Anwendungen des Satzes vom regulären Wert

- $f : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x_1^2 + \dots + x_k^2$

  $df_a = (2a_1, \dots, 2a_k)$ für $a = (a_1, \dots a_k)$

  $\Rightarrow$ df_a ist surjektiv für alle $a \in \mathbb{R}^k \setminus \{0\}$ dh. $f(a) \neq 0$

  $\Rightarrow$ alle $y \in \mathbb{R}$, $y \neq 0$, sind reguläre Werte

  $\Rightarrow$ $S^{k-1} = f^{-1}(1)$ ist eine glatte $(k-1)$-dim. Mfh.

- $X := M(n, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2}$

  $Y := \mathrm{Sym}(n, \mathbb{R}) = \{ A \in M(n, \mathbb{R}) \mid A = A^T \} \cong \mathbb{R}^{\frac{1}{2}n(n+1)}$

Lemma: Für die Abbildung $f : M(n, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{Sym}(n, \mathbb{R})$, $A \mapsto A^T A$, ist die Einheitsmatrix ein regulärer Wert.

Beweis: zz. df_p ist surjektiv für alle $p \in f^{-1}(E) = O(n)$

$$df_p(v) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f(p+tv) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (p+tv)^T (p+tv) = p^T v + v^T p$$

$$df_p : T_p X = X \longrightarrow T_E Y = \mathrm{Sym}(n, \mathbb{R})$$

Sei $B \in \mathrm{Sym}(n, \mathbb{R})$ beliebig, man definiert: $v := \frac{1}{2} p B$

$$\begin{aligned} \Rightarrow df_p(v) &= p^T v + v^T p \\ &= \tfrac{1}{2} p^T p B + \tfrac{1}{2} (B^T p^T) p \qquad p^T p = E \\ &= \tfrac{1}{2} B + \tfrac{1}{2} B^T \\ &= B \end{aligned}$$

dh df_p ist surjektiv

<u>Folgerung 1</u>: Die orthogonale Gruppe $O(n) = f^{-1}(E)$ ist eine Untermfk. von $\mathbb{R}^{n^2}$ der Dimension $\frac{1}{2} n(n-1)$

<u>Beweis</u>:
$$\dim O(n) = \dim X - \dim Y$$
$$= n^2 - \frac{1}{2} n(n+1) = \frac{1}{2} n(n-1)$$

<u>Folgerung 2</u>: Die spezielle orthogonale Gruppe $SO(n) = \{ A \in O(n) \mid \det A = 1 \}$ ist eine Untermfk. von $\mathbb{R}^n$ der Dimension $\frac{1}{2} n(n-1)$

<u>Beweis</u>: $SO(n) \subset O(n)$ offen (Zus. komponente)

$\rightarrow$ Untermfk. der gleichen Dimension

<u>Bemerkung</u>:

- Alle klassischen Matrixgruppen sind Untermfk. in $\mathbb{R}^N$, zB

  $GL(n,\mathbb{R})$, $U(n)$, $SU(n)$, $Sp(n)$, ...

- Man kann auch zeigen, dass die Gruppen-operationen $(A,B) \mapsto A \cdot B$ und $A \mapsto A^{-1}$ glatte Abbildungen sind.

  Gruppen die Mfk. sind und für die die Gruppenoperationen glatte Abbildungen sind nennt man <u>Lie-Gruppen</u>

<u>Bemerkung</u>: • Sei y ein regulärer Wert für $f: X \to Y$ und X sei kompakt, dann ist $f^{-1}(y)$ eine endliche Menge

Vor $\dim X = \dim$

<u>da</u>: $f^{-1}(y)$ kompakt und diskret (f ist ein lokaler Diffeomorphismus um jeden Punkt in $f^{-1}(y)$)

- $\# f^{-1}(y)$ = Anzahl der Punkte in $f^{-1}(y)$

<u>Lemma:</u> Sei $f: X \to Y$ eine glatte Abbildung, X kompakt und $\dim X = \dim Y$. Sei $y \in Y$ ein regulärer Wert mit $f^{-1}(y) = \{x_1, \dots x_N\}$. Dann existiert eine Umgebung U von y in Y, so dass $f^{-1}(U)$ die disjunkte Vereinigung von Umgebungen V_i von x_i ist, für die $f|_{V_i}: V_i \to U$ ein Diffeomorphismus ist.

<u>Zum Beweis:</u> schon gezeigt: $f^{-1}(y)$ ist leer oder enthält endlich viele Punkte x_i

- $\dim X = \dim Y$, y regulär $\Rightarrow$ f ist ein lokaler Diffeomorphismus in x_i

  $\Rightarrow$ es ex. Umgebungen W_i von x_i, auf denen f ein Diffeomorphismus ist, diese können disjunkt gewählt werden

- $V_i := f(W_i)$ offene Umgebung von y (da f lokaler Diffeom., also offene Abb.)

  man $U := V_1 \cap \dots \cap V_k \setminus f(X \setminus W_1 \setminus \dots \setminus W_k)$

<u>Folgerung:</u> Die Funktion $y \mapsto \# f^{-1}(y)$ ist lokal konstant auf der Menge der regulären Werte und insbesondere konstant, falls diese Menge zusammenhängend ist

<u>Zum Beweis:</u>

- man wählt U wie oben, dann ist

  $$\# f^{-1}(y) = k \qquad \text{für alle } y \in U$$

  d.h. die Anzahlfunktion ist lokal-konstant

- sei $y \in Y \setminus f(X)$

  X kompakt $\Rightarrow$ $f(X)$ kompakt und damit abgeschlossen

  $\Rightarrow$ $Y \setminus f(X)$ ist offen

  $\Rightarrow$ es ex. eine Umgebung von y, die ganz im Komplement von $f(X)$ liegt, auf dieser ist $\# f^{-1}(y)$ konstant gleich Null.

<u>Fundamentalsatz der Algebra:</u> Jedes nicht-konstante komplexe Polynom P hat eine Nullstelle.

<u>Beweis:</u> P definiert mittels der stereographischen Projektion (↗ Milnor) eine glatte Abbildung $f: S^2 \to S^2$

- <u>stereographische Projektion:</u>
  - $h_+ : S^2 \setminus \{(0,0,1)\} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \times \{0\} \subset \mathbb{R}^3$
    $h_+(x,y,z) = \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z}\right)$
  - $h_- : S^2 \setminus \{(0,0,-1)\} \longrightarrow \mathbb{R}^2$
    $h_-(x,y,z) = \left(\frac{x}{1+z}, \frac{y}{1+z}\right)$

<u>Lemma:</u> $h_+ h_-^{-1}(z) = \frac{1}{\bar{z}}$

- man definiert $f: S^2 \to S^2$ durch: $f(x) = h_+^{-1} P\, h_+(x)$ für $x \neq (0,0$
  $f(0,0,1) = (0,0,1)$

<u>Lemma:</u> f ist eine glatte Abbildung

<u>Beweis:</u> es genügt die Glattheit in $(0,0,1)$ zu zeigen, dazu nutzt man die Parametrisierung h_-

$$\begin{tikzcd} S^2 \arrow[r, "f"] & S^2 \\ \mathbb{R}^2 \arrow[u, "h_-^{-1}"] \arrow[r, "h"'] & \mathbb{R}^2 \arrow[u, "h_-^{-1}"'] \end{tikzcd}$$

f ist glatt in $(0,0,1)$ $\Leftrightarrow$ $h = h_- \cdot f \cdot h_-^{-1} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ist glatt in $(0,0)$

$(h_-(0,0,1) = (0,0)\,!)$

$P = a_0 + \ldots + a_n z^n$

$$h(z) = h_-(f(h_-^{-1}(z)))$$
$$= (h_- \circ h_+^{-1} \circ P \circ h_+ \circ h_-^{-1})(z)$$
$$= h_- h_+^{-1}\left(P\left(\tfrac{1}{\bar z}\right)\right) = \frac{1}{\overline{P\left(\frac{1}{\bar z}\right)}} = z^n(\bar a_0 z^n + \ldots + \bar a_n)^{-1}$$

glatt in $z = (0,0)$

- $f: S^2 \longrightarrow S^2$ hat endlich viele kritische Punkte

<u>da</u> x ist ein kritischer Punkt, dh df_x ist nicht surjektiv
dh. df_x ist nicht injektiv
$\Leftrightarrow$ $P'(x) = 0$

aber: P' ist wieder ein Polynom, nicht identisch Null, damit existieren nur endlich viele Nullstellen

- Seien $x_1, \dots, x_k$ die kritischen Punkte

$\Rightarrow$ $A := S^2 \setminus \{f(x_1), \dots, f(x_k)\}$
ist die Menge der regulären Werte

$\Rightarrow$ A ist zusammenhängend

$\Rightarrow$ $y \mapsto \# f^{-1}(y)$ ist konstant auf A (auch im Komplement von $f(x)$!)

$\Rightarrow$ $f^{-1}(y) \neq \emptyset$ für alle regulären Werte $y \in A$

<u>da</u> $x_0 \in S^2$, $x_0 \neq x_i$, $i = 1, \dots, k$ $\Rightarrow$ $y_0 := (f(x_0) \in A$
$\Rightarrow$ $f^{-1}(y_0) \neq \emptyset$

$\Rightarrow$ jeder reguläre Wert hat ein Urbild
$\Rightarrow$ f ist surjektiv

<u>da</u>: jeder Punkt in $S^2 \setminus f(S^2)$ wäre regulär, aber reguläre Punkte haben ein Urbild

$\Rightarrow$ P hat eine Nullstelle

<u>da</u>: · $P(z) = 0$ $\Leftrightarrow$ $f(x) = (0,0,-1)$
denn: $h_+(0,0,-1) = (0,0) = 0$, dh. $x = h_+^{-1}(z)$
· $(0,0,-1)$ hat ein Urbild, dh. es ex. ein $x \in S^2$ mit $f(x) = (0,0,-1)$
$\Rightarrow$ $h_+(x)$ ist eine Nullstelle von P

Umformulierungen des Satzes vom regulären Wert

$g = (g_1, \dots, g_l) : X \to \mathbb{R}^l$ $\qquad g_i$ glatt

$Z := g^{-1}(0)$ $\qquad$ Untermft. falls 0 ein regulärer Wert von g ist

$dg_x : T_x X \to \mathbb{R}^l$ ist surjektiv

$\Leftrightarrow$ $dg_1, \dots, dg_l$ sind linear unabhängig in x

man sagt: $g_1, \dots, g_l$ sind unabhängig in x

Satz: Sind $g_1, \dots, g_l$ unabhängig in jedem Punkt der gemeinsamen Nullstellenmenge Z, dann ist Z eine Untermft. von X der Dimension $\dim X - l$

man sagt: Z hat Kodimension l

Frage: Läßt sich jede Mannigfaltigkeit als Nullstellenmenge geeigneter Funktionen realisieren?

Satz: Sei y ein regulärer Wert der glatten Abbildung $f : X \to Y$. Dann ist die Untermft. $f^{-1}(y)$ Nullstellenmenge unabhängiger Funktionen.

Beweis: W sei hinreichend kleine Umgebung von y, $h : W \to \mathbb{R}^l$ Diffeomorphismus, $h(y) = 0$

$\Rightarrow g := h \circ f$ mit 0 als regulärem Wert

Bemerkung:
- Jede Untermft. ist lokal Nullstellenmenge unabhängiger Funktionen
- Sei y regulärer Wert für $f : X \to Y$, $Z := f^{-1}(y)$

$\Rightarrow T_x Z = \ker df_x$

da: $df_x : T_x X \to T_{f(x)} Y$ ist Null auf $T_x Z$ und surjektiv