Übungen
Di: 18^{00} HS
Do: 10^{00} Chemie (30A)

1. Vorlesung
13.04.10

Klausur: 29.07., 12^{00}–15^{00}
Nachklausur: 28.09., 12^{00}–15^{00}

Differenzierbare Mannigfaltigkeiten

Ziele der Vorlesung / Inhalte:
- Verbindung zwischen Analysis III und Differentialgeometrie bzw. Topologie
- Vorstellung elementarer geometrisch / topologischer Methoden zur Untersuchung von Mannigfaltigkeiten
- keine große abstrakte Theorie, dafür: einige Anfangspunkte, einfache Konstruktionen

Motivation

etwas genauer zu Inhalt und Zielen:

- Begriff der Mannigfaltigkeit (differenzierbaren) und diff.bare Abbildungen

  zB: S^2, S^n, T^2 auch mit Rand $B^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$

  zunächst: Mannigfaltigkeiten als Teilmengen in $\mathbb{R}^n$

  später (kurz): abstrakter Mannigfaltigkeitsbegriff + Whitney-Einbettungssatz $M^k \subset \mathbb{R}^{2k+1}$ Einbettung

- Invarianten von Mannigfaltigkeiten und Abbildungen

  dh $M \mapsto a(M)$, $f \mapsto b(f)$ $\qquad a(M), b(f)$: Zahlen, "Vorzeichen", Gruppen, Vektorräume

  mit: $M \cong M'$, $f \sim f'$ $\Rightarrow$ $a(M) = a(M')$, $b(f) = b(f')$

  unter Diffeomorphie, Homotopie

Beispiele: Schnittzahlen, Abbildungsgrad, Windungszahl, Euler-Charakteristik, Kohomologiegruppen (deRham), Homotopiegruppen

- Anwendungsbeispiele:

  Jordan-Kurven-Satz:

  c geschlossene Kurve in $\mathbb{R}^2$
  $\Rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus c$ hat zwei Zusammenhangskomponenten

  allgemeiner: $X \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, zus., $\dim X = n-1$ (Hyperfläche)

  $\Rightarrow \mathbb{R}^n \setminus X$ hat zwei Zusammenhangskomponenten

6 · <u>Brouwer – Fixpunktsatz</u>

· <u>Beispiel</u>: $g_1, \dots, g_k$ glatte Funktionen auf S^k

$\Rightarrow \exists\ p \in S^k$ mit $g_i(p) = g_i(-p)$

$k=2$: a) Auf der Erde existieren immer zwei antipodale Punkte mit gleicher Temperatur und gleichem Luftdruck

b) Läßt man aus einem Luftballon die Luft heraus und legt ihn auf den Boden, dann existieren immer zwei anti-podale Punkte, die auf dem gleichen Punkt am Boden zu liegen kommen

· <u>Poincaré – Hopf – Index – Theorem</u>

V glattes Vektorfeld auf einer kompakten Mannigfaltigkeit M, mit endlich vielen Nullstellen

$$\Rightarrow \quad \chi(M) = \sum_{\substack{x_i \\ V(x_i)=0}} \operatorname{ind}(V)_{x_i}$$

z.B.: $\chi(M) \neq 0$ (etwa auf S^{2n}, $\chi(S^{2n}) = 2$)

$\rightarrow$ jedes glattes Vektorfeld hat eine Nullstelle (auf M)

<u>danach</u>: deRham – Kohomologie von Mannigfaltigkeiten

charakteristische Klassen

Integration auf Mfk.
Differentialformen

$\rightarrow$ · neue Beweise

· Gauß – Bonnet: $\chi(M^2) = \int K \, dM$

↑ s.o. · <u>Brouwer Fixpunktsatz</u>: $f: B^n \longrightarrow B^n$ glatt

$\rightarrow \exists\ x \in B^n$: $f(x) = x$ (Fixpunkt)

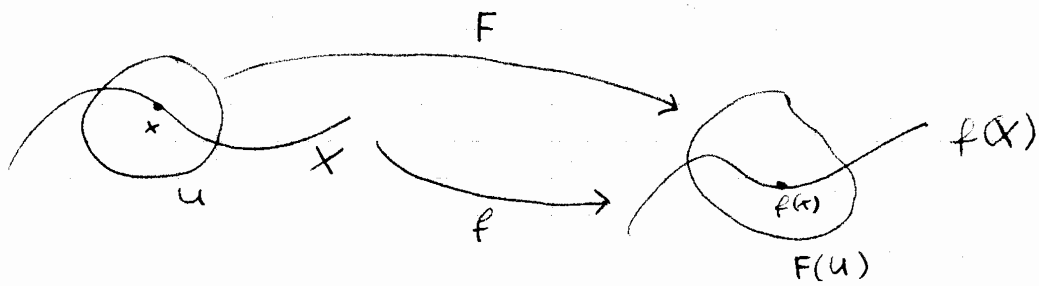
① Mannigfaltigkeiten und glatte Abbildungen

Ziel: Mannigfaltigkeiten als Teilmengen $X \subset \mathbb{R}^n$, die lokal aussehen wie $\mathbb{R}^k$

Definition: Eine Abbildung $f: U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ heißt <u>glatt</u>, falls f stetige partielle Ableitungen beliebiger Ordnung besitzt.

Sei $X \subset \mathbb{R}^n$ eine beliebige Teilmenge. Eine Abbildung $f: X \longrightarrow \mathbb{R}^m$ heißt <u>glatt</u>, falls für jeden Punkt $x \in X$ eine offene Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ und eine glatte Abbildung $F: U \to \mathbb{R}^m$ existiert mit $f = F|_{U \cap X}$

glatt
C^∞
unendlich oft diffbar



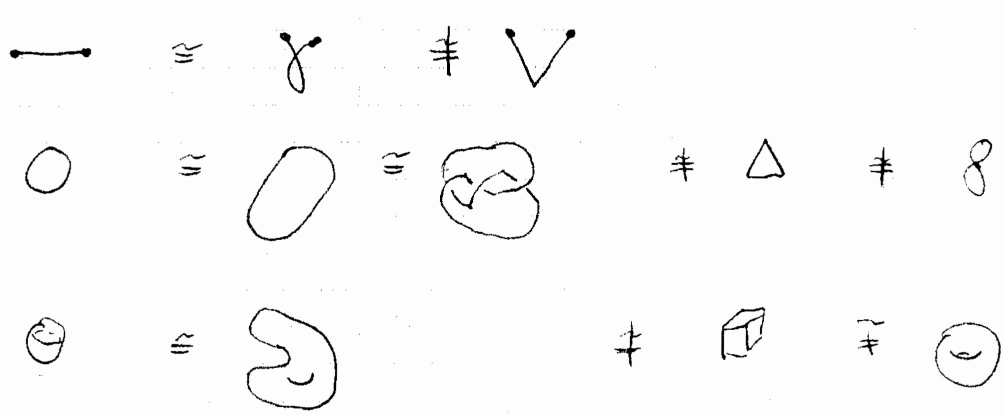
Bemerkung:

- Glattheit ist eine lokale Eigenschaft, d.h. bestimmt durch das Verhalten in der Umgebung von Punkten
- Die Mengen $U \cap X$ sind die offenen Mengen der Relativtopologie auf X

Definition: Ein <u>Diffeomorphismus</u> ist eine glatte bijektive Abbildung $f: X \to Y$ für die auch $f^{-1}: Y \to X$ glatt ist.

In diesem Fall sagt man X und Y sind diffeomorph.

Beispiele:



Bemerkung: Diffeomorphe Mengen sind gleich in der Sicht der Differentialtopologie

Definition: Eine Teilmenge $X \subset \mathbb{R}^N$ heißt k-dimensionale Mannigfaltigkeit, wenn X lokal diffeomorph zu $\mathbb{R}^k$ ist, d.h. jeder Punkt $x \in X$ besitzt eine Umgebung $V \subset X$, die diffeomorph zu einer offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^k$ ist.

Parametrisierung (von V) = Diffeomorphismus $\varphi : U \subset \mathbb{R}^k \longrightarrow V \subset X$

auch: Karten

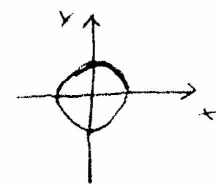
Koordinatensystem = $\varphi^{-1} : V \longrightarrow U$

$\varphi^{-1} = (x_1, \dots, x_n)$ $\qquad$ x_i Koordinaten auf V

d.h. $p \in V \mapsto (x_1(p), \dots, x_n(p)) \in \mathbb{R}^k$

Beispiel: $S^1 = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1 \}$

1 dimensionale Mannigfaltigkeit



Parametrisierung

- $y > 0$: $\varphi_1(x) = (x, \sqrt{1-x^2})$

  $\varphi_1 : U = (-1,1) \longrightarrow S^1$

  $\varphi_1^{-1}(x,y) = x$ $\qquad$ oberer Halbkreis

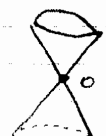
- $y < 0$: $\varphi_2(x) = (x, -\sqrt{1-x^2})$ $\qquad$ unterer Halbkreis

- $\varphi_3(y) = (\sqrt{1-y^2}, y)$ $\qquad$ rechter Halbkreis

- $\varphi_4(y) = (-\sqrt{1-y^2}, y)$ $\qquad$ linker Halbkreis

Bemerkungen:

- Für S^1, und allgemeiner S^n, braucht man mindestens zwei Parametrisierungen (zwei Karten)
- Die Parametrisierungen von S^n lassen sich analog definieren
- zwei Parametrisierungen: stereographische Projektion
- Der Doppelkegel ist keine Mannigfaltigkeit



es existiert keine Parametrisierung um 0

<u>Lemma:</u> Seien $X \subset \mathbb{R}^N$, $Y \subset \mathbb{R}^M$ Mannigfaltigkeiten, dann ist auch $X \times Y \subset \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M$ eine Mannigfaltigkeit. und es gilt:

$$\dim X \times Y = \dim X + \dim Y$$

<u>Definition:</u> Seien X, Y Mannigfaltigkeiten in $\mathbb{R}^N$ und sei $X \subset Y$. Dann nennt man X eine <u>Untermannigfaltigkeit</u> von Y

<u>Bemerkungen:</u>
- X ist Untermfk. von $\mathbb{R}^N$
- offene Teilmengen von X sind Untermfk.

<u>Beispiele:</u> ① Die <u>Diagonale</u> $\Delta \subset X \times X$ definiert als

$$\Delta = \{ (x, x) \mid x \in X \}$$

$\Rightarrow$ Δ ist eine Untermfk. von $X \times X$ diffeomorph zu X

② Sei $f: X \longrightarrow Y$ glatt, X, Y Mfk.

Der <u>Graph</u> von f ist definiert als

$$G(f) = \{ (x, f(x)) \mid x \in X \} \subset X \times Y$$

$\Rightarrow$ $G(f) \subset X \times Y$ ist eine Untermfk. diffeomorph zu X

Diffeomorphismus: $\quad F: X \longrightarrow G(f)$, $\quad x \longmapsto (x, f(x))$

② Differential und Tangentialraum

Sei $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ glatt, U offen

Differential von f in $x \in U$: $\quad df_x : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$

$$df_x(h) := \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left(f(x+th) - f(x) \right)$$

Ableitung von f in Richtung h

Bemerkungen:
- df_x ist linear und auf ganz $\mathbb{R}^n$ definiert
- Jacobi-Matrix = Matrix von df_x bzgl. der kanonischen Basen

$$df_x = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) \right)_{ij} \qquad f = (f_1, \dots, f_m)$$

Kettenregel: $\quad d(g \circ f)_x = dg_{f(x)} \circ df_x$

für $f : U \to V$, $g : V \to \mathbb{R}^\ell$ glatt

d.h.
$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] & V \arrow[r, "g"] & \mathbb{R}^\ell \end{tikzcd} \quad \longmapsto \quad \begin{tikzcd} \mathbb{R}^n \arrow[r, "df_x"] \arrow[rr, bend right, "d(g \circ f)_x"'] & \mathbb{R}^m \arrow[r, "dg_{f(x)}"] & \mathbb{R}^\ell \end{tikzcd}$$

Bemerkung:
- $f(x) = A \cdot x$ linear $\Rightarrow df_x = A \quad \forall x$
- df_x ist die beste lineare Approximation von f in x

Definition: Sei $X \subset \mathbb{R}^N$ eine Mannigfaltigkeit und $\varphi : U \to X$ eine lokale Parametrisierung um $x \in X$, $U \subset \mathbb{R}^k$ offen und o.B.d.A. $\varphi(0) = x$. Dann ist der Tangentialraum in x an X definiert als das Bild von $d\varphi_0$

$$T_x X := \operatorname{im} d\varphi_0 \qquad d\varphi_0 : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^N$$

Vektoren in $T_x X$ nennt man Tangentialvektoren in x.

Bemerkungen:
- $T_x X$ ist die beste "flache" Approximation von X in x
- $T_x X$ ist ein k-dimensionaler Vektorraum, $T_x X \subset \mathbb{R}^N$
  $\dim T_x X = k$

  da $\varphi : U \to X$ sei eine lokale Parametrisierung
  $\Rightarrow$ $\varphi^{-1} : X \to U$ ist glatt (def. auf $V \subset$)
  $\Rightarrow$ $\exists W \subset \mathbb{R}^N$ offen, $\phi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^k$ glatt
  mit $\phi|_{W \cap X} = \varphi^{-1}$
  $\Rightarrow$ $\phi \circ \varphi = \mathrm{Id}_U$
  $\Rightarrow$ $d\phi_x \circ d\varphi_0 = \mathrm{Id}$
  $\Rightarrow$ $d\varphi_0 : \mathbb{R}^k \to T_x X$ ist ein linearer Isomorphismus (da injektiv)

- Die Definition von $T_x X$ ist unabhängig von der gewählten Parametrisierung

  da $\varphi : U \to X$, $\psi : V \to X$ Parametrisierungen
  mit $\varphi(0) = x$, $\psi(0) = x$
  oBdA: $\varphi(U) = \psi(V)$
  $\Rightarrow$ $h = \psi^{-1} \circ \varphi$ ist ein Diffeomorphismus , $h(0) = 0$, $h : U \to V$
  $\Rightarrow$ $\varphi = \psi \circ h$
  $\Rightarrow$ $d\varphi_0 = d\psi_0 \circ dh_0$
  $\Rightarrow$ $\mathrm{Im}\, d\varphi_0 \subset \mathrm{Im}\, d\psi_0$
  $\Rightarrow$ $\mathrm{Im}\, d\varphi_0 = \mathrm{Im}\, d\psi_0$

  (man vertauscht die Rolle von φ und ψ, oder mit einem Dimensionsargument)

Differential einer Abbildung

$f : X \longrightarrow Y$, $\quad f(x) = y \qquad X, Y$ Mannigfaltigkeiten

$\varphi : U \to X$ sei Parametrisierung um $x \qquad U \subset \mathbb{R}^k$, $\varphi(0) = x$

$\psi : V \to Y$ sei Parametrisierung um $y \qquad V \subset \mathbb{R}^l$, $\psi(0) = y$

U klein genug, dann:

$df_x : T_x X \longrightarrow T_y Y$

$df_x = d\psi_0 \circ dh_0 \, d\varphi_0^{-1}$

für $h = \psi^{-1} \circ f \circ \varphi$

$$\begin{tikzcd}
T_x X \arrow[r, "df_x"] & T_y Y \\
\mathbb{R}^k \arrow[u, "d\varphi_0"] \arrow[r, "dh_0"'] & \mathbb{R}^l \arrow[u, "d\psi_0"']
\end{tikzcd}$$

Bemerkungen:

- Die Definition hängt nicht von der gewählten Parametrisierung ab
- Die Definition des Differentials ist eindeutig festgelegt, dass sie für Abbildungen $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ mit der üblichen übereinstimmt und das die Kettenregel erfüllt ist.

Kettenregel: Seien $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ glatte Abbildungen zwischen Mannigfaltigkeiten, dann gilt:

$$d(g \circ f)_x = dg_{f(x)} \circ df_x$$