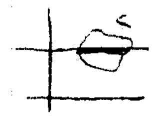
Beweis des Satzes von Sard

Mit Hilfe von lokalen Parametrisierungen kann man sich auf den Fall von glatten Abbildungen zwischen euklidischen Räumen einschränken.

Sei $\mathbb{R}^{n-1}_t := \{ x \in \mathbb{R}^n \mid x_n = t \} \subset \mathbb{R}^n$ und

$\mathbb{R}^n_I := \{ x \in \mathbb{R}^n \mid x_n \in I \} \subset \mathbb{R}^n$ für $I \subset \mathbb{R}$.

Satz von Fubini: Sei $C \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und $C_t := C \cap \mathbb{R}^{n-1}_t$ habe Maß Null in $\mathbb{R}^{n-1}$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Dann hat C Maß Null in $\mathbb{R}^n$.



Beweis:

Lemma 1: Sei $I_1, \dots, I_N$ eine Überdeckung von $[0,1]$ durch Teilintervalle. Dann existiert eine Teilüberdeckung $I_1', \dots, I_M'$ so dass

$$[0,1] = \bigcup_{i=1}^{M} I_i' \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^{M} \text{Länge}(I_i') \le 2$$

Beweis: man wählt eine Teilüberdeckung, aus der man kein Intervall mehr weglassen kann (hier kann auch von einer unendlichen Überdeckung starten)

$\Rightarrow$ jeder Punkt von $[0,1]$ liegt in höchstens zwei Intervallen dieser Überdeckung

da läge ein Punkt in drei Intervallen, dann hätte eines den kleinsten Anfangspunkt und eines den größten Endpunkt, das dritte Intervall wäre überflüssig

Lemma 2: Sei $C \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, $C \cap \mathbb{R}^{n-1}_t \subset U$, $U \subset \mathbb{R}^{n-1}_t$ offen. Dann existiert ein kleines Intervall I um t, in $\mathbb{R}$, mit

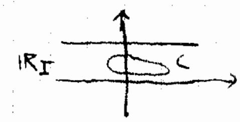
$$C \cap \mathbb{R}^n_I \subset U \times I$$

Beweis: • falls nicht, so ex. eine Folge von Punkten $(x_j, t_j) \in C$

mit: $t_j \to t$, $x_j \notin U$

• C kompakt $\Rightarrow$ es ex. eine konvergente Teilfolge ↯

da $C_t \subset U$



zum Beweis des Satzes von Fubini

- C kompakt $\Rightarrow$ oBdA $C \subset \mathbb{R}^n_I$, $I = [0,1]$

- $t \in I$, man wählt eine Überdeckung von $C \cap \mathbb{R}^{n-1}_t$ durch $(n-1)$-dim. Würfel $W_1(t), \dots, W_{N_t}(t)$ mit

$$\sum_i \mathrm{vol}\,(W_i(t)) < \varepsilon$$

- sei $J(t) \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, so dass $W_i(t) \times J(t)$, $i = 1, \dots N_t$, die Menge $A \cap \mathbb{R}^n_{J(t)}$ überdecken (existiert nach Lemma 2)

- die Intervalle $J(t)$ überdecken $[0,1]$, nach Lemma 1 existiert eine endliche Teilüberdeckung $J_1', \dots, J_k'$ mit

$$\sum_j \text{Länge}\,(J_j') \leq 2$$

$\Rightarrow$ jedes J_j' liegt in einem $J(t_j)$

$\Rightarrow$ $W_i(t_j) \times J_j'$ überdecken C

$$\sum_{i,j} \mathrm{vol}\,(W_i(t_j) \times J_j') \leq 2\varepsilon$$

$\Rightarrow$ C hat Maß Null

Bemerkung: Die Voraussetzung C kompakt läßt sich abschwächen es genügt, dass C abzählbare Vereinigung kompakter Mengen ist, d.h.

C : offen, abgeschlossen, stetige Bilder von offenen und abgeschlossenen Mengen, endliche Durchschnitte von offenen und abgeschlossenen Mengen

dann ist der Satz von Fubini anwendbar

zum Beweis des Satzes von Sard

sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f: U \to \mathbb{R}^p$ glatt, $C \subset U$ die Menge der kritischen Punkte von f

zz: $f(D) \subset \mathbb{R}^p$ hat Maß Null

Induktion nach n: • $n=0$ dann ist $f(U)$ ein Punkt und der Satz ist richtig

sei $C_i \subset U$ die Menge aller Punkte $x \in U$, in denen alle partiellen Ableitungen der Ordnung $\leq i$ verschwinden

es gilt:
- C_i sind abgeschlossen
- $C \supset C_1 \supset C_2 \supset \dots$

man zeigt:
1. $f(C \setminus C_1)$ hat Maß Null
2. $f(C_i \setminus C_{i+1})$ hat Maß Null
3. $f(C_k)$ hat Maß Null für k hinreichend groß

Bemerkung:
- auf alle auftretenden Mengen kann man den Satz von Fubini anwenden
- möchte man zeigen $f(A)$ hat Maß Null, dann genügt es zu zeigen:

  Jeder Punkt $x \in A$ besitzt eine Umgebung V, sodass $f(V \cap A)$ Maß Null hat

  da: A wird von abzählbar vielen solchen Umgebungen überdeckt

  2. Abzählbarkeitsaxiom: es existiert eine abzählbare Basis $\mathcal{B} = \{U_1, \dots\}$ der Topologie, d.h. offene Mengen sind abzählbare Vereinigung von Basismengen U_i

Beweis von (1): man kann $p \geq 2$ annehmen, denn für $p=1$ gilt $C = C_1$

sei $x \in C \setminus C_1 \to$ zB $\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) \neq 0$ (möglich nach Umordng der Koordinaten in $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^p$!

$\Rightarrow h : U \to \mathbb{R}^n, \quad (x_1, \dots, x_n) \mapsto (f_1(x), x_2, \dots x_n)$

ist ein Diffeomorphismus auf einer Umgebung $V \subset U$ von x, $h: V \to V$

man betrachtet $g := f \circ h^{-1}$, lokal um $h(x)$ hat g die Form:

$g: (z_1, \dots, z_n) \mapsto (z_1, g_2(z), \dots, g_p(z))$

$g: V' \to \mathbb{R}^p$

es gilt: • g hat die gleichen kritischen Punkte wie $f|_V$ (da: $f h = g \circ l$

• g induziert eine Abbildung

$g_t : (t \times \mathbb{R}^{n-1}) \cap V' \to t \times \mathbb{R}^{p-1}$ (Einschränkt von g

$\to x$ kritischer Punkt von $g \Leftrightarrow x$ kritischer Punkt von g_t

da: $$dg_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ * & dg_t \end{pmatrix}$$

(Induktionsvoraussetzung) Menge der kritischen Werte von g_t hat Maß Null in $t \times \mathbb{R}^{n-1}$

$\Rightarrow$ Menge der kritischen Werte von g hat mit allen Hyperebenen $t \times \mathbb{R}^{p-1}$ einen Durchschnitt vom Maß Null

$\overset{\text{Fubini}}{\Rightarrow}$ Menge der kritischen Werte von g bzw f hat Maß Null

Bemerkung: Fubini kann auf g angewandt werden.

Beweis von (2): Sei $x \in C_k \setminus C_{k+1}$, dann existiert ein $(k+1)$te partielle Ableitung von f, die nicht in x verschwindet

oBdA $\quad \frac{\partial w}{\partial x_1}(x) \neq 0 \quad$ für $\quad w = \frac{\partial^k f_1}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}}$

$\Rightarrow w(x) = 0 \qquad (w = 0$ auf $C_k)$

- man definiert $\quad h : x \mapsto (w(x), x_2, \dots x_n)$

$\Rightarrow$ Diffeomorphismus $\quad h : V \to V'$, $\quad V$ Umgebung von x

mit: $\quad h(C_k \cap V) \subset 0 \times \mathbb{R}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$

- Sei $g := f \circ h^{-1} : V' \to \mathbb{R}^p$ mit der Einschränkung

$g_0 : (0 \times \mathbb{R}^{n-1}) \cap V' \to \mathbb{R}^p$

$\Rightarrow$ Menge der kritischen Werte von g_0 hat Maß Null (Induktionsvor.)

- Jeder Punkt aus $h(C_k \cap V)$ ist kritisch für g_0

da alle partiellen Ableitungen von g, also auch von g_0, der Ordnung $\leq k$ sind Null, insbesondere dg_0

$\Rightarrow f(C_k \cap V) = g \circ h(C_k \cap V)$ hat Maß Null

damit hat jeder Punkt in $C_k \setminus C_{k+1}$ eine Umgebung V, mit $f((C_k \setminus C_{k+1}) \cap V)$ hat Maß Null

$\Rightarrow f(C_k \setminus C_{k+1})$ hat Maß Null

($C_k \setminus C_{k+1}$ ist durch abzählbar viele Mengen der Form $C_k \cap V$ überdeckt)

<u>Beweis von (3)</u>: Sei $W \subset U$ ein Würfel der Kantenlänge a,
und sei $k > \frac{n}{p} - 1$

man zeigt: $f(W \cap C_k)$ hat Maß Null.

da C_k von abzählbar vielen solchen Würfel überdeckt wird folgt, dass $f(C_k)$ Maß Null hat

- Taylor-Formel: $f(x+h) = f(x) + R(x,h)$
  mit: $|R(x,h)| \leq c \cdot |h|^{k+1}$
  für $x \in C_k \cap W$, $x+h \in W$
  $c \in \mathbb{R}$ hängt nur von f und W ab (W kompakt.

- man zerlegt W in r^n Würfel der Kantenlänge $\frac{a}{r}$
  W_1 sei einer dieser Würfel, um $x \in C_k$

$y \in W_1 \rightarrow y = x + h$ mit $|h| \leq \sqrt{n} \cdot \frac{a}{r}$ (Kugel um x von Radius $\sqrt{n} \cdot \frac{a}{r}$)

$\rightarrow f(W_1)$ liegt in einem Würfel der Kantenlänge (*)

$$2 \cdot c \cdot \left(\frac{\sqrt{n}\,a}{r}\right)^{k+1} = \frac{b}{r^{k+1}}$$

$b = 2c \cdot (\sqrt{n} \cdot a)^{k+1}$
(hängt nur von W und f ab) nicht von der Zerlegung

$\Rightarrow f(C_k \cap W)$ liegt in der Vereinigung von höchstens r^n Würfeln mit Gesamtvolumen

$$V \leq r^n \cdot \left(\frac{b}{r^{k+1}}\right)^p = b^p \cdot r^{n-(k+1)p}$$

$\Rightarrow V$ konvergiert gegen Null für $r \rightarrow \infty$
da $k+1 > \frac{n}{p}$

d.h. die Volumensumme kann beliebig klein gemacht werden

$\Rightarrow f(C_k \cap W)$ hat Maß Null

(*) f bildet ab in eine Kugel um $f(x)$ von Radius $c \cdot \left(\frac{\sqrt{n}a}{r}\right)^{k+1}$, eine Kugel vom Radius r