\pi)$ isomorph zur Fundamentalgruppe $\pi_1(M)$ von M und für jeden Punkt $p \in M$ bijektiv zur Faser $\pi^{-1}(p)$ über p, wobei eine Bijektion durch die Abbildung $\mathrm{Deck}(\pi) \ni F \mapsto F(q) \in \pi^{-1}(q)$ mit einem beliebigen $q \in \pi^{-1}(p)$ gegeben ist.*

Beweis. Für einen Beweis dieser Aussagen verweisen wir auf [Lee2] und [War]. □

Definition 3.13. Für eine zusammenhängende Mannigfaltigkeit M nennen wir eine differenzierbare Überlagerung $\pi : \widetilde{M} \to M$ mit $\widetilde{M}$ einfach-zusammenhängend eine *universelle Überlagerung von M*. Wegen der Eindeutigkeitsaussage in Proposition 3.12 reden wir oft auch von *der* universellen Überlagerung von M. Ist g eine riemannsche Metrik auf M, so ist $\tilde{g} := \pi^* g$ eine riemannsche Metrik auf $\widetilde{M}$, so dass $\pi : (\widetilde{M}, \widetilde{g}) \to (M, g)$ eine riemannsche Überlagerung wird, die sogenannte *universelle riemannsche Überlagerung*. Oft nennen wir auch $\widetilde{M}$ bzw. $(\widetilde{M}, \widetilde{g})$ die *universelle* bzw. *universelle riemannsche Überlagerung* von M bzw. (M, g).

Bemerkung. Die universelle Überlagerung $\pi : \widetilde{M} \to M$ einer zusammenhängenden Mannigfaltigkeit hat die „universelle Eigenschaft", dass es zu jeder differenzierbaren Überlagerung $p : N \to M$ eine differenzierbare Überlagerung $\tilde{p} : \widetilde{M} \to N$ mit $\pi = p \circ \tilde{p}$ gibt. Mit dieser Eigenschaft lässt sich auch die in Proposition 3.12 erwähnte Eindeutigkeit der universellen Überlagerung zeigen.

Mit Proposition 3.12 können wir nun auch die Fundamentalgruppe von S^1 bestimmen:

Beispiel 3.14. Da $\mathbb{R}^n$ nach Beispiel 3.11 (a) einfach-zusammenhängend ist, ist die natürliche Projektion $\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n = T^n$ die universelle Überlagerung von T^n.

Nach Blatt 1, Aufgabe 5 (b) ist die Gruppe der Decktransformationen Deck(π) dieser differenzierbaren Überlagerung gleich $\mathbb{Z}^n$ (dort wurde dies nur für Decktransformationen gezeigt, die Homöomorphismen sind. Jedoch ist eine solche Decktransformation gerade durch die Translationen mit einem Element aus $\mathbb{Z}^n$ gegeben und daher sogar ein Diffeomorphismus) und daher gilt $\pi_1(T^n) \cong \mathbb{Z}^n$ nach Proposition 3.12. Insbesondere ist also $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$ und daher S^1 im Gegensatz zu den höherdimensionalen Sphären nicht(!!!) einfach-zusammenhängend.

Weiter ergibt sich nun die folgende dritte Version des Satzes von Hadamard:

Satz 3.15 (Satz von Hadamard (dritte Version))**.** *Es sei (M, g) eine einfach-zusammenhängende geodätisch vollständige riemannsche Mannigfaltigkeit mit nichtpositiver Krümmung. Dann ist $\exp_p : T_pM \to M$ für jeden Punkt $p \in M$ ein Diffeomorphismus.*

Beweis. Sei $p \in M$ fix. Nach der zweiten Version des Satzes von Hadamard (Satz 3.15) ist $\exp_p : T_pM \to M$ eine Überlagerung. Da T_pM diffeomorph zu $\mathbb{R}^n$ ist, ist T_pM nach Beispiel 3.11 (a) einfach-zusammenhängend. Daher ist $\exp_p : T_pM \to M$ eine universelle Überlagerung von M. Weiter ist $\mathrm{id}_M : M \to M$ wegen M einfach-zusammenhängend auch eine universelle Überlagerung von M und nach Proposition 3.12 existiert ein Diffeomorphismus $F : T_pM \to M$ mit $F = \mathrm{id}_M \circ F = \exp_p$, d.h. $\exp_p : T_pM \to M$ ist ein Diffeomorphismus. $\square$

Bemerkung 3.16.

- Die dritte Version des Satzes von Hadamard (Satz 3.15) besagt also, dass jede einfach-zusammenhängende geodätisch vollständige riemannsche Mannigfaltigkeit mit nichtpositiver Krümmung diffeomorph zu $\mathbb{R}^n$ ist.
- Weiter besagt die dritte Version des Satzes von Hadamard (Satz 3.15) dass es zu je zwei Punkten p und q in einer einfach-zusammenhängenden geodätisch vollständigen riemannschen Manigfaltigkeit mit nichtpositiver Krümmung eine, bis auf affin-lineare Umparametrisierungen, eindeutige Geodätische zwischen diesen beiden Punkten gibt. Diese ist dann nach dem Satz von Hopf-Rinow (Satz 2.53) längenminimierend.
- Im übernächsten Abschnitt werden wir zeigen, dass jede einfach-zusammenhängende geodätisch vollständige riemannsche Mannigfaltigkeiten (M, g) mit konstanter Krümmung $\kappa \in \mathbb{R}$ isometrisch zu einem geeignete Modellraum mit dieser konstanten Krümmung κ ist. Dazu verwenden wir im Fall $\kappa \leq 0$ auch die dritte Version des Satzes von Hadamard (Satz 3.15). Tatsächlich können wir diesen Satz und eine Übungsaufgabe schon an dieser Stelle verwenden, um zu zeigen, dass eine einfach-zusammenhängende geodätisch vollständige riemannsche Mannigfaltigkeit (M, g) die flach ist, d.h. konstante Krümmung gleich 0 hat, isometrisch zu $(\mathbb{R}^n, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ist:

  Für eine solche riemannsche Mannigfaltigkeit ist nach der dritten Version des Satzes von Hadamard (Satz 3.15) $\exp_p : T_pM \to M$ ein Diffeomorphismus. Daher ist nach Blatt 12, Aufgabe 3 für jedes $\epsilon > 0$ die Abbildung

$$\exp_p|_{B_\epsilon^{g_p}(0)} : (B_\epsilon^{g_p}(0), g_p) \to \left(\exp_p\left(B_\epsilon^{g_p}(0)\right), g|_{\exp_p\left(B_\epsilon^{g_p}(0)\right)}\right)$$

eine Isometrie, also $\exp_p : (T_pM, g_p) \to (M, g)$ eine Isometrie und folglich (M, g) isometrisch zu (T_pM, g_p), was natürlich isometrisch zu $(\mathbb{R}^n, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ist.

- Wir bemerken, dass für die Existenz einer, bis auf affin-lineare Umparametrisierungen, eindeutigen (!!!) Geodätischen zwischen je zwei Punkten einer einfach-zusammenhängenden geodätisch vollständigen riemannschen Mannigfaltigkeit die Krümmungsbedingung entscheidend ist. Denn für (S^n, g_{st}) gilt diese Aussage nicht, da man Großkreise in zwei verschiedenen Richtungen durchlaufen kann. Trotzdem ist aufgrund der Kompaktheit von S^n die riemannsche Mannigfaltigkeit (S^n, g_{st}) mit konstanter Krümmung gleich 1 nach Korollar 2.55 geodätisch vollständig ist und für $n \geq 2$ nach Beispiel 3.11 (b) auch einfach-zusammenhängend.

- Weiter kann nach der dritten Version des Satzes von Hadamard (Satz 3.15) S^n für $n \geq 2$ gar keine riemannsche Metrik g mit nichtpositiver Krümmung tragen, denn eine solche wäre wiederum nach Korollar 2.55 geodätisch vollständig und somit S^n diffeomorph zu $\mathbb{R}^n$, ein Widerspruch.

- Im nächsten Abschnitt beschäftigen wir uns mit der Frage, was man über riemannsche Mannigfaltigkeiten (M, g) mit *positiver Krümmung*, d.h. mit $K(\sigma) > 0$ für alle Tangentialebenen σ von M, sagen kann. Dort gelten längst nicht so strenge Restriktionen an die Topologie wie im Fall von nichtpositiver Krümmung und tatsächlich ist die Frage nach der Struktur kompakter Mannigfaltigkeiten mit positiver Krümmung eines der wichtigsten offenen Probleme der riemannschen Geometrie. Z.B. ist nicht klar, ob $S^2 \times S^2$ eine solche riemannsche Metrik besitzt oder nicht.

3.2 Der Satz von Bonnet-Myers

In diesem Abschnitt beweisen wir den Satz von Bonnet-Myers. Dieser macht eine Aussage über die Topologie einfach-zusammenhängender geodätisch vollständiger riemannscher Mannigfaltigkeiten mit positiver, nach unten beschränkter *Ricci-Krümmung*, welche eine Art Mittelung über bestimmte Schnittkrümmungen in einem Punkt darstellt. Eine genaue Definition wird weiter unten gegeben.
Zum Beweis benötigen wir zwei *Variationsformeln* für das *Energiefunktional*, welche uns unter anderem eine weitere Charakterisierung von Geodätischen liefern wird:

Definition 3.17. Es sei $c : [a, b] \to M$ eine differenzierbare Kurve in einer riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g). Dann ist die *Energie $E(c)$ von c* definiert als

$$E(c) := \int_a^b \|\dot{c}(t)\|^2_{c(t)}\, dt.$$

Das *Energiefunktional (von (M, g))* ist die Abbildung, die einer Kurve c wie oben den Wert $E(c)$ zuordnet.

Bemerkung 3.18. Mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung für Integrale (d.h. auf $L^2([a,b])$) gilt

$$\begin{aligned} L(c)^2 &= \left(\int_a^b \|\dot{c}(t)\|_{c(t)}\, dt\right)^2 = \left(\int_a^b 1 \cdot \|\dot{c}(t)\|_{c(t)}\, dt\right)^2 \\ &\leq \int_a^b 1^2 dt \cdot \int_a^b \|\dot{c}(t)\|_{c(t)}^2\, dt = (b-a) \cdot E(c) \end{aligned}$$

Gleichheit gilt dabei genau dann, wenn die Funktionen $\|\dot{c}(t)\|_{c(t)}$ und 1 auf $[a,b]$ proportional zueinander sind, wenn also c proportional zur Bogenlänge parametrisiert ist.
Viele der Aussagen über das Energiefunktional in diesem Abschnitt gelten entsprechend auch für das *Längenfunktional* $c \mapsto L(c)$, wenn wir uns auf *reguläre* differenzierbare Kurven c beschränken, d.h. solche mit $\dot{c}(t) \neq 0$ für alle $t \in [a,b]$. Ist nämlich $\dot{c}(t) = 0$ für ein $t \in [a,b]$, so ist die Abbildung $[a,b] \ni t \mapsto \|\dot{c}(t)\|_{c(t)} \in \mathbb{R}$ dort nicht differenzierbar. Daher ist es technisch einfacher mit dem Energiefunktional statt dem Längenfunktional zu arbeiten. Außerdem hat das Energiefunktional den Vorteil, dass es nicht(!!!) invariant unter beliebigen Umparametrisierungen ist und man daher Geodätische direkt und nicht nur bis auf Umparametrisierung als *kritische Punkte* dieses Funktionals bekommt.

Die Ungleichung in Bemerkung 3.18 zwischen der Länge und der Energie einer differenzierbaren Kurve impliziert, dass längenminimierende Geodätische zwischen zwei Punkten auch energieminimierend sind:

Lemma 3.19. *Es sei (M,g) eine riemannsche Mannigfaltigkeit, $p,q \in M$ mit $p \neq q$ und $c : [a,b] \to M$ eine längenminimierende Geodätische zwischen p und q. Dann gilt für jede andere differenzierbare Kurve γ von p nach q die Ungleichung $E(c) \leq E(\gamma)$, wobei Gleichheit genau dann gilt, wenn γ eine die Länge zwischen p und q minimierende Geodätische ist.*

Beweis. Da sich durch eine affin-lineare Parametrisierung sowohl $E(\gamma)$ als auch $L(\gamma)$ nicht ändern, können wir o.B.d.A annehmen, dass γ auch auf dem Intervall $[a,b]$ definiert ist. Nach Bemerkung 3.18 gilt dann $E(\gamma) \geq \frac{L(\gamma)}{b-a} \geq \frac{L(c)}{b-a} = E(c)$, da Geodätische proportional zur Bogenlänge parametrisiert sind. Dabei gilt Gleichheit genau dann, wenn $L(\gamma) = L(c) = d(p,q)$, also γ die Länge zwischen p und q minimiert, und $E(\gamma) = \frac{L(\gamma)}{b-a}$ ist, also γ nach Bemerkung 3.18 proportional zur Bogenlänge parametrisiert ist. Nach Satz 2.51 ist dies genau dann der Fall, wenn γ eine längenminimierende Geodätische von p nach q ist. $\square$

Um kritische Punkte des Energiefunktionals zu definieren und um die Variationsformeln zu formulieren und zu beweisen, müssen wir erstmal in Verallgemeinerung von Definition 2.71 folgende Begriffe einführen:

Definition 3.20. Es sei $c : [a,b] \to M$ eine differenzierbare Kurve in einer riemannschen Mannigfaltigkeit (M,g). Eine differenzierbare Abbildung $(-\epsilon,\epsilon) \times [a,b] \ni (t,s) \mapsto f(s,t) \in M$ mit $f_0 := f(0,\cdot) = c$ heißt *Variation von c*.

Das *Variationsvektorfeld (von f)* ist das Vektorfeld $V : [a,b] \to TM$, $V(t) := \frac{\partial f}{\partial s}(0,t) \in T_{c(t)}M$ längs c.
Wir nennen eine Variation f von c *eigentlich*, falls $f(s,a) = c(a)$ und $f(s,b) = c(b)$ für jedes $s \in (-\epsilon,\epsilon)$ ist. Dann gilt für das Variationsvektorfeld gerade $V(a) = 0$ und $V(b) = 0$.

Zu jedem Vektorfeld längs einer differenzierbaren Kurve c finden wir eine Variation von c für die V das Variationsvektorfeld ist:

Lemma 3.21. *Es sei $c : [a,b] \to M$ eine differenzierbare Kurve längs c in einer riemannschen Mannigfaltigkeit (M,g) und $V : [a,b] \to TM$ ein Vektorfeld längs c. Dann gibt es eine Variation $f : (-\epsilon,\epsilon) \times [a,b] \to M$ mit Variationsvektorfeld V und für $V(a) = 0$, $V(b) = 0$ kann dieses eigentlich gewählt werden.*

Beweis. Nach Lemma 2.50 gibt es um jeden Punkt p in M eine offene Umgebung U und ein $\delta > 0$, dass für alle $q \in U$ die Exponentialabbildung $\exp_q$ auf $B_\delta^{g_q}(0)$ definiert ist. Da $c([a,b]) \subseteq M$ kompakt ist, können wir $([a,b])$ mit endlich vielen solcher Umgebungen überdecken und also annehmen, dass ein $\delta > 0$ existiert, so dass für jedes $t \in [a,b]$ die Exponentialabbildung $\exp_{c(t)}$ auf $B_\delta^{g_{c(t)}}(0)$ definiert ist.
Es sei nun $C := \max_{t\in[a,b]} \|V(t)\|_{c(t)}$ und $0 < \epsilon < \frac{\delta}{C}$. Wir setzen dann

$$f : (-\epsilon,\epsilon) \times [a,b] \to M, \qquad f(s,t) := \exp_{c(t)}(sV(t))$$

und bemerken, dass f wegen der Annahmen an ϵ und δ wohldefiniert ist und wegen $f_0(t) = \exp_{c(t)}(0) = c(t)$ eine Variation von c ist. Weiter ist

$$\frac{\partial V}{\partial s}(0,t) = d(\exp_{c(t)})_0(V(t)) = V(t)$$

für alle $t \in [a,b]$, also V das Variationsvektorfeld von f Offensichtlich gilt für $V(a) = 0$, $V(b) = 0$, dass $f(s,a) = \exp_{c(a)}(0) = c(a)$ und $f(s,b) = \exp_{c(b)}(0) = c(b)$ für jedes $s \in (-\epsilon,\epsilon)$ ist, also f eigentlich ist. $\square$

Damit ergibt sich nun die erste Variationsformel für die Energie wie folgt:

Proposition 3.22 (Erste Variationsformel für die Energie)**.** *Es sei $c : [a,b] \to M$ eine differenzierbare Kurve in einer riemannschen Mannigfaltigkeit (M,g) sowie $f : (-\epsilon,\epsilon) \times [a,b] \to M$ eine Variation von c. Setzen wir dann*

$$E : (-\epsilon,\epsilon) \to \mathbb{R}, \qquad E(s) := E(f_s) = \int_a^b \left\|\dot f_s(t)\right\|^2_{f_s(t)} dt$$

so gilt

$$E'(0) = -2\int_a^b g\left(V(t), \tfrac{\nabla}{dt}\dot c(t)\right) dt + 2\,g(V(b),\dot c(b)) - 2\,g(V(a),\dot c(a)) \tag{3.1}$$

Beweis. Mit Lemma 2.42 und der Metrizität von g folgt

$$
\begin{aligned}
E'(s) &= \frac{d}{ds}\int_a^b \left\|\dot{f}_s(t)\right\|^2_{f_s(t)} dt = \int_a^b \frac{\partial}{\partial s} g(\dot{f}_s(t), \dot{f}_s(t))dt = \int_a^b 2\, g\left(\frac{\nabla}{ds}\frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial t}\right)(s,t)\, dt \\
&= 2\int_a^b g\left(\frac{\nabla}{dt}\frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t}\right)(s,t)dt \\
&= 2\int_a^b \frac{\partial}{\partial t}\left(g\left(\frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t}\right)(s,t)\right) dt - 2\int_a^b g\left(\frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\nabla}{dt}\frac{\partial f}{\partial t}\right)(s,t)\, dt \\
&= -2\int_a^b g\left(\frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\nabla}{dt}\frac{\partial f}{\partial t}\right)(s,t)\, dt + 2\, g\left(\frac{\partial f}{\partial s}(s,t), \frac{\partial f}{\partial t}(s,t)\right)\Big|_{t=a}^b
\end{aligned}
$$

für jedes $s \in (-\epsilon, \epsilon)$. Für $s = 0$ ergibt sich daher wegen $V(t) = \frac{\partial f}{\partial s}(0,t)$ und $\dot{c}(t) = \frac{\partial f}{\partial t}(0,t)$ für jedes $t \in [a,b]$ wie behauptet

$$
E'(0) = -2\int_a^b g\left(V(t), \tfrac{\nabla}{dt}\dot{c}(t)\right) dt + 2\, g(V(b), \dot{c}(b)) - 2\, g(V(a), \dot{c}(a)).
$$

□

Wir erhalten aus Gleichung (3.1) direkt die folgende Charakterisierung von Geodätischen:

Korollar 3.23. *Es sei $c : [a,b] \to M$ eine differenzierbare Kurve in einer riemannschen Mannigfaltigkeit (M,g). Dann ist c eine Geodätische von (M,g) genau dann, wenn c ein* kritischer Punkt des Energiefunktionals unter eigentlichen Variationen *ist, d.h. wenn für jede eigentliche Variation $f : (-\epsilon, \epsilon) \times [a,b] \to M$ von c gerade $E'(0) = 0$ gilt, wobei $E : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{R}$ wie in Proposition 3.22 definiert ist.*

Beweis. Wegen Gleichung (3.1) und der Eigentlichkeit von f ist

$$
E'(0) = -2\int_a^b g\left(V(t), \tfrac{\nabla}{dt}\dot{c}(t)\right) dt.
$$

Ist c nun eine Geodätische, so ist $\frac{\nabla}{dt}\dot{c}(t) = 0$ für alle $t \in [a,b]$ und daher $g\left(V(t), \frac{\nabla}{dt}\dot{c}(t)\right) = 0$ für alle Variationsvektorfelder V eigentlicher Variationen von c und alle $t \in [a,b]$.
Sei daher nun $E'(0) = 0$ für alle Variationsvektorfelder V eigentlicher Variationen von c. Wir zeigen, dass dann $\frac{\nabla}{dt}\dot{c}(t) = 0$ sein muss für jedes $t \in [a,b]$.
Sei dazu zunächst ein $t_0 \in (a,b)$ gegeben. Wir wählen ein differenzierbares Vektorfeld $W \in \Gamma_c(TM)$ längs c so, dass $\epsilon > 0$ existiert mit $(t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon) \subseteq (a,b)$, $\mathrm{supp}(W) := \overline{\{t \in [a,b] | W(t) \neq 0\}} \subseteq (t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon)$, $W(t_0) = \frac{\nabla}{dt}\dot{c}(t_0)$ und $g\left(W(t), \frac{\nabla}{dt}\dot{c}(t)\right) \geq 0$ für alle $t \in [a,b]$ (man multipliziere das Vektorfeld $\frac{\nabla}{dt}\dot{c}$ mit einer geeigneten C^∞-Funktion wie in Lemma 2.8). Nach Lemma 3.21 existiert dann eine eigentliche Variation $f : (-\epsilon, \epsilon) \times [a,b] \to M$ von c mit Variationsvektorfeld W. Da $E'(0) = 0$ ist für die zugehörige differenzierbare Funktion $E : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{R}$, $E(s) := E(f_s))$, folgt wegen obiger Formel gerade

$$
0 = \int_a^b g\left(W(t), \tfrac{\nabla}{dt}\dot{c}(t)\right) dt = \int_{t_0-\epsilon}^{t_0+\epsilon} g\left(W(t), \tfrac{\nabla}{dt}\dot{c}(t)\right) dt,
$$

und daher, da $g\left(W(t), \frac{\nabla}{dt}\dot{c}(t)\right) \geq 0$ ist für alle $t \in (t_0-\epsilon, t_0+\epsilon)$, gerade $g\left(W(t), \frac{\nabla}{dt}\dot{c}(t)\right) = 0$ für alle $t \in (t_0-\epsilon, t_0+\epsilon)$, also insbesondere $\left\|\frac{\nabla}{dt}\dot{c}(t_0)\right\|^2_{c(t_0)} = g\left(\frac{\nabla}{dt}\dot{c}(t_0), \frac{\nabla}{dt}\dot{c}(t_0)\right) = 0$, und somit wie gewünscht $\frac{\nabla}{dt}\dot{c}(t_0) = 0$.
Daher ist $\frac{\nabla}{dt}\dot{c}(t) = 0$ für alle $t \in (a,b)$, woraus aus Stetigkeitsgründen dann auch diese Gleichheit in $t = a$ und $t = b$ ergibt. Also ist c dann eine Geodätische. □

Für die zweite Variationsformel betrachten wir einen kritischen Punkt c des Energiefunktionals unter eigentlichen Variationen und bestimmen in diesem kritschen Punkt eine Formel für die zweite Ableitung von E. Der Einfachheit halber und da wir nur diesen Fall benötigen werden, beschränken wir uns dabei auf eigentliche Variationen:

Proposition 3.24 (Zweite Variationsformel für die Energie)**.** *Es sei $c : [a,b] \to M$ eine differenzierbare Kurve in einer riemannschen Mannigfaltigkeit (M,g), $f : (-\epsilon,\epsilon) \times [a,b] \to M$ eine eigentliche Variation von c sowie $E : (-\epsilon,\epsilon) \to \mathbb{R}$ definiert wie in Proposition 3.22. Dann gilt:*

$$E''(0) = -2\int_a^b g\left(\frac{\nabla^2 V}{dt^2}(t) + R(V(t),\dot{c}(t))\dot{c}(t), V(t)\right) dt. \tag{3.2}$$

Beweis. Im Beweis der ersten Variationsformel für die Energie (Proposition 3.22) hatten wir gezeigt, dass

$$E'(s) = -2\int_a^b g\left(\frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\nabla}{dt}\frac{\partial f}{\partial t}\right)(s,t)\,dt + 2\,g\left(\frac{\partial f}{\partial s}(s,t), \frac{\partial f}{\partial t}(s,t)\right)\Big|_{t=a}^{b}$$

für jedes $s \in (-\epsilon,\epsilon)$ gilt. Da wir eine eigentliche Variation haben, ist $f(s,a) = c(a)$ und $f(s,b) = c(b)$ für alle $s \in (-\epsilon,\epsilon)$ und daher ist der zweite Term in der Formel für $E'(s)$ für jedes $s \in (-\epsilon,\epsilon)$ gleich 0, d.h. es gilt

$$E'(s) = -2\int_a^b g\left(\frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\nabla}{dt}\frac{\partial f}{\partial t}\right)(s,t)\,dt$$

für alle $s \in (-\epsilon,\epsilon)$. Ableiten dieser Gleichung nach s ergibt unter Benutzung der Metrizität von g gerade

$$E''(s) = -2\int_a^b g\left(\frac{\nabla}{ds}\frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\nabla}{dt}\frac{\partial f}{\partial t}\right)(s,t)\,dt - 2\int_a^b g\left(\frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\nabla}{ds}\frac{\nabla}{dt}\frac{\partial f}{\partial t}\right)(s,t)\,dt.$$

Setzen wir $s = 0$ ein, so ist der erste Term gleich 0, denn es ist $\dot{c} = \frac{\partial f}{\partial t}(0,\cdot)$ und da c eine Geodätische von (M,g) ist, haben wir also $\frac{\nabla}{dt}\dot{c}(t) = 0$ für alle $t \in [a,b]$. Daher folgt unter Benutzung der Formel in Lemma 2.72, angewandt auf $\frac{\partial f}{\partial t}$, und Lemma 2.42 wie behauptet

$$
\begin{aligned}
E''(0) &= \int_a^b g\left(V(t), \left(\frac{\nabla}{ds}\frac{\nabla}{dt}\frac{\partial f}{\partial t}\right)(0,t)\right) dt \\
&= \int_a^b g\left(V(t), \left(\frac{\nabla}{dt}\frac{\nabla}{ds}\frac{\partial f}{\partial t}\right)(0,t) + \left(R\left(\frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t}\right)\frac{\partial f}{\partial t}\right)(0,t)\right) dt \\
&= \int_a^b g\left(V(t), \left(\frac{\nabla}{dt}\frac{\nabla}{dt}\frac{\partial f}{\partial s}\right)(0,t) + R(V(t),\dot{c}(t))\dot{c}(t)\right) dt \\
&= \int_a^b g\left(V(t), \frac{\nabla^2 V}{dt^2} + R(V(t),\dot{c}(t))\dot{c}(t)\right) dt.
\end{aligned}
$$

□

Bemerkung 3.25. Wir bemerken, dass $E''(0) = 0$ ist, wenn das Variationsvektorfeld V ein Jacobifeld, also auch das Variationsvektorfeld einer geodätischen Variation von c, ist.

Nun beweisen wir den Satz von Bonnet-Myers. Dieser besagt unter Anderem, dass eine zusammenhängende geodätisch vollständige riemannsche Krümmung mit nach unten durch eine positive Konstante $C > 0$ beschränkter *Ricci-Krümmung* (die Definition folgt gleich weiter unten) eine kompakte Mannigfaltigkeit mit maximalem *Durchmesser* $\operatorname{diam}(M) := \operatorname{diam}(M,g) := \max\{d(p,q) \mid p,q \in M\} \leq \frac{\pi}{\sqrt{C}}$ ist. Wir werden gleich sehen, dass riemannsche Mannigfaltigkeiten mit $K(\sigma) \geq C$ automatisch auch durch C nach unten beschränkte Ricci-Krümmung haben. Insbesondere gilt dann der Satz von Bonnet-Myers für zusammenhängende geodätisch vollständige riemannsche Mannigfaltigkeiten konstanter Krümmung $C > 0$. Für diese riemannsche Mannigfaltigkeiten beweisen wir hier direkt die Aussage um später besser die Idee des Beweises des allgemeinen Satzes von Bonnet-Myers zu verstehen und die Einführung der Ricci-Krümmung zu motivieren: Sei also (M,g) eine zusammenhängende geodätisch vollständige riemannsche Mannigfaltigkeiten konstanter Krümmung $C > 0$. Wir zeigen hier und auch später im Fall nach unten durch C beschränkter Ricci-Krümmung, dass jede längenminimierende, nach Bogenlänge parametrisierte Geodätische $c : [0,a] \to M$ von (M,g) gerade $a \leq \frac{\pi}{\sqrt{C}}$ erfüllt, d.h. Länge kleiner gleich $\frac{\pi}{\sqrt{C}}$ hat. Da nach dem Satz von Hopf-Rinow (Satz 2.53) je zwei Punkte $p,q \in M$ durch eine solche Geodätische von (M,g) verbunden werden können, folgt $\operatorname{diam}(M) \leq \frac{\pi}{\sqrt{C}}$. Also ist M eine abgeschlossene und beschränkte Teilmenge von M und damit nach dem Satz von Hopf-Rinow (Satz 2.53) kompakt.
Sei also nun eine längenminimierende, nach Bogenlänge parametrisierte Geodätische $c : [0,a] \to M$ von (M,g) gegeben. Wenn wir an die Sphäre S^n_r vom Radius $r := \frac{1}{\sqrt{C}}$ denken, die konstante Krümmung gleich C hat, dann ist für diese eine solche Geodätische nicht mehr längenminimierend für $t > \frac{\pi}{\sqrt{C}}$, da in $t = \frac{\pi}{\sqrt{C}}$ mehrere (sogar unendlich viele) Geodätische zusammentreffen und für $t > \frac{\pi}{\sqrt{C}}$ eine der anderen Geodätischen („Großkreis anders durchlaufen“) die Länge minimiert. Die Tatsache, dass $t = \frac{\pi}{\sqrt{C}}$ der Punkt ist, an dem c auf S^n_r nicht mehr längenminimierend ist, zeigt sich auch darin, dass nach Proposition 2.78 auf jeder geodätisch vollständigen riemannschen

Mannigfaltigkeit (M, g) konstanter Krümmung $C > 0$ für jedes paralleles Vektorfeld X längs c mit $g_{c(t)}(X(t), \dot{c}(t)) = 0$ und $\|X(t)\|_{c(t)} = 1$ für $t \in [0, a]$ das Vektorfeld $W : [0, a] \to TM, \quad W(t) := \sin\left(\sqrt{C}\, t\right) X(t)$ längs c ein Jacobifeld längs c mit $W(0) = 0$ und $W\left(\frac{\pi}{\sqrt{C}}\right) = 0$ ist (da W das Variationsvektorfeld einer geodätischen Variation ist, sollten also deswegen in $c\left(\frac{\pi}{\sqrt{C}}\right)$ auch auf M mehrere Geodätische aufeinandertreffen. Man kann zeigen, dass dies auch für M der Fall ist. Wir zeigen dies aber nicht, da wir es nicht für den Beweis benötigen.).
Die Idee ist nun das Jacobifeld W auf das Intervall $[0, a]$ „umzuskalieren" und so ein Vektorfeld V längs c zu erhalten. Dieses ist dann im Allgemeinen kein Jacobifeld längs c mehr. Wir berechnen dann $E''(0)$, $E : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{R}$, $E(s) := E(f_s)$, für die zugehörige eigentliche Variation $f : (-\epsilon, \epsilon) \times [0, a] \to M$ mit Variationsvektorfeld V und erhalten, dass $E''(0) < 0$ ist für $a > \frac{\pi}{\sqrt{C}}$. Da $E'(0) = 0$ ist nach der ersten Variationsformel für die Energie (Proposition 3.22), ist also $E(s) < E(0)$ für $s \in (-\epsilon, \epsilon)$ klein genug. Dies ist aber nach Lemma 3.19 ein Widerspruch zur Minimierung der Länge zwischen $c(0)$ und $c(a)$, und es muss daher $a \leq \frac{\pi}{\sqrt{C}}$ gelten.
Zu den Details: Wir setzen also

$$V : [0, a] \to TM, \qquad V(t) := \sin\left(\tfrac{\pi}{a} t\right) X(t)$$

und berechnen

$$g\left(\tfrac{\nabla^2}{dt^2} V(t), V(t)\right) = -g\left(\tfrac{\pi^2}{a^2} \sin\left(\tfrac{\pi}{a} t\right) X(t), \sin\left(\tfrac{\pi}{a} t\right) X(t)\right) = -\tfrac{\pi^2}{a^2} \sin^2\left(\tfrac{\pi}{a} t\right)$$

sowie

$$\begin{aligned} g(R(V(t), \dot{c}(t))\dot{c}(t), V(t)) &= \sin^2\left(\tfrac{\pi}{a}\, t\right) g(R(X(t), \dot{c}(t))\dot{c}(t), X(t)) = K(\sigma(t)) \sin^2\left(\tfrac{\pi}{a}\, t\right) \\ &= C \sin^2\left(\tfrac{\pi}{a}\, t\right) \end{aligned}$$

für $t \in [0, a]$, wobei $\sigma(t) := \operatorname{span}\{\dot{c}(t), X(t)\} \subseteq T_{c(t)}M$ für $t \in [0, a]$ ist. Daher ist nach der zweiten Variationsformel für die Energie (Proposition 3.24) für eine nach Lemma 3.21 existierende eigentliche Variation $f : (-\epsilon, \epsilon) \times [0, a] \to M$ mit Variationsvektorfeld V gerade

$$E''(0) = -2 \int_0^a g\left(\tfrac{\nabla^2}{dt^2} V(t) + R(V(t), \dot{c}(t))\dot{c}(t), V(t)\right) = 2 \int_0^a \left(\tfrac{\pi^2}{a^2} - C\right) \sin^2\left(\tfrac{\pi}{a}\, t\right) < 0$$

falls $a > \frac{\pi}{\sqrt{C}}$ wäre. Wie oben erläutert gibt dies dann einen Widerspruch zu Lemma 3.19 und wir müssen $a \leq \frac{\pi}{\sqrt{C}}$ und damit $\operatorname{diam}(M) \leq \frac{\pi}{\sqrt{C}}$ haben.
Ein kurzer Blick in den Beweis zeigt, dass man die Bedingung $K(\sigma) = C$ für jede Tangentialebene σ von M durch die Bedingung $K(\sigma) \geq C$ für jede Tangentialebene σ von M ersetzen kann. Weiter haben wir für ein (!!!) paralleles Vektorfeld X längs c mit $g_{c(t)}(X(t), \dot{c}(t)) = 0$ und $\|X(t)\|_{c(t)} = 1$ benutzt, dass $K(\operatorname{span}\{\dot{c}(t), X(t)\}) \geq C$ ist. Für X haben wir aber $n - 1$ verschiedene lineare unabhängige Möglichkeiten für X und es muss nur für eine dieser Möglichkeiten $K(\operatorname{span}\{\dot{c}(t), X(t)\}) \geq C$ gelten. Daher langt es zu verlangen, dass eine Art Mittelwert über bestimmte Schnittkrümmungen in jedem Punkt größer oder gleich C ist. Dies motiviert folgende Definition:

Definition 3.26. Es sei (M, g) eine riemannsche Mannigfaltigkeit, $p \in M$ und $v \in T_pM$ mit $\|v\|_p = 1$ gegeben. Dann ist die *Ricci-Krümmung* $\mathrm{Ric}_p(v)$ *(von* (M, g) *in Richtung von* v*)* definiert als das $\frac{1}{n-1}$-fache der Spur des Endomorphismus $T_pM \ni u \mapsto R(u, v)v \in T_pM$ von T_pM, d.h. $\mathrm{Ric}_p(v) := \frac{1}{n-1} \operatorname{tr}(u \mapsto R(u, v)v)$.

Bemerkung 3.27.

- Ist $u_1 = v, u_2, \dots, u_n$ eine Orthonormalbasis von T_pM und setzen wir $\sigma_i := \operatorname{span}\{v, u_i\} \subseteq T_pM$ für jedes $i = 2, \dots, n$, so ist

$$\mathrm{Ric}_p(v) = \tfrac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} g(R(u_i, v)v, u_i) = \tfrac{1}{n-1} \sum_{i=2}^{n} g(R(u_i, v)v, u_i) = \tfrac{1}{n-1} \sum_{i=2}^{n} K(\sigma_i).$$

  Die Ricci-Krümmung $\mathrm{Ric}_p(v)$ von (M, g) in Richtung von v ist also der Mittelwert der Schnittkrümmungen der Tangentialebenen $\sigma_2 = \operatorname{span}\{v, u_2\}, \dots, \sigma_n = \operatorname{span}\{v, u_n\}$ in $p \in M$.

- Für die Sphäre (S^n, g_{st}) gilt also $\mathrm{Ric}_p(v) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=2}^n K(\sigma_i) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=2}^n 1 = \frac{n-1}{n-1} = 1$, d.h. (S^n, g_{st}) hat *konstante Ricci-Krümmung* gleich 1.

  Warnung: Manchen Autoren verwenden keinen Vorfaktor $\frac{1}{n-1}$, was die Ricci-Krümmung von (S^n, g_{st}) als auch die genaue Aussage im Satz von Bonnet-Myers ändert.

- Gilt eine Ungleichung/Gleichung an die Schnittkrümmung in einem oder an allen Punkten von M, so folgt offensichtlich die entsprechende Ungleichung oder Gleichung für die Ricci-Krümmung in einem oder an allen Punkten von M.

  Insbesondere haben riemannsche Mannigfaltigkeiten konstanter Schnittkrümmungen $\kappa \in \mathbb{R}$ auch *konstante Ricci-Krümmung* κ, d.h. es ist $Ric_p(v) = \kappa$ für alle $p \in M$ und alle $v \in T_pM$ mit $\|v\|_p = 1$. Im nächsten Abschnitt sehen wir, dass die Klasse der riemannschen Mannigfaltigkeiten konstanter Schnittkrümmung κ sehr restriktiv ist, was jedoch nicht für die riemannschen Mannigfaltigkeiten mit konstanter Ricci-Krümmung gilt, von denen es zahlreiche gibt. Diese riemannschen Mannigfaltigkeiten werden auch *Einstein-Mannigfaltigkeiten* genannt, weil die entsprechenden Analoga im Falle von vier-dimensionalen Lorentz-Mannigfaltigkeiten gerade die Vakuum-Lösungen der Einsteinschen Feldgleichungen (mit oder ohne kosmologischer Konstante, je nachdem ob $\kappa \neq 0$ oder $\kappa = 0$ gilt) in der Allgemeinen Relativitätstheorie darstellen. Für eine Einführung in die schöne Theorie dieser Mannigfaltigkeiten verweisen wir auf [B].

- Durch Skalieren und Polarisieren kann man für jedes $p \in M$ eine (meist gleich bezeichnete) symmetrische Bilinearform $\mathrm{Ric}_p : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$ mit $\mathrm{Ric}_p(v, v) = \mathrm{Ric}_p(v)$ für $v \in T_pM$ mit $\|v\|_p = 1$ definieren. Daraus erhält einen Endomorphismus $\mathrm{ric}_p : T_pM \to T_pM$ von T_pM über $g(\mathrm{ric}_p(v), w) = \mathrm{Ric}_p(v, w)$ für alle $v, w \in T_pM$.

- Durch nochmalige Spurbildung (mit einem Vorfaktor $\frac{1}{n}$) erhält man als Krümmungsgröße $\mathrm{scal}(p) := \frac{1}{n} \operatorname{tr}(v \mapsto \mathrm{ric}_p(v))$, die sogenannte *Skalarkrümmung* $\mathrm{scal}(p) \in \mathbb{R}$ *in* $p \in M$. Wiederum implizieren Ungleichungen/Gleichungen für Ric_p entsprechende Ungleichungen/Gleichungen für $\mathrm{scal}(p)$.

Nun können wir den Satz von Bonnet-Myers formulieren und analog zu oben beweisen:

Satz 3.28 (Satz von Bonnet-Myers)**.** *Es sei (M,g) eine zusammenhängende geodätisch vollständige riemannsche Mannigfaltigkeit, so dass ein $r>0$ existiert mit*

$$\mathrm{Ric}_p(v) \geq \tfrac{1}{r^2} > 0$$

für alle $p \in M$ und alle $v \in T_pM$ mit $\|v\|_p = 1$. Dann ist (M,g) kompakt mit $\mathrm{diam}(M) \leq \pi r$ *und $\pi_1(M)$ endlich.*

Beweis. Für die ersten beiden Aussagen genügt es wie oben erläutert zu zeigen, dass jede längenminimierende, nach Bogenlänge parametrisierte Geodätische $c : [0,a] \to M$ von (M,g) gerade $a \leq \pi r$ erfüllt. Wir nehmen also an, dass es eine soche Geodätische mit $a > \pi r$ gäbe und wählen wir parallele Vektorfelder $X_2, \ldots, X_n$ längs c, so dass für jedes $t \in [0,a]$ gerade $X_1(t) := \dot{c}(t), X_2(t), \ldots, X_n(t)$ eine Orthonormalbasis von $(T_{c(t)}M, g_{c(t)})$ ist (man wähle am Anfangspunkt $c(a)$ eine Orthonormalbasis von $(T_{c(a)}M, g_{c(a)})$ mit erstem Vektor $\dot{c}(t)$ und dann die zugehörigen parallelen Vektorfelder). Weiter definieren wir Vektorfelder $V_2, \ldots, V_n \in \Gamma_c(TM)$ längs c durch

$$V_i : [0,a] \to M, \qquad V_i(t) := \sin\left(\tfrac{\pi}{a}t\right) X_i(t).$$

für $i = 2, \ldots, n$. Dann ist mit $\sigma_i(t) := \mathrm{span}\{\dot{c}(t), X_i(t)\}$ für $i = 2, \ldots, n$ gerade

$$\begin{aligned} g\left(\tfrac{\nabla^2}{dt^2}V_i(t) + R(V_i(t),\dot{c}(t))\dot{c}(t), V_i(t)\right) &= g\left(-\tfrac{\pi^2}{a^2}\sin\left(\tfrac{\pi}{a}t\right)X_i(t), \sin\left(\tfrac{\pi}{a}t\right)X_i(t)\right) \\ &\quad + \sin^2\left(\tfrac{\pi}{a}t\right) g\left(R(X_i(t),\dot{c}(t))\dot{c}(t), X_i(t)\right) \\ &= \sin^2\left(\tfrac{\pi}{a}t\right)\left(-\tfrac{\pi^2}{a^2} + K(\sigma_i(t))\right). \end{aligned}$$

Summation über $i = 2, \ldots, n$ ergibt wegen Bemerkung 3.27 und da $\frac{1}{r^2} > \frac{\pi^2}{a^2}$ wegen $a > \pi r$ ist, gerade

$$\begin{aligned} \sum_{i=2}^{n} g\left(\tfrac{\nabla^2}{dt^2}V_i(t) + R(V_i(t),\dot{c}(t))\dot{c}(t), V_i(t)\right) &= \sum_{i=2}^{n}\sin^2\left(\tfrac{\pi}{a}t\right)\left(-\tfrac{\pi^2}{a^2} + K(\sigma_i(t))\right) \\ &= (n-1)\sin^2\left(\tfrac{\pi}{a}t\right)\left(-\tfrac{\pi^2}{a^2} + \mathrm{Ric}_{c(t)}(\dot{c}(t))\right) \\ &\geq (n-1)\sin^2\left(\tfrac{\pi}{a}t\right)\left(\tfrac{1}{r^2} - \tfrac{\pi^2}{a^2}\right) \\ &> 0. \end{aligned}$$

Daher ist $g\left(\frac{\nabla^2}{dt^2}V_{i_0}(t_0) + R(V_{i_0}(t_0),\dot{c}(t_0))\dot{c}(t_0), V_{i_0}(t_0)\right) > 0$ für mindestens ein $i_0 \in \{2, \ldots, n\}$ und ein $t_0 \in (0,a)$. Nun ist $K(\sigma_{i_0}(t)) = g(R(X_{i_0}(t),\dot{c}(t))\dot{c}(t), X_{i_0}(t))$ für alle $t \in (0,a)$ und die rechte Seite ist aufgrund der Parallelität von X_{i_0} und $\dot{c}$ längs c unabhängig von $t \in (0,a)$, also auch die linke Seite. Da nach obiger Rechnung

$$g\left(\tfrac{\nabla^2}{dt^2}V_{i_0}(t_0) + R(V_{i_0}(t_0),\dot{c}(t))\dot{c}(t_0), V_{i_0}(t_0)\right) = \sin^2\left(\tfrac{\pi}{a}t_0\right)\left(K(\sigma_{i_0}(t_0)) - \tfrac{\pi^2}{a^2}\right)$$

ist, ist $K(\sigma_{i_0}(t)) - \frac{\pi^2}{a^2} = K(\sigma_{i_0}(t_0)) - \frac{\pi^2}{a^2} > 0$ für alle $t \in [0, a]$ und somit

$$g\left(\frac{\nabla^2}{dt^2} V_{i_0}(t) + R(V_{i_0}(t), \dot{c}(t))\dot{c}(t), V_{i_0}(t)\right) > 0$$

für alle $t \in (0, a)$. Bezeichne $f : (-\epsilon, \epsilon) \times [0, a] \to M$ die nach Lemma 3.21 existierende eigentliche Variation mit Variationsvektorfeld V_{i_0}, so folgt daher für $E : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{R}$, $E(s) := E(f_s)$, nach der zweiten Variationsformel für die Energie (Proposition 3.24) gerade

$$E''(0) = -2 \int_0^a g\left(\frac{\nabla^2}{dt^2} V_{i_0}(t) + R(V_{i_0}(t), \dot{c}(t))\dot{c}(t), V_{i_0}(t)\right) < 0,$$

und damit wie weiter oben erläutert $E(s) < E(0)$ für $s \in (-\epsilon, \epsilon)$ klein genug. Nach Lemma 3.19 ist dies ein Widerspruch zur Minimierung der Länge zwischen $c(0)$ und $c(a)$ durch c. Dies zeigt die ersten beiden Behauptungen.

Zum Beweis der Endlichkeit der Fundamentalgruppe $\pi_1(M)$ betrachten wir die universelle Überlagerung $\pi : \widetilde{M} \to M$. Durch Setzen von $\tilde{g} := \pi^* g$ wird π eine riemannsche Überlagerung und da π dann eine lokale Isometrie ist, gilt dann auch $\widetilde{\mathrm{Ric}}_{\widetilde{p}}(\widetilde{v}) \geq \frac{1}{r^2}$ für alle $\widetilde{p} \in \widetilde{M}$ und alle $\widetilde{v} \in T_{\widetilde{p}}\widetilde{M}$, wobei $\widetilde{\mathrm{Ric}}$ die Ricci-Krümmung von $(\widetilde{M}, \tilde{g})$ bezeichnet. Daher ist nach dem gerade schon bewiesenen Teil des Satzes von Bonnet-Myers auch $\widetilde{M}$ kompakt.

Sei nun $p \in M$ gegeben. Dann ist $\pi^{-1}(p)$ diskret in M. Weiter ist $\pi^{-1}(p)$ abgeschlossen und somit als abgeschlossene Teilmenge der kompakten Menge M auch kompakt. Daher muss $\pi^{-1}(p)$ endlich sein, denn sonst gäbe es eine Folge $(\widetilde{p}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\pi^{-1}(p)$ mit $\widetilde{p}_n \neq \widetilde{p}_m$ für alle $n, m \in \mathbb{N}$ mit $n \neq m$ die (nach Übergang zu einer Teilfolge) aufgrund der Kompaktheit von $\pi^{-1}(p)$ gegen ein Element $\widetilde{p}$ in $\pi^{-1}(p)$ konvergiert, ein Widerspruch zur Diskretheit von $\pi^{-1}(p)$. Also ist $\pi^{-1}(p)$ endlich und da $\pi^{-1}(p)$ nach Proposition 3.12 bijektiv zu $\pi_1(M)$ ist, muss auch $\pi_1(M)$ endlich sein. □

Bemerkung 3.29.

- Die Sphäre $S_r^n := \{x \in \mathbb{R} | \, \|x\| = r\}$ um 0 in $\mathbb{R}^n$ vom Radius $r > 0$, zusammen mit der durch Einschränkung von $\langle \cdot, \cdot \rangle$ induzierten riemannschen Metrik g, hat konstante Krümmung $\frac{1}{r^2}$ (Übung!!!). Daher hat (S_r^n, g) auch konstante Ricci-Krümmung $\frac{1}{r^2}$ und außerdem Durchmesser $\operatorname{diam}(S_r^n) = \pi r$, d.h. es gilt Gleichheit im Satz von Bonnet-Myers.

- Der n-Torus T^n kann trotz Kompaktheit keine riemannsche Metrik g mit Ricci-Krümmung $\mathrm{Ric}_p(v) > 0$ für alle $p \in M$ und alle $v \in T_pM$ mit $\|v\|_p = 1$ tragen: Denn dann wäre aufgrund der Kompaktheit von T^n auch $\{v \in TT^n | \, \|v\|_{\pi(v)} = 1\}$ kompakt und somit existiert ein $r > 0$ mit $\mathrm{Ric}_p(v) \geq \frac{1}{r^2}$ für alle $p \in M$ und alle $v \in T_pM$ mit $\|v\|_p = 1$. Daher müsste dann T^n endliche Fundamentalgruppe $\pi_1(T^n)$ im Widerspruch zu $\pi_1(T^n) = \mathbb{Z}^n$ nach Beispiel 3.14.

- Da die universelle Überlagerung einer zusammenhängenden Mannigfaltigkeit N genau dann kompakt ist, wenn $\pi_1(N)$ endlich ist, ergibt sich aus der dritten Version des Satz von Hadamard (Satz 3.15) dass die Fundamentalgruppe einer zusammenhängenden riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g) mit nicht-positiver Schnittkrümmung unendlich sein muss. Dazu gibt es kein Analogon falls $\mathrm{Ric}_p(v) \leq 0$ für alle

$p \in M$ und alle $v \in T_pM$ mit $\|v\|_p = 1$ ist was auch zeigt, dass die Ricci-Krümmung deutlich weniger Informationen als die Schnittkrümmung trägt):

Nach einem Satz von Lohkamp [Lo] gibt es für jede (ob kompakt oder nicht) zusammenhängende Mannigfaltigkeit M der Dimension $n \geq 3$ ein $C < 0$ und eine geodätisch vollständige riemannsche Metrik g mit $\mathrm{Ric}_p(v) \leq C < 0$ für alle $p \in M$ und alle $v \in T_pM$ mit $\|v\|_p = 1$.

3.3 Klassifikation riemannscher Mannigfaltigkeiten konstanter Krümmung

In diesem Abschnitt klassifizieren wir einfach-zusammenhängende geodätisch vollständige riemannsche Mannigfaltigkeiten konstanter Krümmung $\kappa \in \mathbb{R}$ und zeigen, dass diese für $\kappa = 1, 0, -1$ zu den Modelräumen (S^n, g_{st}), $(\mathbb{R}^n, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ bzw. (H_n, g_{H_n}) isometrisch sind (für andere Werte von κ muss man g_{st} bzw. g_{H_n} entsprechend umskalieren).
Das Haupthilfsmittel im Beweis ist folgende Konstruktion die auf Élie Cartan zurückgeht: Wir betrachten zwei riemannsche Mannigfaltigkeiten (M, g) und $(\overline{M}, \overline{g})$ gleicher Dimension n Sei $p \in M$ und $\overline{p} \in \overline{M}$ fix und $i : (T_pM, g_p) \to (T_{\overline{p}}\overline{M}\overline{g}_{\overline{p}})$ eine lineare Isometrie. Weiter sei $\epsilon > 0$ so gewählt, dass $\exp_p : B_\epsilon^{g_p}(0) \to \exp_p(B_\epsilon^{g_p}(0)) = B_\epsilon^{d_g}(p)$ ein Diffeomorphismus ist und so, dass $\exp_{\overline{p}}$ auf $B_\epsilon^{\overline{g}_{\overline{p}}}(0) = i(\exp_p^{-1}(B_\epsilon^{d_g}(p))) = i(B_\epsilon^{g_p}(0))$ definiert ist. Dann ist die Abbildung

$$f : B_\epsilon^{d_g}(p) \to \overline{M}, \quad f := \exp_{\overline{p}} \circ i \circ \exp_p^{-1}$$

wohldefinert und erfüllt $df_p = d(\exp_{\overline{p}})_0 \circ i \circ d(\exp_p^{-1})_p = i$, denn es ist $d(\exp_{\overline{p}})_0 = \mathrm{id}_{T_{\overline{p}}\overline{M}}$ und $d(\exp_p^{-1})_p = (d(\exp_p)_0)^{-1} = \mathrm{id}_{T_pM}^{-1} = \mathrm{id}_{T_pM}$. Das nächste Lemma gibt eine Bedingung an, wann das so definierte f eine lokale Isometrie aufs Bild $f(B_\epsilon^{d_g}(p)) \subseteq \overline{M}$ ist. Diese Bedingung ist, dass der riemannsche Krümmungstensor „invariant“ unter den linearen Isometrien $\phi_q : (T_qM, g_q) \to (T_{f(q)}\overline{M}, \overline{g}_{f(q)})$ für jedes $q \in B_\epsilon^{d_g}(p)$ ist, die man aus der linearen Isometrie $i : T_pM \to T_{\overline{p}}\overline{M}$ mittels Paralleltransport wie folgt bekommt: Sei $q \in B_\epsilon^{d_g}(p)$ gegeben. Dann gibt es eine eindeutige nach Bogenlänge parametrisierte Geodätische $c : [0, d(p,q)] \to M$ von (M, g) die vollständig in $B_\epsilon^{d_g}(p)$ verläuft und $c(0) = p$ sowie $c(d(p,q)) = q$ erfüllt. Ist $\overline{c} : [0, d(p,q)] \to \overline{M}$ die eindeutige Geodätische von $(\overline{M}, \overline{g})$ mit $\overline{c}(0) = \overline{p}$ und $\dot{\overline{c}}(0) = i(\dot{c}(0))$, so gilt

$$\overline{c}(d(p,q)) = \exp_{\overline{p}}(d(p,q)\dot{\overline{c}}(0)) = \exp_{\overline{p}}(i(d(p,q)\dot{c}(0))) = \exp_{\overline{p}}(i(\exp_p^{-1}(q))) = f(q),$$

d.h. $\phi_q := P_{\overline{c}}^{\overline{g}} \circ i \circ (P_c^g)^{-1} : T_qM \to T_{f(q)}\overline{M}$ bildet nach $T_{f(q)}\overline{M}$ ab und ist als Verknüpfung dreier linearer Isometrien selbst eine lineare Isometrie. Wir zeigen nun:

Lemma 3.30. *Mit den Bezeichnungen von oben und der Bezeichnung R für den Krümmungstensor von (M, g) und $\overline{R}$ für den Krümmungstensor von $(\overline{M}, \overline{g})$ gelte*

$$g_q(R_q(u,v)w, z) = \overline{g}_{f(q)}(\overline{R}_{f(q)}(\phi_q(u), \phi_q(v))\phi_q(w), \phi_q(z))$$

für alle $q \in B_\epsilon^{d_g}(p)$ und alle $u, v, w, z \in T_qM$. Dann ist $f : B_\epsilon^{d_g}(p) \to f(B_\epsilon^{d_g}(p))$ eine lokale Isometrie.

Beweis. Es sei $q \in B_\epsilon^{g_p}(p)$ sowie $v \in T_qM$ gegeben. Um die Behauptung zu zeigen, genügt es zu zeigen, dass $\|df_q(v)\|_{f(q)} = \|v\|_q$ ist (denn dann ist df_q eine lineare Isometrie und damit auch bijektiv, also f in q ein lokaler Diffeomorphismus).
Es sei $c : [0,l] \to M$ die eindeutige nach Bogenlänge parametrisierte Geodätische von (M, g) die vollständig in $B_\epsilon^{d_g}(p)$ verläuft und $c(0) = p$ sowie $c(l) = q$ erfüllt, wobei $l := d(p,q)$ ist. Nun kann $c(l)$ entlang c zu $c(0)$ nach Proposition 3.4 nicht konjugiert sein, da $\exp_p$ auf $B_\epsilon^{g_p}(0)$ ein Diffeomorphismus aufs Bild $B_\epsilon^{d_g}(p)$ ist. Daher ist die lineare Abbildung $J \mapsto J(l)$ vom Raum aller Jacobifelder J längs c mit $J(0) = 0$ nach T_qM injektiv und damit aus Dimensionsgründen auch surjektiv, also bijektiv. Also existiert genau ein Jacobifeld $J \in \Gamma_c(TM)$ längs c mit $J(0) = 0$ und $J(l) = v$ und die Behauptung folgt, wenn wir zeigen können, dass $\|J(l)\|_q = \|df_q(J(l))\|_{f(q)}$ gilt.
Dazu wählen wir parallele Vektorfelder $X_1, \ldots, X_{n-1}, X_n := \dot{c} \in \Gamma_c(TM)$ längs c, die für ein und damit jedes $t \in [0,l]$ eine Orthonormalbasis von $(T_{c(t)}M, g_{c(t)})$ bilden und schreiben $J = \sum_{i=1}^n f_i X_i$ mit eindeutigen $f_1, \ldots, f_n \in C^\infty([0,l])$. Die Jacobi-Gleichung für J gibt uns dann

$$\begin{aligned} 0 = \frac{\nabla^2 J}{dt^2}(t) + R(J(t), \dot{c}(t))\dot{c}(t) &= \sum_{i=1}^n \left(\ddot{f}_i(t) + g(R(J(t), X_n(t))X_n(t), X_i(t))\right) X_i(t) \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\ddot{f}_i(t) + \sum_{j=1}^n g(R(X_j(t), X_n(t))X_n(t), X_i(t))\, f_j\right) X_i(t), \end{aligned}$$

für jedes $t \in [0,l]$, also

$$0 = \ddot{f}_i + \sum_{j=1}^n g(R(X_j, X_n)X_n, X_i)\, f_j$$

für alle $i = 1, \ldots, n$.
Es sei nun $\overline{c} : [0,l] \to \overline{M}$ wie weiter oben die eindeutige Geodätische von $(\overline{M}, \overline{g})$ mit $\overline{c}(0) = \overline{p}$ und $\dot{\overline{c}}(0) = i(\dot{c}(0))$. Dann gilt wie oben erläutert $\overline{c}(l) = f(q)$ und allgemeiner folgt wie oben $\overline{c}(t) = f(c(t))$ für alle $t \in [0,l]$. Sei weiter $\bar{J} \in \Gamma_{\overline{c}}(T\overline{M})$ das durch $\bar{J}(t) := \phi_{c(t)}(J(t))$ für $t \in [0,l]$ definierte Vektorfeld längs $\overline{c}$. Wir zeigen, dass $\bar{J}$ ein Jacobifeld längs $\overline{c}$ ist und dass $\bar{J}(l) = df_q(J(l))$ gilt. Daraus folgt die Behauptung, denn da $\phi_q : (T_qM, g_q) \to (T_{f(q)}\overline{M}, \overline{g}_{f(q)})$ eine lineare Isometrie ist und $q = c(l)$ ist, ist dann $\|J(l)\|_q = \|\phi_q(J(l))\|_{f(q)} = \left\|\bar{J}(l)\right\|_{f(q)} = \|df_q(J(l))\|_{f(q)}$, was wie oben bemerkt die Behauptung impliziert.
Zum Beweis dieser beiden Eigenschaften bemerken wir, dass für jedes $i \in \{1, \ldots, n\}$ das durch $\overline{X}_i(t) := \phi_{c(t)}(X_i(t))$ für $t \in [0,l]$ definierte Vektorfeld $\overline{X}_i$ längs $\overline{c}$ wieder parallel ist, da

$$\begin{aligned} \overline{X}_i(t) = \phi_{c(t)}(X_i(t)) &= \left(P^{\overline{g}}_{\overline{c}|_{[0,t]}} \circ i \circ (P^g_{c|_{[0,t]}})^{-1}\right) (P^g_{c|_{[0,t]}}(X_i(0)) = P^{\overline{g}}_{\overline{c}|_{[0,t]}}(i(X_i(0))) \\ &= P^{\overline{g}}_{\overline{c}|_{[0,t]}}(\overline{X}_i(0)) \end{aligned}$$

für jedes $t \in [0,l]$ gilt. Da $\phi_{c(t)} : (T_{c(t)}M, g_{c(t)}) \to (T_{\overline{c}(t)}\overline{M}, \overline{g}_{\overline{c}(t)})$ eine lineare Isometrie für jedes $t \in [0,l]$ ist, ist $\overline{X}_1(t), \dots, \overline{X}_n(t)$ eine Orthonormalbasis von $(T_{\overline{c}(t)}\overline{M}, \overline{g}_{\overline{c}(t)})$ für jedes $t \in [0,l]$. Weiter ist $\overline{X}_n = \dot{\overline{c}}$, da $X_n = \dot{c}$ ist und somit

$$\overline{X}_n(t) = P^{\overline{g}}_{\overline{c}|_{[0,t]}}(i(X_n(0))) = P^{\overline{g}}_{\overline{c}|_{[0,t]}}(i(\dot{c}(0)) = P^{\overline{g}}_{\overline{c}|_{[0,t]}}(\dot{\overline{c}}(0)) = \dot{\overline{c}}(t)$$

für jedes $t \in [0,l]$ gilt. Daneben ist $\bar{J} = \sum_{i=1}^n f_i \overline{X}_i$, da $\phi_{c(t)} : T_{c(t)}M \to T_{f(c(t))}\overline{M}$ für jedes $t \in [0,l]$ linear ist. Mit all diesen Eigenschaften und der Voraussetzung folgt dann

$$\begin{aligned}
&\frac{\nabla^2 \bar{J}}{dt^2}(t) + \overline{R}(\bar{J}(t), \dot{\overline{c}}(t))\dot{\overline{c}}(t) \\
&= \sum_{i=1}^n \left(\ddot{f}_i(t) + \sum_{j=1}^n \overline{g}(\overline{R}(\overline{X}_j(t), \overline{X}_n(t))\overline{X}_n(t), \overline{X}_i(t)) f_j(t) \right) \overline{X}_i(t) \\
&= \sum_{i=1}^n \left(\ddot{f}_i(t) + \sum_{j=1}^n \overline{g}\left(\overline{R}(\phi_{c(t)}(X_j(t)), \phi_{c(t)}(X_n(t)))\phi_{c(t)}(X_n(t)), \phi_{c(t)}(X_i(t))\right) f_j(t) \right) \phi_{c(t)}(X_i(t)) \\
&= \sum_{i=1}^n \left(\ddot{f}_i(t) + \sum_{j=1}^n g(R(X_j(t), X_n(t))X_n(t), X_i(t) f_j(t) \right) \phi_{c(t)}(X_i(t)) = 0,
\end{aligned}$$

wobei wir die Gleichheit im letzten Schritt oben schon gezeigt hatten. Daher ist $\bar{J}$ ein Jacobifeld längs $\overline{c}$. Nun ist $\phi_p = i$ und somit

$$\begin{aligned}
\frac{\nabla \bar{J}}{dt}(0) &= \sum_{j=1}^n \dot{f}_j(0)\, \overline{X}_j(0) = \sum_{j=1}^n \dot{f}_j(0)\, \phi_p(X_j(0)) = \sum_{j=1}^n \dot{f}_j(0)\, i(X_j(0)) \\
&= i\left(\sum_{j=1}^n \dot{f}_j(0)\, X_j(0) \right) = i\left(\frac{\nabla J}{dt}(0) \right).
\end{aligned}$$

Da $J(0) = 0$ und $\bar{J}(0) = 0$ ist, ist nach Beispiel 2.77 (d) gerade

$$J(t) = d(\exp_p)_{t\dot{c}(0)}\left(t\frac{\nabla J}{dt}(0) \right), \qquad \bar{J}(t) = d(\exp_{\overline{p}})_{t\dot{\overline{c}}(0)}\left(t\frac{\nabla \bar{J}}{dt}(0) \right),$$

und somit

$$\begin{aligned}
\bar{J}(l) &= d(\exp_{\overline{p}})_{l\dot{\overline{c}}(0)}\left(l\frac{\nabla \bar{J}}{dt}(0) \right) = d(\exp_{\overline{p}})_{l\dot{\overline{c}}(0)}\left(i\left(l\frac{\nabla J}{dt}(0) \right) \right) \\
&= \left(d(\exp_{\overline{p}})_{l\dot{\overline{c}}(0)} \circ i \circ (d(\exp_p)_{l\dot{c}(0)})^{-1} \right)(J(l)) \\
&= df_q(J(l)).
\end{aligned}$$

Wie weiter oben erläutert, folgt hieraus die Behauptung. $\square$

Nun klassifizieren wir wie angekündigt einfach-zusammenhängende geodätisch vollständige riemannsche Mannigfaltigkeiten konstanter Krümmung:

Satz 3.31. *Eine n-dimensionale einfach-zusammenhängende geodätisch vollständige riemannsche Mannigfaltigkeit konstanter Krümmung $\kappa \in \mathbb{R}$ ist isometrisch*

(i) zu $\left(S^n, \frac{1}{\kappa} g_{st}\right)$, falls $\kappa > 0$ ist,

(ii) zu $(\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, falls $\kappa = 0$ ist

(iii) und zu $\left(H_n, -\frac{1}{\kappa} g_{H_n}\right)$, falls $\kappa < 0$ ist.

Beweis. Es sei $\kappa \in \mathbb{R}$ fix und $(\overline{M}, \overline{g})$ eine einfach-zusammenhängende geodätisch vollständige riemannsche Mannigfaltigkeit konstanter Krümmung κ.
Allgemein zeigt man leicht, dass für eine Tangentialebene σ in einer Mannigfaltigkeit $\hat{M}$, die Schnittkrümmung $K(\sigma)$ von σ bezüglich einer riemannschen Metrik $\hat{g}$ und die Schnittkrümmung $\tilde{K}(\sigma)$ von σ bezüglich der riemannschen Metrik $\lambda\hat{g}$ für ein $\lambda > 0$ über $\tilde{K}(\sigma) = \frac{1}{\lambda} K(\sigma)$ zusammenhängen (Übung!!!).
Daher haben die in (i) – (iii) angegebenen „Modelräume“ nach Übungsaufgaben und dem Skript tatsächlich konstante Krümmung gleich dem jeweiligen $\kappa \in \mathbb{R}$.
Zur besseren Notation bezeichnen wir den Modelraum (i), (ii) oder (iii) mit konstanter Krümmung gleich κ mit (M, g) und wählen einen Punkt $p \in M$, einen Punkt $\overline{p} \in \overline{M}$ sowie eine lineare Isometrie $i : (T_pM, g_p) \to (T_{\overline{p}}\overline{M}, \overline{g}_{\overline{p}})$.
Wir unterscheiden nun die Fälle $\kappa \leq 0$ und $\kappa > 0$:
Im ersten Fall ist nach der dritten Version des Satzes von Hadamard (Satz 3.15) sowohl $\exp_p : T_pM \to M$ als auch $\exp_{\overline{p}} : T_{\overline{p}}\overline{M} \to \overline{M}$ ein Diffeomorphismus und somit auch $f : M \to \overline{M}$, $f := \exp_{\overline{p}} \circ i \circ \exp_p^{-1}$. Sei nun $q \in M$ gegeben sowie $u, v, w, z \in T_pM$ und sei $\phi_q = P_{\overline{c}}^{\overline{g}} \circ i \circ (P_c^g)^{-1}$ mit den Bezeichnungen wie in (bzw. vor) Lemma 3.30. Dann ist, wie schon vor Lemma 3.30 bemerkt, $\phi_q : (T_qM, g_q) \to (T_{f(q)}\overline{M}, \overline{g}_{f(q)})$ eine lineare Isometrie. Daher folgt unter Benutzung der Formel für Krümmungstensoren riemannsche Mannigfaltigkeiten konstanter Krümmung κ aus Proposition 2.67 gerade

$$\begin{aligned}
\overline{g}(\overline{R}(\phi_q(u), \phi_q(v))\phi_q(w), \phi_q(z)) &= \kappa \cdot \Big(\overline{g}(\phi_q(v), \phi_q(w)) \cdot \overline{g}(\phi_q(u), \phi_q(z)) \\
&\qquad - \overline{g}(\phi_q(u), \phi_q(w)) \cdot \overline{g}(\phi_q(v), \phi_q(z))\Big) \\
&= \kappa \cdot \Big(g(v, w) \cdot g(u, z) - g(u, w) \cdot g(v, z)\Big) \\
&= g(R(u, v)w, z).
\end{aligned}$$

Daher können wir Lemma 3.30 anwenden, was uns zunächst liefert, dass $f : (M, g) \to (\overline{M}, \overline{g})$ eine lokale Isometrie ist. Da wir uns aber oben schon überlegt hatten, dass $f : M \to \overline{M}$ ein Diffeomorphismus ist, ist $f : (M, g) \to (\overline{M}, \overline{g})$ sogar eine Isometrie.
Nun betrachten wir den zweiten Fall $\kappa > 0$. Dann ist wegen $M = S^n$ die Exponentialabbildung $\exp_p$ in einem Punkt $p \in M$ auf $B_r^{g_p}(0)$ mit $r := \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}$ ein Diffeomorphismus aufs Bild $\exp_p(B_r^{g_p}(0)) = B_r^{d_g}(p) = S^n \setminus \{-p\}$. Definieren wir f wie im ersten Fall, so folgt mit den gleichen Argumenten, dass $f : (S^n \setminus \{-p\}, g) \to (\overline{M}, \overline{g})$ eine lokale Isometrie ist, wobei $g := \frac{1}{\kappa} g_{st}$ ist. Nun wählen wir einen Punkt $q \in S^n \setminus \{p, -p\}$

und erhalten analog, dass $h := \exp_{f(q)} \circ df_q \circ \exp_q^{-1} : (S^n \setminus \{-q\}, g) \to (\overline{M}, \overline{g})$ eine lokale Isometrie ist (wir starten also mit $i := df_q : T_qM \to T_{f(q)}\overline{M}$). Es ist nun $h(q) = (\exp_{f(q)} \circ df_q \circ \exp_q^{-1})(q) = \exp_{f(q)}(df_q(0)) = \exp_{f(q)}(0) = f(q)$ und $dh_q = df_q$ (wie wir schon vor Lemma 3.30 gezeigt hatten). Da f und h (nach Einschränkung) lokale Isometrien von $(S^n \setminus \{-p, -q\}, g)$ nach $(\overline{M}, \overline{g})$ sind und $S^n \setminus \{-p, -q\}$ zusammenhängend ist, folgt aus Blatt 10, Aufgabe 2 (a), dass f und h auf $(S^n \setminus \{-p, -q\}, g)$ übereinstimmen (genauer gilt die Aussage auf Blatt 10, Aufgabe 2 (a) nur für Isometrien, der Beweis dieser Aussage überträgt sich aber leicht auch auf lokale Isometrien). Daher liefern f und h zusammen eine lokale Isometrie $\tilde{f} : (S^n, g) \to (\overline{M}, \overline{g})$. Da $\tilde{f} : S^n \to \overline{M}$ ein lokaler Diffeomorphismus ist, ist die Abbildung offen und somit insbesondere $\tilde{f}(S^n) \subseteq \overline{M}$ offen. Weiter folgt aufgrund der Kompaktheit von S^n, dass $f(S^n) \subseteq \overline{M}$ auch kompakt und damit abgeschlossen ist. Da $\tilde{f}(S^n)$ also eine nicht-leere, offene und abgeschlossene Teilmenge des zusammenhängenden topologischen Raumes $\overline{M}$ ist, muss daher $\tilde{f}(S^n) = \overline{M}$ gelten. Also ist $\tilde{f} : (S^n, g) \to (\overline{M}, \overline{g})$ eine surjektive lokale Isometrie zwischen zusammenhängenden geodätisch vollständigen riemannschen Mannigfaltigkeiten und damit nach Proposition 3.8 eine riemannsche Überlagerung. Da aber $\overline{M}$ schon einfach-zusammenhängend ist, muss aufgrund der Eindeutigkeit der universellen Überlagerung nach Proposition 3.12 die Abbildung $\tilde{f}$ ein Diffeomorphismus und somit eine Isometrie von (S^n, g) nach $(\overline{M}, \overline{g})$ sein. Dies zeigt die Behauptung. □

Bemerkung 3.32. (i) Man bemerke, dass $\left(S^n, \frac{1}{\kappa} g_{st}\right)$ offensichtlich für $r := \frac{1}{\sqrt{\kappa}}$ isometrisch zu S^n_r, ausgestattet mit der von $\mathbb{R}^n$ induzierten riemannschen Metrik g, ist.

(ii) Ist (M, g) eine zusammenhängende geodätisch vollständige riemannsche Mannigfaltigkeit konstanter Krümmung κ, so ist die universelle riemannsche Überlagerung $(\overline{M}, \overline{g})$ von (M, g) nach Satz 3.31 isometrisch zum Modelraum mit konstanter Krümmung κ in diesem Satz. Diese Modelraum bezeichnen wir im Folgenden mit (M_κ, g_κ). Man sieht leicht ein, dass die Gruppe der Decktransformationen $\mathrm{Deck}(\pi)$ von $\pi : (\overline{M}, \overline{g}) \to (M, g)$ eine Untergruppe der Isometriegruppe $\mathrm{Isom}(\overline{M}, \overline{g})$ von $(\overline{M}, \overline{g})$ ist die frei und eigentlich auf $(\overline{M}, \overline{g})$ wirkt. Weiter kann man zeigen, dass dann $\mathrm{Deck}(\pi)$ die diskrete Topologie trägt. Mit den Ergebnissen aus Blatt 5, Aufgabe 1 und Blatt 10, Aufgabe 2(b) folgt daher:

Eine zusammenhängende geodätisch vollständige riemannsche Mannigfaltigkeit hat genau dann konstante Krümmung $\kappa \in \mathbb{R}$, wenn sie isometrisch zu $(M_\kappa/\Gamma, \tilde{g}_\kappa)$ ist mit Γ eine diskrete Untergruppe der Isometriengruppe von (M_κ, g_κ), die auf M_κ frei und eigentlich wirkt, und mit $\tilde{g}_\kappa$ die durch g_κ nach Blatt 10, Aufgabe 2(b) induzierte riemannsche Metrik auf M_κ/Γ.

Literaturverzeichnis

[B] A. Besse, *Einstein manifolds*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3), no. 10, Springer-Verlag, Berlin, 1987.

[dC] M. P. do Carmo, *Riemannian geometry*, Mathematics: Theory & Applications, Birkhäuser Verlag, 1992.

[GKW] D. Gromoll, W. Klingenberg, W. Meyer, *Riemannsche Geometrie im Großen*, Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, 1975.

[K] M. Kervaire, *A manifold which does not admit any differentiable structure*, Comment. Math. Helv. **34** (1960), no. 1, 257 – 270.

[Lee1] J. M. Lee, *Riemannian manifolds: An introduction to curvature*, Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, 1997.

[Lee2] J. M. Lee, *Introduction to smooth manifolds*, Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, 2003.

[Lo] J. Lohkamp, *Metrics of negative Ricci curvature*, Ann. of Math. (2) **140** (1994), no. 3, 655 – 683.

[M] J. Milnor, *On manifolds homeomorphic to the* 7*-sphere*, Ann. of Math. (2) **64** (1956), no. 2, 399 – 405.

[ON] B. O'Neill, *Semi-Riemannian geometry. With applications to relativity*, Pure and Applied Mathematics, 103. Academic Press, Inc. [Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York, 1983.

[S] J. Stallings, *The piecewise-linear structure of Euclidean space*, Proc. Cambridge Philos. Soc. **58** (1962), 481 – 488

[T] C. Taubes, *Gauge theory on asymptotically periodic* 4*-manifolds*, J. Differential Geom. **25** (1987), no. 3, 363 – 430.

[Wal] W. Walter, *Gewöhnliche Differentialgleichungen*, 7. Auflage, Springer-Verlag, Berlin, 2000.

[War] F. Warner, *Foundations of differentiable manifolds and Liegroups*, Corrected reprint of the 1971 edition. Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York-Berlin, 1983.