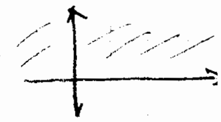
9. Vorlesung
11.05.10

Mannigfaltigkeiten mit Rand

Ziel: Erweiterung des Mannigfaltigkeitsbegriff auf Objekte mit Rand

Modellraum: $H^n = \mathbb{R}^n_+ = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid x = (x_1, \dots, x_n),\ x_n \geq 0 \}$



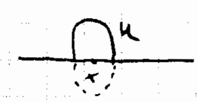
Rand: $\partial H^n = \{ (x_1, \dots, x_{n-1}, 0) \mid x_i \in \mathbb{R} \} \cong \mathbb{R}^{n-1}$

Definition: Eine Menge $X \subset \mathbb{R}^N$ ist eine k-dimensionale Mfk. mit Rand, falls jeder Punkt von X eine Umgebung besitzt, die diffeomorph zu einer offenen Menge in H^k ist. → lokale Parametris.

Der Rand von X, man schreibt ∂X, ist die Menge aller Punkte, die in einer lokalen Parametrisierung zu Punkten in ∂H^k entsprechen.

Bemerkungen:
- X, Y Mfk. mit Rand $\Rightarrow$ $X \times Y$ ist i.A. keine Mfk. (mit Rand)
- aber: $\partial X = \emptyset \Rightarrow X \times Y$ ist Mfk mit Rand $(X \times Y) = X \times \partial Y$
- Tangentialraum, Differential, Kettenregel übertragen sich auf Mfk. mit Rand

genauer:
- $U \subset H^k$ offen, $g : U \to \mathbb{R}^l$ glatt



$(dg)_u := d\tilde{g}_u : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l$

für eine glatte Fortsetzung $\tilde{g}$ von g

Behauptung: Die Definition ist unabhängig von der Wahl der Fortsetzung

da
- $d\tilde{g}_{u_i} = d\tilde{\tilde{g}}_{u_i}$ für u_i in $\mathring{H}^k$ (da $\tilde{g}_{u_i} = \tilde{\tilde{g}}_{u_i}$)
- Übergang zum Grenzwert, $d\tilde{g}_{u_i}$ stetig, linear

- $T_x X := \operatorname{im} d\varphi_0$ $\qquad \varphi : U \subset H^k \to X$ lokale Param.

d.h. $T_x X \cong \mathbb{R}^k$ auch für $x \in \partial X$!

- $f : X \to Y$ induziert $df_x : T_x X \to T_{f(x)} Y$

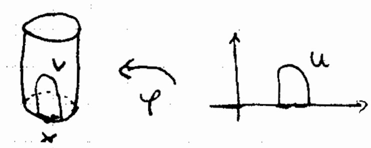
auch für Mfk. mit Rand

Bemerkung:
- Diffeomorphismen überführen Randpunkte in Randpunkte
- $X \setminus \partial X$ ist eine k-dim. Mfk. ohne Rand

Lemma: Sei X eine k-dim. Mfk. mit Rand, dann ist ∂X eine $(k-1)$-dim. Mfk. ohne Rand.

Beweis: sei $x \in \partial X$, $\varphi : \underset{\text{offen}}{U \subset H^k} \longrightarrow \underset{\text{offen}}{V \subset X}$ lokale Parametrisierung

zu zeigen: $\varphi(\partial U) = \partial V$ (*)



aus (*) folgt das Lemma: $\varphi : \underset{\text{offen in } \mathbb{R}^{k-1}}{\partial U = U \cap H^k} \xrightarrow{\sim} \underset{\text{offene Umgebung von } x \text{ in}}{\partial V = \partial X \cap V}$

$\rightarrow$ φ ist lokale Parametrisierung

Beweis von (*): nach Definition gilt: $\varphi(\partial U) \subset \partial V$

zu zeigen bleibt: $\varphi(\partial U) \supset \partial V$

d.h. $\varphi(\partial U) \supset \psi(\partial W)$ für jede andere lokale Parametrisierung $\psi : W \to V$

d.h. $\partial U \supset \varphi^{-1} \circ \psi(\partial W)$

sei $g := \varphi^{-1} \circ \psi : W \to U$ Diffeom. auf $g(W)$

Annahme: $u = g(w)$ liegt nicht im Rand von U, für ein $w \in \partial W$

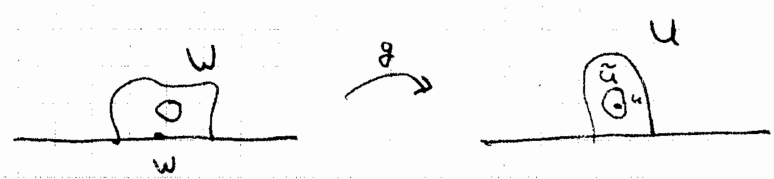
$\Rightarrow$ es ex. eine offene Umgebung von u in $g(W)$, offen in $\mathbb{R}^k$: $\tilde{U}$

$\Rightarrow$ $g^{-1}(\tilde{U})$ ist offen in $\mathbb{R}^k$ und offene Umgebung von w in W (*)

↯ da $w \in \partial W$

zu (*): $w \in W \setminus \partial W$

$\Leftrightarrow$ es ex. eine offene Umgebung $\tilde{W}$ von w mit $\tilde{W} \subset W$ und $\tilde{W}$ ist offen in $\mathbb{R}^k$



hier: $\tilde{W} := g^{-1}(\tilde{U})$

Lemma: Sei M eine Mfk. ohne Rand und sei $\pi : M \to \mathbb{R}$ eine glatte Abbildung, die Null als regulären Wert hat. Dann ist

$$X = \{ m \in M \mid \pi(m) \geq 0 \}$$

eine Mfk. mit Rand: $\partial X = \pi^{-1}(0)$.

Beweis:
- $\{ m \in M \mid \pi(m) > 0 \}$ ist offen in M und daher eine Untermfk.
- sei $m \in M$ mit $\pi(m) = 0$

  π ist regulär in m $\Rightarrow$ es ex. Koordinaten um m, so dass π die kanonische Submersion

  $\rightarrow$ OBdA π ist die kanonische Submersion, für diese gilt aber das Lemma offensichtlich

Beispiel: $M = \mathbb{R}^n$, $\pi(m) := 1 - \|m\|^2$

$\Rightarrow \overline{K}_1 = \{ m \in \mathbb{R}^n \mid \|m\| \leq 1 \}$ ist eine Mfk. mit Rand

Satz: Sei X eine Mfk. mit Rand und Y eine Mfk. ohne Rand. Sei $f : X \to Y$ eine glatte Abbildung, so dass f und auch $f|_{\partial X}$ transversal zu einer randlosen Untermfk. $Z \subset Y$ sind, dann ist $f^{-1}(Z)$ eine Mfk. mit Rand:

$$\partial f^{-1}(Z) = f^{-1}(Z) \cap \partial X$$

Bemerkung:
- Transversalitätsbedingung $\quad df_x(T_x X) + T_{f(x)} Z = T_{f(x)} Y$
- als Spezialfall $Z = \{y\}$ erhält man eine Verallgemeinerung des Satzes vom regulären Wert:

  Bedingung: y ist regulärer Wert für $f : X \to Y$ und für $f|_{\partial X} : \partial X \to Y$

Beweis des Satzes:

- Transversalität kann man zurückführen auf reguläre Werte geeigneter Abbildungen
- Es geht um eine lokale Aussage, d.h. man kann die Situation in lokalen Koordinaten betrachten

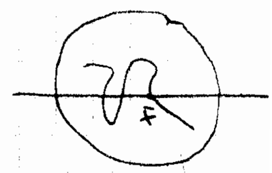
$\Rightarrow$ oBdA: $\quad f : H^m \longrightarrow \mathbb{R}^n \quad , \; y \in \mathbb{R}^n$ regulärer Wert, $\quad m > n$

$\bar{x} \in f^{-1}(y)$

a) $\bar{x} \in H^m \setminus \partial H^m \quad \rightarrow \quad f^{-1}(y)$ ist eine glatte Mfk. um $\bar{x}$

b) $\bar{x} \in \partial H^m$

- Sei $\tilde{f} : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ eine lokale glatte Fortsetzung in einer Umgebung von $\bar{x}$



d.h. $\quad f = \tilde{f}\,|_{U \cap H^m}$

$\tilde{f}^{-1}(y)$

$\tilde{f}$ hat keine kritischen Punkte für U genügend klein

$\rightarrow \tilde{f}^{-1}(y)$ ist eine Mfk. ohne Rand, der Dimension $m - n$

- Sei $\pi : \tilde{f}^{-1}(y) \longrightarrow \mathbb{R}$ die Projektion, $\pi(x_1, \dots, x_m) = x_m$

Behauptung: $\quad 0$ ist regulärer Wert von π

Beweis der Behauptung:

- $T_x \tilde{f}^{-1}(y) = \ker d\tilde{f}_x \qquad$ für $x \in \pi^{-1}(0) = \partial H^m$
$= \mathbb{R}^{m-1}$
$\qquad\qquad = \ker df_x$

wobei $\quad df_x : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$

- Annahme: $\quad 0$ ist nicht regulärer Wert von π

$\Rightarrow \; d\pi = \pi$ ist identisch Null auf $T_x \tilde{f}^{-1}(y)$

$\Rightarrow \; \ker df_x \subset \partial H^m = \mathbb{R}^{m-1}$

$$\Rightarrow \quad \ker(df)_x = \ker(d f|_{\partial H^m})_x$$

aber: $df_x : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ und $d(f|_{\partial H^m})_x : \mathbb{R}^{m-1} \to \mathbb{R}^n$
sind nach Voraussetzung surjektiv $\lightning$

da Dimensionsformel liefert: $m = \dim \ker df_x + n$
$$\qquad\qquad \shortparallel$$
$$m-1 = \dim \ker d f|_{\partial H^m} + n$$

Satz von Sard: Sei $f: X \to Y$ glatt, $\partial X \neq \emptyset$, $\partial Y = \emptyset$.
Dann ist fast jeder Punkt in Y regulärer Wert für $f: X \to Y$ und für $f|_{\partial X}: \partial X \to Y$

Beweis: $d f|_{\partial X} = df\big|_{T_x \partial X}$ $\qquad T_x \partial X \subset T_x X$ Unterraum der Kodimension 1

$\Rightarrow$ $f|_{\partial X}$ regulär in $x \in \partial X$ $\to$ f ist regulär in x

$\Rightarrow$ $y \in Y$ ist nicht regulärer Wert für f und $f|_{\partial X}$
$\Leftrightarrow$ y ist kritischer Wert für $f: X \setminus \partial X \to Y$ oder $f|_{\partial X}: \partial X \to Y$

aber: $X \setminus \partial X$ und ∂X sind Mfk. ohne Rand, d.h. Satz von Sard ist anwendbar und beide Mengen kritischer Werte haben das Maß Null

$\Rightarrow$ Das Komplement der Menge der gemeinsamen Werte von f und $f|_{\partial X}$ ist die Vereinigung zweier Nullmengen, hat also wieder Maß Null.