10. Vorlesung
12.05.10

Der Fixpunktsatz von Brouwer

Satz. Jede kompakte, zusammenhängende Mfk. mit Rand ist diffeomorph zu $[0,1]$ oder S^1.

Bemerkungen:

- ohne Kompaktheit in Dimension 1: $\mathbb{R}$ und S^1
- 2-dim. Mfk lassen sich klassifizieren

  M^2 kompakt, orientiert $\Rightarrow$ M diffeomorph zu  ...

  S^2 T^2 Σ_2

- kompakte 3-dim. Mfk. können klassifiziert werden

  = Geometrisierungsvermutung von Thurston
  Beweis: Perelman

- 4-dim. Mfk. können nicht klassifiziert werden

  hier: Klassifikat bis auf Homöomorph

  da
  - endlich erzeugte Gruppen können nicht klassifiziert werden
  - jede endlich erzeugte Gruppe kann als Fundamentalgruppe eines 4-dim Mfk. realisiert werden

- weitere Klassifikationen sind unter Zusatzbedingungen möglich, z.B. einfach-zus. ($\nearrow$ Smale)
- Friedmann: 4-dim. einfach-zus. Mfk. sind klassifiziert durch ihre Schnittform

Beweis des Satzes: siehe Milnor

Bemerkung: Jede kompakte 1-dim. Mft. mit Rand ist die disjunkte Vereinigung von endlich vielen Zusammenhangskomponenten

Folgerung: Sei X eine kompakte, 1-dim. Mft. mit Rand. Dann besteht ∂X aus einer geraden Anzahl von Punkten.

Satz: Sei X eine kompakte Mft. mit Rand. Dann existiert keine glatte Abbildung $g: X \to \partial X$ mit $g|_{\partial X} = \mathrm{Id}_{\partial X}$,

d.h. es existiert keine Retraktion von X auf seinen Rand.

Beweis: Annahme: Es existiert eine glatte Retraktion, $g: X \to \partial X$

sei $z \in \partial X$ ein regulärer Wert (existiert nach Sard)

$\Rightarrow$ $g^{-1}(z) \subset X$ ist Untermft. mit Rand

$\dim g^{-1}(z) = \dim X - \dim \partial X = 1$

d.h. $g^{-1}(z)$ hat eine gerade Anzahl von Randpunkten

nach Voraussetzung: $g|_{\partial X} = \mathrm{Id}$

$$\Rightarrow \quad (g|_{\partial X})^{-1}(z) = g^{-1}(z) \cap \partial X = \{z\}$$

$\Rightarrow$ $g^{-1}(z)$ hat nur einen Randpunkt $\lightning$

Brouwer-Fixpunktsatz: Jede glatte Abbildung der abgeschlossenen Einheitskugel in sich hat einen Fixpunkt.

d.h. $f: \overline{K}_1 \to \overline{K}_1$ glatt, $\overline{K}_1 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$

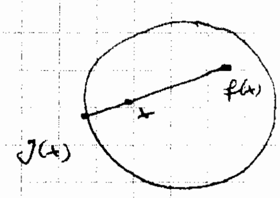
$\Rightarrow \exists\, x \in \overline{K}_1$ mit $f(x) = x$.

Beweis (nach M. Hirsch)

Annahme: $f: \overline{K}_1 \to \overline{K}_1$ ohne Fixpunkte

Idee: man konstruiert aus f eine glatte Retraktion $g: \overline{K}_1 \to \partial \overline{K}_1 = S^{n-1}$

$g(x) :=$ Punkt in $\partial \bar{K}_1 = S^{n-1}$ auf der Verlängerung der Strecke von $f(x)$ nach x



offensichtlich gilt: $\quad g\big|_{\partial \bar{K}_1} = \mathrm{Id}$

zu zeigen: $\quad g$ ist eine glatte Abbildung $\qquad$ ($\to$ g ist eine glatte Retraktion ↯)

Geradengleichung liefert: $\quad \exists \quad t = t(x)$

mit $\quad g(x) = t \cdot x + (1-t)\, f(x)$

zu zeigen: $\quad t$ hängt glatt von x ab

$$\|g(x)\|^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad t^2 \|x\|^2 + 2t(1-t)\langle x, f(x)\rangle + (1-t)^2 \|f(x)\|^2 = 1$$

$$\Rightarrow \quad t^2 \left(\|x\|^2 - 2\langle x, f(x)\rangle + \|f(x)\|^2 \right)$$

$$+ 2t \left(\langle x, f(x)\rangle - \|f(x)\|^2 \right) + \|f(x)\|^2 - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \quad t^2 \|x - f(x)\|^2 + 2t \langle x - f(x), f(x)\rangle + \|f(x)\|^2 - 1 = 0$$

$\Rightarrow$ das gesuchte t ist die eindeutig bestimmte positive Lösung dieser quadratischen Gleichung

$\Rightarrow$ t schreibt sich als expliziter Wurzelausdruck in glatten Funktionen in x

d.h. $\quad t = t(x)$ ist glatt in x

<u>Folgerung</u>: Jede stetige Abbildung der Einheitskugel in sich besitzt einen Fixpunkt.

(= Satz von Brouwer in der ursprünglichen Formulierung)

<u>Beweis</u>: $f: \bar{K}_1 \longrightarrow \bar{K}_1$

man approximiert f durch glatte Abbildungen

- Weierstrass-Approximationssatz $\Rightarrow$ $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ p_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ polynomiale Funktion

  mit $\| p_1(x) - f(x) \| < \varepsilon \qquad \forall x \in \bar{K}_1$

- Sei $p(x) := \dfrac{p_1(x)}{1+\varepsilon}$

$\Rightarrow p: \bar{K}_1 \longrightarrow \bar{K}_1$ <u>da</u> $\| p_1(x) \| - \| f(x) \| \le \| p_1(x) - f(x) \| < \varepsilon$

$\| f(x) \| \le 1 \Rightarrow \| p_1(x) \| < 1 + \varepsilon$

$\| p(x) - f(x) \| < 2\varepsilon$ <u>da</u> $\| f(x) - p(x) \| \le \| f(x) - p_1(x) \| + \| p_1(x) - p(x) \|$

$$\le \varepsilon + \| p_1(x) \| \cdot \left| 1 - \frac{1}{1+\varepsilon} \right|$$

$$\le \varepsilon + (1+\varepsilon) \cdot \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} = 2\varepsilon$$

- f habe keinen Fixpunkt $\Rightarrow$ $\| f(x) - x \| > c > 0$ auf $\bar{K}_1$

  (da $\bar{K}_1$ kompakt)

man wählt Approximation p mit $\| f(x) - p(x) \| <$ auf $\bar{K}_1$

p erfüllt die Voraussetzungen des Fixpunktsatzes von Brouwer

$\Rightarrow \exists \ x_0 \in \bar{K}_1$ mit $p(x_0) = x_0$

$\Rightarrow \| f(x_0) - p(x_0) \| = \| f(x_0) - x_0 \| < c \qquad \lightning$

Anwendung des Fixpunktsatzes von Brouwer

<u>Satz von Frobenius:</u> Sei $A = (a_{ij}) \in M(n \times n, \mathbb{R})$ mit $a_{ij} \geq 0$ für alle i, j. Dann besitzt A einen reellen nicht-negativen Eigenwert.

<u>Beweis:</u> • oBdA A nicht singulär (sonst: $\det A = 0$, dh. Null ist ein Eigenwert)

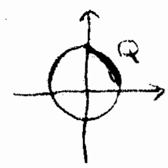
• man betrachtet: $v \overset{f}{\longmapsto} \dfrac{Av}{\|Av\|}$

$\Rightarrow$ nach Einschränkung: $f : S^{n-1} \to S^{n-1}$

• Sei $Q = \{ (x_1, \dots, x_n) \in S^{n-1} \mid x_i \geq 0 \quad i = 1, \dots n \}$

man sieht: Q ist homöomorph zu $\overline{K}_1^{n-1}$

$$\overline{K}_1^{n-1} = \{ x \in \mathbb{R}^{n-1} \mid \|x\| \leq 1 \}$$



nach Voraussetzung:
$$\begin{array}{ccc} f : Q & \longrightarrow & Q \\ \cong & & \cong \\ \tilde{f} : \overline{K}_1^{n-1} & \longrightarrow & \overline{K}_1^{n-1} \end{array}$$

$\Rightarrow$ f hat einen Fixpunkt:

$$f v = \frac{Av}{\|Av\|} = v$$

dh. $Av = \|Av\| \cdot v$

damit ist v Eigenvektor zum Eigenwert $\|Av\| \geq 0$

<u>Satz</u>: Seien $g_1, \dots, g_n : \overline{K}_r \longrightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen und für alle $x = (x_1, \dots, x_n) \in S_r^{n-1} = \partial \overline{K}_r$ gelte

$$\sum_{i=1}^{n} g_i(x) \cdot x_i \geq 0 \qquad (*)$$

Dann besitzt das Gleichungssystem

$$g_1(x) = \dots = g_n(x) = 0$$

mindestens eine Lösung in $\overline{K}_r$.

<u>Beweis</u>: $g : \overline{K}_r \longrightarrow \mathbb{R}^n$ sei definiert als $g(x) := (g_1(x), \dots, g_n(x))$

Annahme: $g(x) \neq 0$ für alle $x \in \overline{K}_r$

$\Rightarrow$ $f(x) := -r \dfrac{g(x)}{\|g(x)\|}$ definiert eine glatte Abbildung $f : \overline{K}_r^n \longrightarrow S_r^{n-1}$

$\Rightarrow$ $\exists x_0$ mit $f(x_0) = x_0$

d.h. $x_0 = -r \dfrac{g(x_0)}{\|g(x_0)\|}$ und damit $x_0 \in S_r^{n-1}$

$\Rightarrow$ $\|x_0\|^2 = r^2 = -r \dfrac{\langle g(x_0), x_0 \rangle}{\|g(x_0)\|}$

$\Rightarrow$ $\langle g(x_0), x_0 \rangle = -r \cdot \|g(x_0)\| < 0$ $\lightning$ zur Voraussetzung $(*)$

<u>Bemerkungen</u>:
- Der Brouwersche Fixpunktsatz gilt nicht für die offene Kugel und nicht in unendlich-dimensionalen Vektorräumen (statt $\mathbb{R}^n$)

<u>aber</u>: ① Jede stetige Funktion auf einer kompakten konvexen Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ hat einen Fixpunkt!

② Jede stetige Funktion auf einer kompakten konvexen Teilmenge eines Banach-Raumes hat einen Fixpunkt (= Schauder Fixpunktsatz) (es reicht top. VR, hausdorff)