7. Vorlesung
04.05.10

(8) Der Whitney Einbettungssatz

Ziel: Man finde zu jeder Zahl k eine Zahl $N(k)$, so dass $\mathbb{R}^{N(k)}$ ein diffeomorphes Bild jeder k-dimensionalen Mfk. enthält.

Sei X eine glatte Mfk. in $\mathbb{R}^N$

Definition: Das Tangentialbündel von X ist definiert als

$$TX = \{ (x,v) \in X \times \mathbb{R}^N \mid v \in T_x X \}$$

Bemerkung: • Man hat eine kanonische Projektion, $\pi : TX \to X$, $(x,v) \mapsto x$

$$T_x X = \pi^{-1}(x)$$

$TX \xrightarrow{\pi} X$

• Das Tangentialbündel enthält X als Nullschnitt: $\{ (x,0) \mid x \in X \}$

• Jede glatte Abbildung $f: X \to Y$ induziert eine Abbildung

$$\left.\begin{aligned} df &: TX \to TY \\ df(x,v) &:= (f(x), df_x(v)) \end{aligned}\right\} \text{ das Differential}$$

(manchmal auch: T

• $TX \subset \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$

Lemma 1: Sei $f: X \to Y$ glatt, $X \subset \mathbb{R}^N$, $Y \subset \mathbb{R}^M$, dann ist $df : TX \to \mathbb{R}^{2M}$ eine glatte Abbildung.

Beweis: $f: X \to Y$ glatt $\to$ zu jedem $x \in X$ ex. eine Umgebung $U \subset \mathbb{R}^N$, $F: U \to \mathbb{R}^M$ glatt mit $F|_{X \cap U} = f$

$\Rightarrow dF : TU \to \mathbb{R}^{2M}$ ist eine lokale Fortsetzung von df

$TU = U \times \mathbb{R}^N$, dF ist glatt auf $U \times \mathbb{R}^N$

$\Rightarrow df$ ist glatt

Lemma 2: Diffeomorphe Mft. haben diffeomorphe Tangentialbündel, d.h. das Tangentialbündel ist intrinsisch definiert (unabhängig von der Einbettung in einen $\mathbb{R}^N$).

Beweis: · Kettenregel : $d(g \circ f) = dg \circ df$

· $f: X \to Y$ sei ein Diffeomorphismus $\Rightarrow$ $f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}$

$\Rightarrow$ $df \circ df^{-1} = \mathrm{Id}$

$\Rightarrow$ df ist ein Isomorphismus bzw. Diffeomorphismus auf TX

Lemma 3: Das Tangentialbündel einer Mft. ist selbst wieder eine Mft. Es gilt:

$$\dim TX = 2 \dim X$$

Beweis: · $W \subset X$ offen $\Rightarrow$ $TW = TX \cap (W \times \mathbb{R}^N) \subset TX$

$\Rightarrow$ $TW \subset TX$ ist offen da $W \times \mathbb{R}^N \subset X \times \mathbb{R}^N$ offen

· sei φ eine lokale Parametrisierung, $\varphi: U \to W$, $U \subset \mathbb{R}^k$ offen

$\Rightarrow$ $d\varphi: TU \to TW$ ist ein Diffeomorphismus

$\Rightarrow$ $d\varphi$ definiert eine Parametrisierung von TU da $TU = U \times \mathbb{R}^k$ ist offen in $\mathbb{R}^{2k}$

Bemerkung: Für eine abstrakte Mft. X definiert man

$$TX := \bigcup_{x \in X} T_x X \quad , \quad \pi: TX \to X \ , \ \pi(v) = x \text{ für } v \in$$

Die Topologie auf TX definiert man durch:

$\pi^{-1}(U)$ ist offen für $U \subset X$ offen

Whitney Einbettungssatz

Satz: Zu jeder k-dimensionalen Mfk. existiert eine injektive Immersion nach $\mathbb{R}^{2k+1}$. Im Fall kompakter Mfk. ex. eine Einbettung.

Beweis: Für kompakte Mfk. sind injektive Immersionen automatisch Einbettungen, d.h. es genügt den ersten Teil der Aussage zu zeigen

- Sei $f: X \to \mathbb{R}^M$ eine injektive Immersion.
  man zeigt, dass für $M > 2k+1$ auch eine injektive Immersion nach $\mathbb{R}^{M-1}$ ex.

- man definiert: $h: X \times X \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^M$, $(x, y, t) \mapsto t \cdot [f(x) - f(y)]$
  $g: TX \to \mathbb{R}^M$, $(x, v) \mapsto df_x(v)$

- Sei $M > 2k+1$, dann ist jeder Punkt in $\mathrm{Im}(h)$ und in $\mathrm{Im}(g)$ kritisch
  Satz von Sard $\Rightarrow \exists\ a \in \mathbb{R}^M \setminus \mathrm{Im}(h) \setminus \mathrm{Im}(g)$
  $a \neq 0$ da 0 zum Bild gehört

- Sei $\pi: \mathbb{R}^M \to H := a^\perp = \{b \in \mathbb{R}^M \mid b \perp a\} \cong \mathbb{R}^{M-1}$
  die orthogonale Projektion, dh $\pi(v) = v - \langle v, a\rangle \frac{a}{|a|^2}$

a) $\pi \circ f: X \to H$ ist injektiv

da Annahme es ex. $x, y \in X$: $\pi(f(x)) = \pi(f(y))$

$\Rightarrow f(x) - f(y) = (\langle f(x), a\rangle - \langle f(y), a\rangle) \frac{1}{|a|^2} \cdot a$

$\Rightarrow \exists_t\ f(x) - f(y) = t \cdot a$, $t \neq 0$ für $x \neq y$ (f injektiv!)

$\Rightarrow h(x, y, \frac{1}{t}) = a$ $\lightning$ dh $\pi \circ f$ ist injektiv

b) $\pi \circ f: X \to H$ ist eine Immersion, dh. $d\pi f$ ist injektiv

da: Annahme es ex. $v \neq 0$: $d(\pi \circ f)_x(v) = 0$, $v \in T_x X$
$\Rightarrow \pi\, df_x(v) = 0$ (da $d\pi = \pi$)
$\Rightarrow \exists_t\ df_x(v) = t \cdot a$, $t \neq 0$ (da f eine Immersion)

$\Rightarrow g(x, \frac{1}{t} v) = a$ $\lightning$ dh $d(\pi \circ f)$ ist injektiv

<u>Bemerkung</u>: Zur Übertragung des Beweises auf den nicht-kompakten Fall nutzt man die Existenz einer Zerlegung der Eins.

<u>Definition</u>: Sei $X \subset \mathbb{R}^N$ und sei $\{U_\alpha\}$ eine offene Überdeckung (bezgl. der Relativtopologie). Eine $\{U_\alpha\}$ untergeordnete <u>Zerlegung der Eins</u> ist eine Familie $\{\Theta_i\}$ von glatten Funktionen auf X mit:

① $0 \leq \Theta_i(x) \leq 1 \qquad \forall x, i$

② zu jedem $x \in X$ ex. eine Umgebung, auf der bis auf endlich viele alle Θ_i's identisch Null sind

③ $\forall i \; \exists \alpha: \quad supp(\Theta_i) \subset U_\alpha \qquad supp(f) := \overline{\{x \mid f(x) \neq 0\}}$

④ $\forall x \in X: \quad \sum_i \Theta_i(x) = 1$

<u>Satz</u>: Jede Teilmenge $X \subset \mathbb{R}^N$ besitzt für jede offene Überdeckung eine untergeordnete Zerlegung der Eins.

<u>Beweis</u>: · Es existiert eine glatte Funktion $\eta: \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ mit

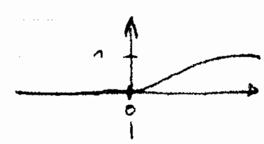
(i) $\eta(x) = 1$ für alle $x \in K_a := \{x \in \mathbb{R}^k \mid |x| < a\}$

(ii) $\eta(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^k \setminus K_b$, $\quad 0 < a < b$

(iii) $0 \leq \eta(x) \leq 1$ für alle x mit $a < x < b$

<u>zur Konstruktion</u>: · $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

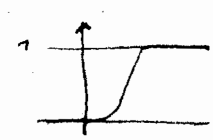
$$f(t) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{t^2}} & t > 0 \\ 0 & t \leq 0 \end{cases}$$



f ist glatt

· $\varphi_\varepsilon(t) := f(t)\,(f(t) + f(\varepsilon - t))^{-1}$

φ_ε ist glatt



$\Rightarrow \varphi_\varepsilon \equiv 0$ für $t \leq 0$, $\varphi_\varepsilon \equiv 1$ für $t \geq \varepsilon$

· $\eta: \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ (glatte) Glockenfunktion

$\eta(x) := 1 - \varphi_{b-a}(|x| - a)$

$\Rightarrow 0 \leq \eta(x) \leq 1, \quad \eta \equiv 1$ auf $\overline{K_a}$, $\eta \equiv 0$ auf $\mathbb{R}^k \setminus K_b$

- Sei $X = \bigcup U_\alpha$, U_α offen: $U_\alpha = X \cap W_\alpha$, $W_\alpha \subset \mathbb{R}^N$ offen
  $W := \bigcup W_\alpha$ offen in $\mathbb{R}^N$

- Sei A_j, $j = 1, 2, \dots$, kompakt mit: $\cdot\ A_j \subset \mathring{A}_{j+1}$
  $\cdot\ W = \bigcup_{j=0}^{\infty} A_j$

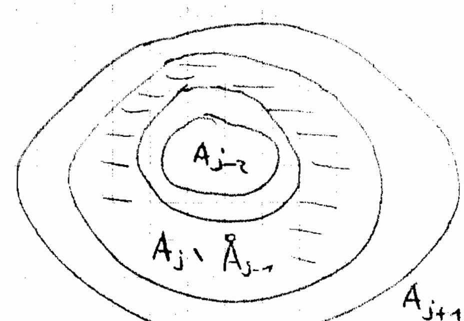
zB wählt man $A_j := \{ z \in W \mid |z| \leq j$ und $\operatorname{dist}(z, \mathbb{R}^N \setminus W) \geq \frac{1}{j} \}$

- man betrachtet Kugeln $K \subset \mathbb{R}^N$ mit $\overline{K} \subset W_\alpha$ für wenigstens ein α

$\Rightarrow$ endlich viele dieser Kugeln überdecken A_2: $K_1, \dots, K_r$

zu jedem K_i ex. η_i: $\eta_i|_{K_i} \equiv 1$, $\eta_i|_{\mathbb{R}^N \setminus A} \equiv 0$ für $A \subset W_\alpha$ abgeschl.

- $j \geq 3$: $\underbrace{A_j \setminus \mathring{A}_{j-1}}_{\text{kompakt}} \subset \underbrace{W \setminus A_{j-2}}_{\text{offen}}$



man betrachtet alle Kugeln $K \subset \mathbb{R}^N$ mit
$\overline{K} \subset (W \setminus A_{j-2}) \cap W_\alpha$ für ein α

$\Rightarrow$ endlich viele dieser Kugeln überdecken $A_j \setminus \mathring{A}_{j-1}$: $K_1', \dots, K_s'$

zu jedem K_i' ex. η_i': $\eta_i|_{K_i'} \equiv 1$, $\eta_i|_{\mathbb{R}^N \setminus A} \equiv 0$

für $A \subset (W \setminus A_{j-2}) \cap W_\alpha$ abgeschl.

$\Rightarrow$ man durchläuft alle j und erhält insgesamt eine Folge glatter Funktionen: $\eta_1, \eta_2, \dots$

- zu jedem j sind nur endlich viele η_i nicht identisch Null auf A_j

$x \in W \rightarrow \exists_j\ x \in \mathring{A}_j \Rightarrow \sum \eta_j$ ist endlich in einer Umgeb. jedes Punktes in W

$x \in W \rightarrow \exists_i\ \eta_i(x) \neq 0$

$\rightarrow \eta_i \cdot (\sum \eta_k)^{-1}$ ist glatt und wohldefiniert

$\Rightarrow \{ \theta_i := \eta_i (\sum \eta_k)^{-1}|_X \}$ ist eine Zerlegung der Eins