Übung 0 - Diffbare Mfk

Differenzierbare Mfk:

M top Hausdorfraum, abz Basis

Def: (Differenzierbarkeitsstruktur)

Überdeckung von M $\{U_i\}_{i \in I}$, Karten

$x_i : U_i \to \mathbb{R}^m$

- x_i ist Homöomorphismus auf eine offene Teilmenge $\tilde{U}_i \subseteq \mathbb{R}^m$
- $x_j x_i^{-1}|_{\tilde{U}_{ji}} \longrightarrow \mathbb{R}^m$ ist differenzierbar

$\tilde{U}_{ji} =: x_i(U_i \cap U_j)$

$\mathcal{A} := \{(U_i, x_i)\}_{i \in I}$ heißt ein Atlas, $\exists\, \mathcal{A}$ maximal

$(M, \mathcal{A})$ heißt differenzierbare Mfk der Dimension m

Differenzierbare Abb'en:

Seien $(M^n, \{(U_i, x_i)\}_{i \in I})$ $(N^n, \{(U_j, y_j)\}_{j \in J})$

$f : M \to N$, $\tilde{U}_{ji} := x_i(f^{-1}(V_j) \cap U_i)$

Def: a) f heißt differenzierbar, falls $\tilde{f}$ diffbar

$$\begin{array}{ccccc} M \supseteq & U_i \cap f^{-1}(V_o) & \xrightarrow{f} & V_j \\ & \downarrow x_i & \circlearrowleft & \downarrow y_j \\ & \tilde{U}_j & \xrightarrow{\tilde{f}} & y_j(V_j) \end{array}$$

b) f heißt Diffeo, falls f diffbar, Homöom.
f^{-1} 〃 〃

Bsp: $M = \mathbb{R}$ 1. D.S. Nehme $x = \mathrm{Id}$ als Karte

2. D.S. Nehme $x = t \to t^3$

$$\begin{tikzcd} \text{1. DS} \arrow[dr] & & \text{2. D.S} \arrow[d] \\ & \mathbb{R} \arrow[r, "\sqrt[3]{\ }"] \arrow[d, equal, "\mathrm{Id}"'] & \mathbb{R} \arrow[d, "x^3"] \\ & \mathbb{R} \arrow[r, "\mathrm{Id}"'] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

Bsp: $(M, \{(U_i, x_i)\}_{i\in I})$

$f: M \to \underset{\substack{\| \\ N}}{\mathbb{R}}$ diffbar $\Leftrightarrow f \circ x_i^{-1}: \underset{\substack{\| \\ x_i(U_i)}}{\tilde{U}_i} \to \mathbb{R}$ ist diffbar i.S. Ana II

<u>Tangentialraum einer Mfk</u> (vgl. Broecker/Jänich)

Sei $(M, \{(U_i, x_i)\}_{i\in I})$ diffbare Mfk

$p \in M \rightsquigarrow T_pM$?

Def: a) (Physiker) Setze $I_p := \{i \in I \mid p \in U_i\}$

$\prod_{I_p} \mathbb{R}^m$ (Elemente von $\prod_{I_p}\mathbb{R}^m$ sind Familien $\{v_i\}_{i\in I_p}, v_i \in \mathbb{R}^m$)

Sei u_{ji} die Koordinaten Übergangsfunktion

$$\begin{tikzcd} U_i \cap U_j \arrow[r, equal, "\mathrm{Id}"] \arrow[d, "x_i"'] \arrow[dr, phantom, "G"] & U_i \cap U_j \arrow[d, "x_j"] \\ \tilde{U}_{ji} \arrow[r, "u_{ji}"] & \tilde{U}_{ij} \end{tikzcd}$$

// $(v_i)_{i\in I_p} = (\dots, \underset{i}{v_i}, \dots, \underset{j}{v_j}, \dots)$

$\underline{T_pM} := \{\{v_i\}_{i\in I_p} \in \prod_{I_p}\mathbb{R}^m \mid \forall i,j \in I_p: v_j = d u_{ji} v_i\}$

b) (Geometer) Sei K_p der Raum der diffbaren Kurven:

$$c: (-\varepsilon, \varepsilon) \to M, \quad c(0) = p$$

$c_1 \sim c_2 :\Leftrightarrow \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (\lambda \circ c_1) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (\lambda \circ c_2)\ \forall$ diffbaren Fktn $\lambda: M \to \mathbb{R}$

$\underline{T_pM} := K_p/\sim$

Satz: $\forall i_0 \in I$ mit $p \in U_{i_0}$ sind die beiden natürlichen Abb'en:

$$i_{i_0}\ T_p M^{a)} \to \mathbb{R}^m,\ \{V_i\}_{i\in I_p} \mapsto V_{i_0}$$

$$\tilde{i}_{i_0}\ T_p M^{b)} \to \mathbb{R}^m,\ [c] \mapsto \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (x_{i_0} \circ c)$$

bijektiv.

Die induzierte VR-Struktur auf $T_p M^{a)}$ und $T_p M^{b)}$ ist unabh. von der Wahl von i_0.
Der induzierte Iso $T_p M^{a)} \simeq T_p M^{b)}$ ist auch unabh. v. i_0.

Bew: zu a) Injektivität, klar durch $v_j = d\, u_{ji}\, v_i$
Surjektivität aus Kettenregel $du_{kj} \circ du_{ji}(v) = du_{ki}(v)\ \forall i,j,k \in I_p\ \forall v \in \mathbb{R}^m$

u_{ij}

Satz von Whitney (1936): $\{$Diff n-dim Mfk $\} = \{$ Untermfk von $\mathbb{R}^{2n}\}$

Das Differenzial einer Abb.

Seien $(M^m, \{(U_i, x_i)\}_{i\in I}), (N^n, \{(V_j, y_j)\}_{j\in J})$ diffb. Mfk'en
$f: M \to N$ diffb. $p \in M$, $q = f(p)$. Wollen $T_p f: T_p M \to T_q N$

Def: a) $I_p, J_p, T_p M, T_q N$ wie zuvor. Sei $i \in I_p, j \in J_q$

$$\begin{array}{ccc} T_p M & \xrightarrow{T_p f} & T_q N \\ {\scriptstyle i_{i_0}}\downarrow & /// & \downarrow{\scriptstyle i_{j_0}} \\ d_{x_i(p)} u_{ji}: \mathbb{R}^m & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{ccc} f: K_p & \longrightarrow & K_q, \quad c \to f \circ c \\ \downarrow & & \downarrow \\ T_p f: K_p/\sim & \longrightarrow & K_q/\sim \end{array}$$