8. Vorlesung
05.05.10

eigentlich:
Urbild kompakter
Mengen ist kompakt

Folgerung: Auf jeder Mft. X existiert eine eigentliche Abbildung $\rho : X \to \mathbb{R}$.

Beweis: • Sei $\{U_i\}$ offene Teilmengen von X mit $\overline{U_i}$ kompakt für alle i, sei $\{\theta_i\}$ eine untergeordnete Zerlegung der Eins

$\Rightarrow$ $\rho := \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \theta_k$ ist eine glatte Funktion auf X

• $\rho(x) \leq j \quad \rightarrow \quad \exists\, k,\ 1 \leq k \leq j$ mit: $\theta_k(x) \neq 0$

$$\Rightarrow \quad \rho^{-1}([-j,j]) \subset \bigcup_{k=1}^{j} \{x \mid \theta_k(x) \neq 0\}$$

die Menge auf der rechten Seite hat einen kompakten Abschluß

$\Rightarrow$ $\rho^{-1}([-j,j])$ ist kompakt (C kompakt, $A \subset C$ abg. $\Rightarrow A$ kompakt)

• $A \subset \mathbb{R}$ kompakt

$\rightarrow$ es ex. j mit $A \subset [-j,j]$

$\Rightarrow$ $\rho^{-1}(A) \subset \rho^{-1}([-j,j])$

$\rightarrow$ $\rho^{-1}(A)$ ist kompakt

dh ρ ist eine eigentliche Abbildung

Anwendung der Zerlegung der Eins: Existenz Riemannscher Metriken

Riemannsche Metrik = glatte Zuordnung $x \mapsto g_x$, die jedem $x \in X$ ein euklid. Skalarprodukt g_x auf $T_x M$ zuordnet

Satz: Auf jeder zus. Mft. existiert eine Riemannsche Metrik

Beweis: Seien $\varphi_\alpha : U_\alpha \subset \mathbb{R}^k \to V_\alpha \subset X$ Parametrisierungen für X

dh $X = \bigcup V_\alpha$, $V_\alpha \subset X$ offen

$\{\theta_i\}$ sei eine $\{V_\alpha\}$ untergeordnete Zerlegung der Eins

sei q irgendein euklid. Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^k$

$\Rightarrow$ man definiert:

$$g := \sum_i \theta_k \cdot (\varphi_k^{-1})^* q \qquad \text{dh} \qquad g_x(v,w) := \sum_i \theta_k(x)\, q\big((d\varphi_k)^{-1} v, (d\varphi_k)^{-1} w\big)$$

$\Rightarrow$ g ist eine Riemannsche Metrik auf X

zz: g ist positiv-definit

da $x \in X \Rightarrow \exists k_0 : \theta_{k_0}(x) > 0$

$$\Rightarrow g_x(v,v) = \sum_i \theta_k(x)\, q\big((d\varphi_k)^{-1} v, (d\varphi_k)^{-1} v\big) \qquad v \in T_x X, v \neq 0$$

$$\geq \theta_{k_0}(x)\, q\big((d\varphi_k)^{-1} v, (d\varphi_k)^{-1} v\big) > 0$$

Bemerkung: Es existiert keine Lorenz-Metrik auf S^2

da Aus der Existenz einer Lorenz-Metrik auf S^2, folgt die Existenz eines Vektorfeldes ohne Nullstellen auf S^2 $\lightning$

Satz: Sei M eine kompakte Mfk. (im abstrakten Sinne). Dann existiert eine Einbettung von M in einen $\mathbb{R}^M$

Beweis: M ist ein top. Raum, $M = \bigcup V_\alpha$ $\qquad$ $\dim M = k$

Homöomorphismen (Karten): $\varphi_\alpha : V_\alpha \to U_\alpha \subset \mathbb{R}^k$ $\quad$ + glatte Kartenwechsel

durch Modifikation der Karten kann man immer annehmen.

- man hat endlich viele Karten: $V_1, \dots V_m$
- $\varphi_i(V_i) \supset \overline{K}_2 = \{x \in \mathbb{R}^k \mid |x| \leq 2\}$
- $M = \bigcup \varphi_i^{-1}(K_1)$

Sei $\lambda : \mathbb{R}^k \to [0,1]$ glatt mit: $\lambda|_{K_1} \equiv 1$, $\lambda|_{\mathbb{R}^k \setminus K_2} \equiv 0$

$\to$ man definiert $\lambda_i : M \to [0,1]$ $\qquad$ glatte Funktionen (globalisieren φ_i)

$$\lambda_i = \begin{cases} \lambda \circ \varphi_i & \text{auf } V_i \\ 0 & \text{auf } M \setminus V_i \end{cases}$$

$\to$ $M = \bigcup B_i$ $\quad$ mit $\quad$ $B_i := \lambda_i^{-1}(1) \subset V_i$ $\qquad$ (da $\varphi_i^{-1}(K_1)$ M überd.

$\to$ man definiert: $f_i : M \to \mathbb{R}^k$

$$f_i(x) = \begin{cases} \lambda_i(x)\, \varphi_i(x) & \text{für } x \in V_i \\ 0 & \text{für } x \in M \setminus V_i \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $g_i := (f_i, \lambda_i) : M \to \mathbb{R}^k \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^{k+1}$
$\quad g = (g_1, \dots, g_m) : M \to \mathbb{R}^{k+1} \times \dots \times \mathbb{R}^{k+1} = \mathbb{R}^{m(k+1)}$ $\Big\}$ glatte Abbildungen

- $x \in B_i \to g_i$ ist Immersion in x $\quad \to$ g ist Immersion
- g ist injektiv

da $x \neq y$, $y \in B_i$: $\quad$ a) $x \in B_i \to g(x) \neq g(y)$ $\quad$ da $f_i|_{B_i} = \varphi_i|_{B_i}$

$\qquad$ b) $x \notin B_i \to \lambda_i(y) = 1 \neq \lambda_i(x) \to g(x) \neq g($

- M kompakt $\Rightarrow$ g ist eine Einbettung

6)

<u>Whitney - Einbettungssatz:</u> Jede k- dimensionale Mfk. besitzt eine Einbettung nach $\mathbb{R}^{2k+1}$.

(Einbettung = injektive eigentliche Immersion)

<u>Beweis:</u> • Sei $\tilde{f}: X \to \mathbb{R}^{2k+1}$ eine injektive Immersion und sei
$j: \mathbb{R}^{2k+1} \to \mathbb{R}^{2k+1}$, $z \mapsto \frac{z}{1+|z|^2}$, j bildet $\mathbb{R}^{2k+1}$ auf das Innere der Einheitskugel ab (diffeomorph)

$\Rightarrow$ $f := j \circ \tilde{f}: X \to \mathbb{R}^{2k+1}$ ist eine injektive Immersion mit $|f(x)| < 1$

• Sei $\rho: X \to \mathbb{R}$ eine eigentliche Funktion

$\Rightarrow$ $F: X \to \mathbb{R}^{2k+2}$, $x \mapsto (f(x), \rho(x))$ ist eine injektive Immersion

• sei $\pi: \mathbb{R}^{2k+2} \to H = a^\perp$ eine orthogonale Projektion, wie oben

$\Rightarrow$ $\pi \circ F: X \to \mathbb{R}^{2k+1}$ ist eine injektive Immersion für fast alle $a \in S^{2k+1}$

$\Rightarrow$ a sei keiner der beiden Pole (SP und NP definieren die gleiche Projektion π)

$\Rightarrow$ $\pi \circ F$ ist eigentlich

<u>da</u> <u>Behauptung:</u> $\forall_c \exists_d \quad \{x \in X \mid |\pi \circ F(x)| \leq c\} \subseteq \{x \in X \mid |\rho(x)| \leq d\}$

ρ eigentlich $\Rightarrow$ Menge auf der rechten Seite ist kompakt (Urbild einer kompakten Menge)

$\Rightarrow$ $(\pi \circ F)^{-1}(K)$ ist kompakt für jede abgeschlossene Kugel $K \subset H$

$\Rightarrow$ $\pi \circ F$ ist eigentlich

<u>Beweis der Behauptung:</u> Annahme die Behauptung ist falsch

$\Rightarrow \exists \{x_i\}$ Folge in X mit: $|\pi(F(x_i))| < c$ aber $\rho(x_i) \to \infty$

$F(x_i) - \pi(F(x_i)) \in \mathbb{R}a$ $\quad (\pi(z) = z - \langle z, a\rangle \frac{a}{|a|^2})$

$\Rightarrow$ $w_i := \frac{1}{\rho(x_i)} [F(x_i) - \pi \circ F(x_i)] \in \mathbb{R}a$

$\Rightarrow$ $\lim_{i \to \infty} w_i = (0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{R}a$

<u>da</u> • $\frac{F(x_i)}{\rho(x_i)} = \left(\frac{f(x_i)}{\rho(x_i)}, 1\right) \to (0, \dots 0, 1)$ denn $|f(x_i)| < 1$ für alle i

• $\frac{\pi \circ F(x_i)}{\rho(x_i)} \to 0$ denn $\left|\frac{\pi \circ F(x_i)}{\rho(x_i)}\right| \leq \frac{c}{\rho(x_i)}$

$\Rightarrow$ a ist der NP oder SP $\lightning$

$\Rightarrow$ die Behauptung und der Satz sind bewiesen

Bemerkungen zum Whitney - Einbettungssatz

- Whitney zeigte:
  - jede k-dim. Mfk. besitzt eine Einbettung in $\mathbb{R}^{2k}$
  - jede k-dim. Mfk. besitzt eine Immersion in $\mathbb{R}^{2k-1}$

- schwacher Whitney - Einbettungssatz:

  Jede stetige Abbildung $f: X \to Y$, $\dim X = k$, $\dim Y = m > 2k$ kann durch glatte Einbettungen approximiert werden

- Es gibt k-dim. Mfk., die sich nicht in $\mathbb{R}^{2k-1}$ einbetten lassen

  Beispiel: $X = \mathbb{R}P^k$ reell projektiver Raum k-dim. Mfk

  $= $ Menge der 1-dim. Unterräume von $\mathbb{R}^{k-1}$

  $= S^k/_\sim$ mit $x \sim -x$

  $\mathbb{R}P^k$ läßt sich nicht in $\mathbb{R}P^{2k-1}$ wenn $k = 2^a$

  zB $\mathbb{R}P^2$ läßt sich nicht in $\mathbb{R}^3$ einbetten

- (Haefliger-Hirsch-Wall): Ist k keine 2er Potenz, dann ex. für jede k-dim Mfk. eine Einbettung nach $\mathbb{R}^{2k-1}$

- (Cohen '85): Jede k-dim. Mfk. besitzt eine Immersion nach $S^{2k-\alpha(k)}$, dabei ist $\alpha(k)$ die Anzahl der Einsen in der binären Entwicklung von k

- orientierbare Flächen besitzen Einbettungen nach $\mathbb{R}^3$, nicht orientierbare lassen sich nur nach $\mathbb{R}^4$ einbetten

- M kompakt, or.-bar, k-dim besitzt Einbettung nach $\mathbb{R}^{2k-1}$

- M kompakt, k-dim., r-zus. besitzt Einbettung nach $\mathbb{R}^{2k-r}$ falls $2r+5<$

- Die Kleinsche Flasche besitzt keine Einbettung nach $\mathbb{R}^3$:

Identifikation von Boden und Deckel entlang der Pfeile