5. Vorlesung
27.04.10

# ⑥ Homotopie und Stabilität

**Definition:** Sei $f_1, f_2 : X \to Y$ glatte Abbildungen. Man nennt $f_1, f_2$ zueinander **homotop**, falls eine glatte Abbildung $F : X \times I \to Y$ existiert mit $I = [0,1]$ und

$$F(x,0) = f_0(x), \quad F(x,1) = f_1(x)$$

Man nennt $F$ eine Homotopie zwischen $f_0$ und $f_1$.

**Bemerkungen:**

- $f_t := F(\cdot, t)$ ist eine glatte Kurve von glatten Abbildungen $X \to Y$ zwischen $f_0$ und $f_1$
- im strengen Sinne ist $F$ eine glatte Homotopie, allgemeiner formuliert man Homotopie für stetige Abbildungen
- Homotopie ist eine Äquivalenzrelation auf den glatten Abbildungen von $X$ nach $Y$

  Äquivalenzklassen dieser Relation heißen Homotopieklassen

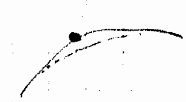
**Definition:** Eine Eigenschaft glatter Funktionen $X \to Y$ heißt stabil, falls sie unter lokaler Homotopie erhalten bleibt, genauer:

$f_0$ habe die Eigenschaft $\Rightarrow$ $f_t$ hat die Eigenschaft für alle $t$ mit $t < \varepsilon$, $\varepsilon$ hinreichend klein

stabil = ändert sich nicht unter kleinen Störungen

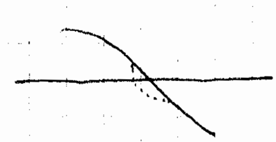
**Beispiel:** Man betrachte Kurven in $\mathbb{R}^2$ : c

nicht stabil: c geht durch 0



c geht durch die x-Achse

stabil: c schneidet die x-Achse transversal



**Stabilitätssatz:** Sei $X$ eine kompakte Mft., dann sind folgende Eigenschaften glatter Abbildungen $X \to Y$ stabil

(1) lokaler Diffeomorphismus

(2) Immersion

(3) Submersion

(4) Abbildung transversal zu einer (festen) Untermft. $Z \subset Y$

(5) Einbettungen

(6) Diffeomorphismen

**zum Beweis:** • (1) ist Spezialfall von (2) für $\dim X = \dim Y$

Sei $f_t$ Homotopie einer Immersion $f_0$

zz $\exists \varepsilon > 0$: $(d f_t)_x$ ist injektiv für alle $(x,t) \in X \times [0,\varepsilon) \subset X \times I$

• $X$ kompakt $\Rightarrow$ jede Umgebung von $X \times \{0\}$ in $X \times I$ enthält $X \times [0,\varepsilon]$ für $\varepsilon$ klein

$\Rightarrow$ es genügt zu zeigen $\forall (x_0, 0)$ haben Umgebung $U \subset X \times I$ mit $d(f_t)_x$ injektiv für $(x,t) \in U$

$\Rightarrow$ oBdA: $X \subset \mathbb{R}^k$ offen, $Y \subset \mathbb{R}^\ell$ offen (da lokale Aussage)

• $d(f_0)_{x_0}$ ist injektiv $\Rightarrow$ $\left( \frac{\partial (f_0)_i}{\partial x_j}(x_0) \right) \in M(\ell \times k, \mathbb{R})$ enthält eine $k \times k$-Teilmatrix mit Determinante $\neq 0$

• $\frac{\partial (f_t)_i}{\partial x_j}(x)$ ist stetig auf $X \times I$

• Determinante ist stetig

$\Rightarrow$ $\exists$ $k \times k$-Teilmatrix, die ungleich Null auf einer Umgebung von $(x_0, 0)$ ist

alle anderen Beweise laufen ähnlich (Transversalität $\hat{=}$ Submersionsbedingung für lokal definierte Funktion)

# Der Satz von Sard

Sei $f: X \to Y$ eine glatte Abbildung zwischen differenzierbaren Mfk.

$x \in X$ kritischer Punkt $\Leftrightarrow$ Rang $(df_x) < \dim Y$

dh $df_x$ ist nicht surjektiv, $df_x: T_xX \to T_{f(x)}$

$y \in Y$ kritischer Wert $\Leftrightarrow$ es existiert ein kritischer Punkt in $f^{-1}(y)$

Menge der kritischen Werte = Bild unter $f$ der Menge der kritischen Punkte

Bemerkung: Für $\dim X < \dim Y$ ist jeder Punkt im Bild von $f$ ein kritischer Wert

da: es ex. keine lineare surjektive Abbildung $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+k}$, $k \geq 1$, gibt

Satz von Sard: Sei $f: X \to Y$ eine glatte Abbildung zwischen differenzierbaren Mannigfaltigkeiten. Dann hat die Menge der kritischen Werte Maß Null.

Definition: Eine Menge $C \subset \mathbb{R}^n$ hat das Maß Null, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Folge von Würfeln $W_i \subset \mathbb{R}^n$ gibt mit:

$$C \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} W_i \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{vol}(W_i) < \varepsilon$$

Bemerkung:
- Statt Würfel kann man auch Kugeln $B_i$ betrachten, die $C$ überdecken

  da: sei $B_i$ die Kugel, die den Würfel $W_i$ von außen berührt, dann ist $\mathrm{vol}(B_i) / \mathrm{vol}(W_i)$ eine Konstante, die nur $n$ abhängt

  $\to$ auch $\sum_i \mathrm{vol}(B_i)$ wird beliebig klein

- analog kann man von einer Überdeckung durch Kugeln zu einer durch Würfel übergehen

- $C$ hat Maß Null $\Rightarrow$ $C'$ hat Maß Null für alle Teilmengen $C' \subset C$

**Lemma:** Die abzählbare Vereinigung von Mengen vom Maß Null hat wieder Maß Null.

**Beweis:** $C = \bigcup_{r=1}^{\infty} C_r$ mit $C_r \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} W_i^r$, $\sum_{i=1}^{\infty} vol(W_i^r) < \frac{\varepsilon}{2^r}$

$\rightarrow$ $C \subset \bigcup_{i,r} W_{i,r}$ und $\sum_{i,r} vol(W_i^r) = \sum_r \frac{\varepsilon}{2^r} = \varepsilon$

**Bemerkung:**

- In der Definition von Mengen mit Maß Null kann man offene oder abgeschlossene Würfel, Quader oder Kugeln nehmen
- Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $vol(U) := \inf\{\sum_i vol(W_i) \mid U \subset \bigcup W_i, W_i \text{ Würfel}\}$ wobei $vol(U) = \infty$ möglich ist, dann gilt auch:

  $C$ hat Maß Null $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0 \; \exists$ offene Menge $U$ mit $C \subset U$ und $vol(U) < \varepsilon$.

- Hat $C \subset \mathbb{R}^n$ Maß Null, dann sagt man auch, $C$ ist dünn oder fast jeder Punkt liegt nicht in $C$
- Nicht-triviale Würfel oder Bälle haben nicht Maß Null, d.h. eine Menge vom Maß Null kann keine nicht-leere offene Menge enthalten !

Die Eigenschaft, Maß-Null zu haben läßt sich auf Mfk. übertragen, es ist eine "glatte Invariante".

**Satz:** Sei $U \subset \mathbb{R}^m$ offen, $C \subset U$ eine Menge vom Maß Null und $f: U \to \mathbb{R}^m$ sei differenzierbar, dann hat auch $f(C)$ das Maß Null.

**Beweis:** Sei $W \subset U$ ein Würfel um $x \in C$


$W$ kompakt $\Rightarrow \exists\, a$ mit $\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right| < a$ auf $W$

sei $B$ eine offene Kugel vom Radius $r$ um $x \in C \cap W$

(Mittelwertsatz der Differentialrechnung):

$\rightarrow$ $f(W \cap B)$ liegt in einer Kugel vom Radius $a \cdot r$

sei $W \cap C \subset \bigcup B_i$ mit $\sum_i vol(B_i) < \varepsilon$

$\rightarrow$ $f(W \cap C) \subset \bigcup B_i'$ mit $\sum vol(B_i') < a^n \cdot \varepsilon$

$\rightarrow$ $f(C)$ hat Maß Null (man findet abzählbar viele

**Definition.** Sei $Y$ eine diff.bare Mft. Eine Teilmenge $C \subset Y$ hat Maß Null, wenn für jede lokale Parametrisierung $\varphi : U \to Y$ die Menge $\varphi^{-1}(C)$ Maß Null hat

**Bemerkung:** • Eine Menge $C \subset Y$ hat Maß Null, wenn sie überdeckt werden kann von lokalen Parametrisierungen $\varphi_i$ für die $\varphi_i^{-1}(C)$ Maß Null hat, dh. man muß nicht alle Parametrisierungen überprüfen (*)

(abzählbare Anzahl ist möglich, da eine abzählbare Basis der Topologie existiert)

ätz→)

• Die obige Definition ist nicht möglich für topologische Mft., da (nicht-diff.bare) Homöomorphismen existieren die Nullmengen auf Mengen von positiven Maß abbilden.

**Folgerung** (Satz von Brown): Die regulären Werte einer diff.baren (glatten) Abbildung $f: X \to Y$ liegen dicht in $Y$.

**Beweis:** Eine Menge von Maß Null in $Y$ kann keine nicht leere offene Menge enthalten

**Spezialfälle:**

① $\dim X = 1$ : Es existiert keine "raumfüllende" glatte Kurve

② $X \subset Y$ Untermft. $\Rightarrow$ $X$ hat Maß Null in $Y$

zB Graphen glatter Funktionen

③ $\dim X < \dim Y$ $\Rightarrow$ $f$ kann nicht surjektiv sein

da: $\dim X < \dim Y$ $\rightarrow$ jeder Punkt in $f(X)$ ist ein kritischer Wert

zu (*): es existieren Karten $(x, U)$ für $Y$, so dass $x(C \cap U)$ Maß Null hat