(5) Transversalität

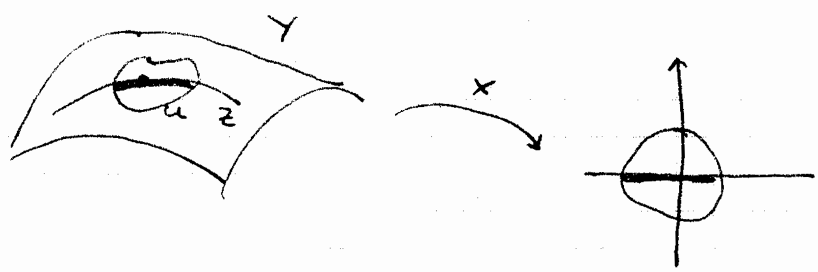
4. Vorlesung
21.04.10

Frage: Sei $f: X \to Y$ eine glatte Abbildung, $Z \subset Y$ eine Untermfk. Wann ist die Urbildmenge $f^{-1}(Z)$ eine Untermfk. in X?

- $Z \subset Y$ Untermfk. $\Leftrightarrow$ Z ist Mfk.

  $\Leftrightarrow$ zu jedem $y \in Z$ existieren Koordinaten $\{x_1, \dots, x_k\}$ auf einer Umgebung $U \subset Y$ mit:

  $$Z \cap U = \{p \in U \mid x_{\ell+1}(p) = \dots = x_k(p) = 0\}$$



Z ist eine ℓ-dim. Untermfk., Koordinaten $x_1, \dots, x_\ell$ auf $Z \cap U$

Z hat die Kodimension $\operatorname{codim} Z = k - \ell =: r$

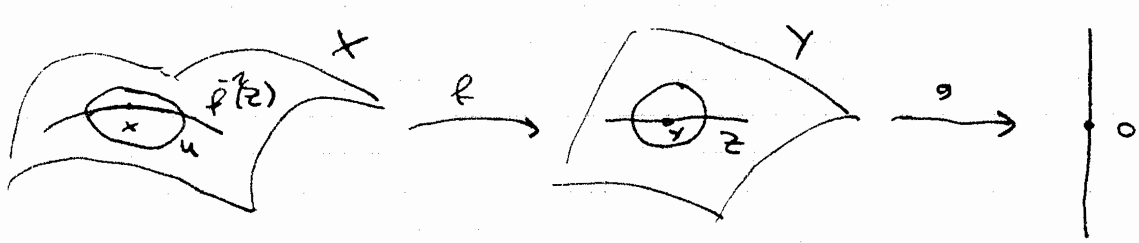
Z ist lokal Nullstellenmenge von r unabhängigen Funktionen

- noch eine andere Formulierung: $Z \subset Y$ Untermfk.

  $\Leftrightarrow$ zu jedem $y \in Z$ existiert eine Umgebung U, für die $Z \cap U$ eine Mfk. ist $(U \subset Y)$

- sei nun: $f: X \to Y$ glatt, $Z \subset Y$ Untermfk. der Kodimension r

$\Rightarrow$ $f^{-1}(Z)$ ist eine Untermfk. in X $\Leftrightarrow$ zu jedem $x \in f^{-1}(Z)$ ex. eine Umgebung $U \subset X$, für die $f^{-1}(Z) \cap U$ eine Mfk. ist



$x \in f^{-1}(Z)$ d.h. $y = f(x) \in Z$

$Z \subset Y$ Untermfk. $\to$ es ex. Umgebung V in Y von y und eine Submersion $g: V \to \mathbb{R}^r$ mit

$$Z \cap V = g^{-1}(0) \qquad g = (x_{e+1}, \ldots x_{e+r})$$

$\to$ $f^{-1}(V) =: U$ ist eine Umgebung von x in X

$$f^{-1}(Z) \cap U = (g \circ f)^{-1}(0)$$

$\to$ $f^{-1}(Z) \cap U$ ist eine Mfk. falls 0 ein regulärer Wert für $g \circ f$ ist

d.h. falls $d(g \circ f)_x$ für alle $x \in f^{-1}(Z) \cap U$ surjektiv ist

<u>Lemma</u>: Seien U, V, W Vektorräume, $A: U \to V$, $B: V \to W$ linear und B surjektiv. Dann ist $B \circ A$ surjektiv genau dann, wenn

$$\operatorname{Im} A + \ker B = V$$

<u>Beweis</u>: "$\Rightarrow$" $B \circ A$ surjektiv, $v \in V$ beliebig

$\to$ $Bv = B(Au)$ für ein $u \in U$

$\to$ $B(v - Au) = 0$ d.h. $v - Au \in \ker B$

$\to$ $v = Au + (v - Au)$

"$\Leftarrow$" $V = \operatorname{Im} A + \ker B$, $w \in W$ beliebig

$w = Bv$ für ein $v \in V$

$\to$ $v = Au + v_0$ für ein $u \in U$, $v_0 \in \ker B$

$\to$ $w = B(Au + v_0) = (BA)u$

<u>Anwendung</u>: $g \circ f$ ist eine Submersion in $x \in f^{-1}(Z)$ genau dann, wenn

$$\boxed{\operatorname{Im} df_x + T_y Z = T_y Y} \qquad (*)$$

Definition: Eine Abbildung $f: X \to Y$ heißt <u>transversal</u> <u>zu einer Untermfk.</u> $Z \subset Y$, falls die Bedingung $(*)$ in jedem Punkt von $f^{-1}(Z)$ erfüllt ist.

Satz: Sei $f: X \to Y$ transversal zu einer Untermfk. $Z \subset Y$, dann ist $f^{-1}(Z)$ eine Untermft. von X.

Die Kodimension von $f^{-1}(Z)$ in X ist gleich der Kodimension von Z in Y.

Bemerkungen:

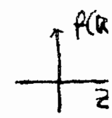
- Lokal ist $f^{-1}(Z)$ Nullstellenmenge der unabhängigen Funktionen $g_1 \circ f, \dots, g_r \circ f$, wobei r die Kodimension von Z in Y war $(g_i = x_{e+i})$
- Sei $Z = \{y\}$, dann ist $T_y Z = \{0\}$ und f ist transversal zu Z, falls

$$\operatorname{Im} df_x = T_y Y \qquad \forall x \in f^{-1}(y)$$

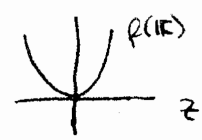
d.h. genau dann, wenn y ein regulärer Wert ist

Beispiel: $X = \mathbb{R}$, $Y = \mathbb{R}^2$, $Z = \{ (x,0) \mid x \in \mathbb{R} \}$ x-Achse

$f(t) := (0, t)$ ist transversal zu Z



$g(t) := (t, t^2)$ ist <u>nicht</u> transversal zu Z



Spezialfall: Sei $X \subset Y$ eine Untermft., $Z \subset Y$ Untermft.

$i: X \to Y$ Inklusionsabbildung

$\Rightarrow$ • $x \in i^{-1}(Z) \Leftrightarrow x \in X \cap Z$

• $di_x : T_x X \to T_x Y$ Inklusion der VR

$\Rightarrow$ i ist transversal zu Z, genau dann, wenn

$$T_x X + T_x Z = T_x Y \qquad (**)$$

für alle $x \in X \cap Z$

<u>Definition:</u> Zwei Untermft. X, Z in Y heißen zueinander <u>transversal</u>, falls die Bedingung $(**)$ für alle $x \in X \cap Z$ erfüllt ist.

(in allgemeiner Lage)

<u>Satz.</u> Der Durchschnitt zweier zueinander transversaler Untermft.. X, Z in Y ist wieder eine Mft. Weiter gilt:

$$\operatorname{codim}(X \cap Z) = \operatorname{codim} X + \operatorname{codim} Z$$

<u>Beweis:</u> • $i^{-1}(Z) = X \cap Z$ ist eine Untermft.

• $\operatorname{codim}(X \cap Z) = \dim Y - \dim(X \cap Z)$

$= \dim Y - \dim X + \dim X - \dim(X \cap Z)$

$= \dim Y - \dim X + \dim Y - \dim Z$

$= \operatorname{codim} X + \operatorname{codim} Z$ (siehe $(*)$ ↓

<u>Bemerkung:</u> • Sei $\operatorname{codim} X = k$, $\operatorname{codim} Z = \ell$

$\Rightarrow$ X ist lokal Nullstellenmenge von k unabhängigen Fktl.
Z " — " ℓ " — "
$X \cap Z$ " — " $k+\ell$ " — "

• Die Transversalitätsbedingung $(**)$ ist symmetrisch in X und Z

• Transversalität hängt auch von der umgebenden Mft. ab:

zB x-Achse, y-Achse sind transversal in $\mathbb{R}^2$ aber nicht in $\mathbb{R}^3$

• Seien X, Z zueinander transversale Untermft. von Y, dann gilt:

$$\dim(X \cap Z) = \dim X + \dim Z - \dim Y \qquad (*)$$

• X, Z zueinander transversal in Y, dann schreibt man: $\underline{X \pitchfork Z}$

<u>Beispiel:</u> $Y := \mathbb{R}^6 \cong \mathbb{C}^3$

$X := S^5 = \{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3 \mid |z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 = 1\}$

$Z := \{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3 \setminus \{0\} \mid z_1^3 + z_2^2 + z_3^2 = 0\}$

- 0 ist regulärer Wert der Abbildung $f: \mathbb{C}^3 \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{C}$, $(z_1, z_2, z_3) \mapsto z_1^3 + z_2^2 + z_3^2$

  $\Rightarrow$ Z ist eine 4-dimensionale Mfk. in $\mathbb{R}^6$

- <u>Behauptung:</u> Die Untermfk. X und Z sind zueinander transversal (in $\mathbb{R}^6$) und $X \cap Z$ ist damit eine 3-dimensionale Mfk.

  <u>Beweis:</u> zz. $T_zX + T_zZ = T_zY$ für alle $z \in Z \cap X$

  es gilt aber $T_zX = z^\perp \cong \mathbb{R}^5$

  Die Transversalitätsbedingung ist damit erfüllt, wenn es in jedem Punkt $z \in Z \cap X$ einen Tangentialvektor $v \in T_zZ$ gibt, der nicht in T_zX liegt

  Sei I ein hinreichend kleines Intervall um 1 und

  $c: I \longrightarrow Z$, $c(t) = (t^2 z_1, t^3 z_2, t^3 z_3)$, $z = (z_1, z_2, z_3)$

  c ist eine glatte Kurve in Z durch z.

  $\rightarrow$ $v := \dot{c}(1) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=1} c(t) = (2z_1, 3z_2, 3z_3) \in T_zZ$

  aber $\langle v, z\rangle = 2|z_1|^2 + 3|z_2|^2 + 3|z_3|^2 \neq 0$, d.h. $v \notin T_zX$

- <u>Bemerkung:</u>
  - $X \cap Z$ ist der Linsenraum $L(3,1) = S^3/\mathbb{Z}_3$
  - Die Konstruktion ist ein Spezialfall der Brieskorn-Mfk., die exotische Sphären liefern