2. Vorlesung
14.04.10

alternative Definition von Tangentialraum und Differential

- $X \subset \mathbb{R}^N$ k-dim. Mfk.

  $\varphi : U \to X$ Parametrisierung um $x \in X$, $\varphi(0) = x$

  $$T_x X = \operatorname{im} d\varphi_0 = \{ \dot c(0) \mid c : \mathbb{R} \to X \text{ glatt}, \ c(0) = x \}$$

- "$\subset$": $$d\varphi_0(h) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \varphi(th) \qquad d\varphi_0 : \mathbb{R}^k \to T_x X$$

  $$= \dot c(0) \quad \text{für } c(t) = \varphi(th)$$

- "$\supset$" $$\dot c(0) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} c(t) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \varphi(\varphi^{-1} c(t)) = d\varphi_0 \left(\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \varphi^{-1} c(t) \right.$$

  $$\varphi^{-1} c = \phi c \,,$$

- $X \subset \mathbb{R}^N$, $Y \subset \mathbb{R}^M$ Mfk., $f : X \to Y$ glatt, $f(x) = y$

  $\varphi : U \to X$, $\varphi(0) = x$, $\psi : V \to Y$, $\psi(0) = y$

  $$df_x := d\psi_0 \cdot dh_0 \ d\varphi_0^{-1} \qquad h = \psi^{-1} f \varphi$$

  $$df_x : T_x X \to T_{f(x)} Y$$

  $$df_x(\dot c(0)) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f(c(t))$$

  da $$\dot c(0) = d\varphi_0 \left(\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \varphi^{-1} c \right)$$

  $$\Rightarrow df_x(\dot c(0)) = d\psi_0 \cdot dh_0 \left(\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \overset{\phi}{\varphi^{-1}} c \right) \qquad h = \psi^{-1} f \varphi$$

  $$= d\psi_0 \left(\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \psi^{-1} f c \right)$$

  $$= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (f(c(t)))$$

③ Satz über implizite Funktionen und Immersionen

Ziel: Studium lokaler Eigenschaften / Verhalten glatter Abbildung.
Oft bestimmt durch das Differential.

inv

Sei $f : X \longrightarrow Y$ ein lokaler Diffeomorphismus, d.h.

es ex. eine Umgebung U von $x \in X$, die diffeomorph auf eine Umgebung V von $f(x)$ abgebildet wird ($f|_U : U \to V$ Diffe

$\Rightarrow$ $df_x : T_x X \to T_{f(x)} Y$ ist ein linearer Isomorphismus

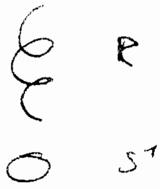
Satz: Sei $f : X \longrightarrow Y$ eine glatte Abbildung und df_x sei für ein $x \in X$ ein Isomorphismus. Dann ist f ein lokaler Diffeomorphismus in x.

Bemerkungen:

- Der übliche Beweis für offene Mengen überträgt sich direkt, mittels lokaler Parametrisierungen
- Die Zahl $\det(df_x)$ entscheidet über das lokale Verhalten von f in einer Umgebung von x

Beispiel: $f : \mathbb{R}^1 \longrightarrow S^1$, $t \mapsto (\cos t, \sin t)$

ist in jedem Punkt ein lokaler Diffeomorphismus aber kein globaler Diffeomorphismus

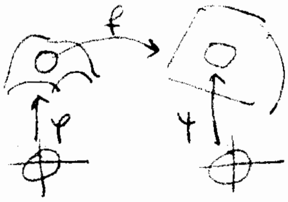


Bemerkung: Sei df_x ein Isomorphismus, da existieren lokale Koordinaten $(x_1, \dots, x_n)$ mit

$$f(x_1, \dots, x_k) = (x_1, \dots, x_k)$$

d.h. es ex. Parametrisierungen φ und ψ mit

$$f(\varphi(x_1, \dots, x_k)) = \psi(x_1, \dots x_k)$$



man definiert $\psi = f \circ \varphi$ auf U, so dass $f|_{\varphi(U)}$ ein Diffeom. ist

Eine ähnliche Aussage erhält man für beliebige Abbildungen!

(↗ Bröcker, Jänich)

Definition: Sei $f : X \to Y$ eine glatte Abbildung. f heißt Immersion in x falls $df_x : T_xX \to T_{f(x)}Y$ injektiv ist. f ist eine Immersion falls f in jedem Punkt Immersion ist.

Beispiel: kanonische Immersion $\mathbb{R}^k \xrightarrow{i} \mathbb{R}^\ell$ für $\ell \geq k$

$$(x_1, \dots, x_k) \mapsto (x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0)$$

Satz. Sei $f : X \to Y$ eine Immersion in x und $f(x) = y$. Dann existieren lokale Koordinaten um x und y mit

$$f(x_1, \dots x_k) = (x_1, \dots, x_k, 0, \dots 0)$$

Beweis: man wählt lokale Parametrisierungen

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] & Y \\ U \arrow[u, "\varphi"] \arrow[r, "g"'] & V \arrow[u, "\psi"'] \end{tikzcd}$$

$\varphi(0) = x$
$\psi(0) = y = f(x$

kommutatives Diagramm: $f \circ \varphi = \psi \circ$

(

$dg_0 : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^\ell$ ist injektiv

→ nach evtl. Basiswechsel

$$dg_0 = \begin{pmatrix} E_k \\ 0 \end{pmatrix} \qquad E_k = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

man definiert: $G : U \times \mathbb{R}^{\ell - k} \to \mathbb{R}^\ell$

$$(x, z) \mapsto g(x) + \binom{0}{z}$$

$dG_0 = E_\ell \Rightarrow G$ ist ein lokaler Diffeomorphismus von $\mathbb{R}^\ell$ um 0

$g = G \circ i$, $\quad i : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^\ell$ s.o.

man ersetzt ψ durch die lokale Parametrisierung $\psi \circ G$

$$\Rightarrow \begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] & Y \\ U \arrow[u, "\varphi"] \arrow[r, "i"'] & V \arrow[u, "\psi \circ G"'] \end{tikzcd}$$

ist ein kommutatives Diagramm, nach eventueller Verkleinerung der Mengen U, V:

$$f \circ \varphi = (\psi \circ G) \circ i$$
$$= \psi \circ g \qquad \text{(nach (*))}$$

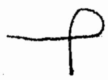
Folgerung: Ist f eine Immersion in x, so auch in einer Umgebung von x.

Bemerkungen:

- $f: X \to Y$ Immersion, $\dim X = \dim Y \Rightarrow f$ lokaler Diffeom.
- Immersion ist ein lokaler Begriff, im Unterschied zu Diffeom.
- f Immersion, dann ist $f(X) \subset Y$ i.A. keine Mfk.

(stimmt für i)

zB $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$



oder

f nicht injektiv

f ist sogar injektiv

Definition: Eine Einbettung ist eine glatte Abbildung $f: X \to Y$, für die $f(X) \subset Y$ eine Untermfk. und $f: X \to f(X)$ ein Diffeomorphismus ist.

Bemerkung: Eine Einbettung ist eine Immersion, die ein Homöomorphismus auf ihr Bild ist.

Insbesondere: $f: X \to Y$ Immersion, injektiv, X kompakt, dann ist f eine Einbettung

④ Submersionen

Definition: Eine glatte Abbildung $f: X \to Y$ heißt Submersion in x falls $df_x : T_xX \to T_{f(x)}Y$ surjektiv ist. Eine Submersion ist Submersion in jedem Punkt.

Beispiel: kanonische Submersion $\mathbb{R}^k \xrightarrow{\pi} \mathbb{R}^\ell$ für $k \geq \ell$

$$(x_1, \dots x_k) \mapsto (x_1, \dots x_\ell)$$

Satz: Sei $f: X \to Y$ eine Submersion in x und sei $y = f(x)$. Dann existieren Koordinaten um x und y mit

$$f(x_1, \dots, x_k) = (x_1, \dots x_\ell)$$

Bemerkungen:

- Der Beweis ist analog zu dem für Immersionen
- allgemeiner gilt: $\mathrm{Rang}(df_x) = r \Rightarrow$ es ex. Koordinaten mit
$$f(x_1, \dots, x_k) = (x_1, \dots x_r, 0, \dots 0)$$
- Ist f eine Submersion in x, so auch in einer Umgebung von x
- Submersionen sind i.A. nicht surjektiv
- Submersionen sind offene Abbildungen, d.h. das Bild offener Mengen ist offen

da dies
die kan
Submers.
tlig i

- Die Abbildung $z \mapsto z^2$ von $\mathbb{C}\setminus\{0\} \to \mathbb{C}\setminus\{0\}$ ist Immersion und Submersion, d.h. ein lokaler Diffeomorphismus aber kein globaler Diffeomorphismus

Lemma: Sei $f: X \to Y$ eine Submersion, X kompakt, Y zusammenhängend, dann ist f surjektiv

Beweis:

- f ist eine offene Abbildung $\Rightarrow f(X) \subset Y$ ist offen
- f ist stetig $\to f(X)$ ist kompakt $\to f(X) \subset Y$ ist abgeschlosse
- Y zus. $\to f(X) = Y$

Anwendung

Frage: Wann ist $f^{-1}(y) \subset X$ eine Untermfk.?

(= Lösungsmenge der Gleichung $f(x)=y$

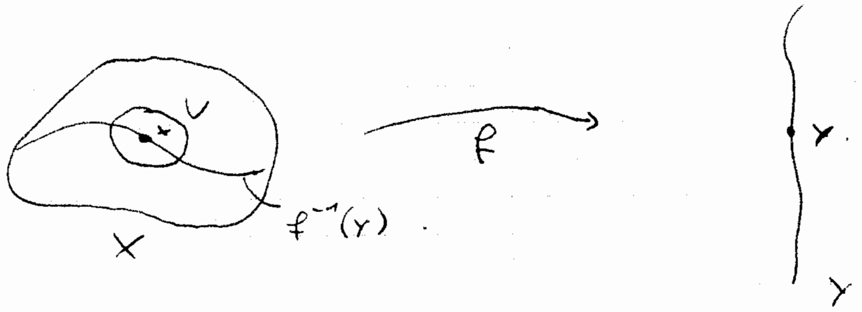
Definition: Sei $f: X \to Y$ eine glatte Abbildung. Ein Punkt $y \in Y$ heißt *regulärer Wert* für f, falls df_x für alle $x \in f^{-1}(y)$ surjektiv ist.

Satz vom regulären Wert

Sei $y \in Y$ ein regulärer Wert von $f: X \to Y$. Dann ist $f^{-1}(y)$ eine Untermfk. von X mit:

$$\dim f^{-1}(y) = \dim X - \dim Y$$

Beweis:



$k \geq \ell$

man wählt lokale Koordinate mit $f(x_1, \dots x_k) = (x_1, \dots, x_\ell)$

V um

$\psi(0)=$

$\varphi(0)=$

$$\Rightarrow \quad f^{-1}(y) \cap V = \{ p \in V \mid x_1(p) = \dots = x_\ell(p) = 0 \}$$

$$= \{ (0, \dots, 0, x_{\ell+1}, \dots x_k) \}$$

relativ offen in $f^{-1}($

$\Rightarrow$ Die Funktionen $x_{\ell+1}, \dots x_k$ bilden ein Koordinatensystem auf $f^{-1}(y) \cap V$

Bemerkungen:

- Ein Punkt $y \in Y$ heißt *kritischer Wert* falls ein x mit $f(x) = y$ und df_x nicht-surjektiv existiert
- Liegt y nicht im Bild von f, dann ist y nach Definition ein **regulärer** Wert
- Existiert ein regulärer Wert im Bild von f, dann ist $\dim X \geq \dim Y$
- Satz von Sard: Die Menge der kritischen Werte hat Maß Null
- Der Satz vom regulären Wert liefert eine wichtige Methode zur Konstruktion von Mannigfaltigkeiten.