11. Vorlesung
18.05.10

Der Abbildungsgrad mod 2

Ziel: Definition einer Invariante von Abbildungen durch $\# f^{-1}(y) \bmod 2$

Homotopie-Lemma: Seien $f, g : X \to Y$ glatte, zueinander homotope Abbildungen, sei X kompakt ohne Rand und $\dim X = \dim Y$. Ist $y \in Y$ ein regulärer Wert für f und g, dann gilt.

$$\# f^{-1}(y) = \# g^{-1}(y) \mod 2$$

zur Erinnerung: $f, g : X \to Y$ heißen (glatt) homotop, wenn eine glatte Abbildung $F : X \times [0,1] \to Y$ existiert mit

$$F(x,0) = f(x), \quad F(x,1) = g(x) \quad \forall x \in X$$

man schreibt $f \underset{F}{\simeq} g$. $\qquad I := [0,1]$

f, g heißen isotop (und F eine Isotopie) falls zusätzlich

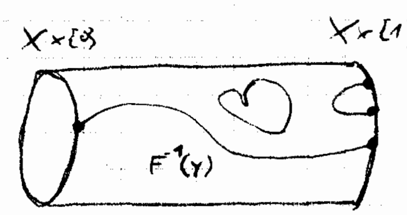
$$\begin{aligned} X &\longrightarrow Y \\ x &\longmapsto F(x,t) = f_t(x) \end{aligned}$$

für jedes $t \in [0,1]$ ein Diffeomorphismus ist.

Beweis des Lemmas: $f \underset{F}{\simeq} g$, $\quad f, g : X \to Y$

(i) y sei auch regulär für $F : X \times I \to Y$

$\Rightarrow$ $F^{-1}(y)$ ist eine kompakte 1-dim. Mfk mit Rand



$$\partial F^{-1}(y) = F^{-1}(y) \cap (X \times \{0\} \cup X \times \{1\})$$
$$= f^{-1}(y) \times \{0\} \cup g^{-1}(y) \times \{1\}$$

Die Anzahl der Randpunkte ist gerade.

$$\Rightarrow \quad \# F^{-1}(y) = \# f^{-1}(y) + \# g^{-1}(y) \equiv 0 \ (2)$$

$$\Rightarrow \quad \# f^{-1}(y) = \# g^{-1}(y) \quad \text{mod } 2$$

(ii) y sei beliebig (nicht unbedingt auch regulär für F)

Die Funktion $y \mapsto \# f^{-1}(y)$ ist lokal konstant auf der Menge der regulären Werte von f

$\Rightarrow \exists$ Umgebung V_1 von y: $\quad \# f^{-1}(y') = \# f^{-1}(y) \quad \forall y' \in V_1$

$\exists$ Umgebung V_2 von y: $\quad \# g^{-1}(y') = \# g^{-1}(y) \quad \forall y' \in V_2$

$\Rightarrow \exists\, z \in V_1 \cap V_2$ regulär für F (und f, g) (Sard)

$\Rightarrow \# f^{-1}(y) = \# f^{-1}(z) \equiv \# g^{-1}(z) = \# g^{-1}(y)$ (wie in (i))

$\Rightarrow \# f^{-1}(y) = \# g^{-1}(y) \quad \text{mod } 2$

<u>Homogenitäts-Lemma</u>: Sei X eine zus. Mfk. und $y, z \in X \setminus \partial X$. Dann existiert ein Diffeomorphismus $h: X \to X$, der isotop zur Identität ist und $h(y) = z$.

<u>Bemerkungen</u>:
- Nach dem Lemma operiert die Diffeomorphismengruppe $\mathrm{Diff}(X)$ transitiv auf X.
- Die Isotopie zur Identität bedeutet, dass die Zusammenhangskomponente der 1 in $\mathrm{Diff}(X)$ transitiv operiert
- Für $X = S^n$ ist h eine geeignete Drehung (allgemeiner für homogene Mfk.)
- Ist X eine Mfk. mit Rand, dann ist die Isotopie die Identität in der Nähe des Randes

<u>Beweisplan</u>: Man konstruiert eine Isotopie von $\mathbb{R}^n$ auf sich mit

(i) Punkte im Komplement des Einheitsballes bleiben fest

(ii) Die Null wird auf einen gegebenen Punkt im offenen Einheitsball verschoben

Beweis des Lemmas

(i) man konstruiert eine Isotopie $F : \mathbb{R}^n \times I \longrightarrow \mathbb{R}^n$

mit a) $F(x,0) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$

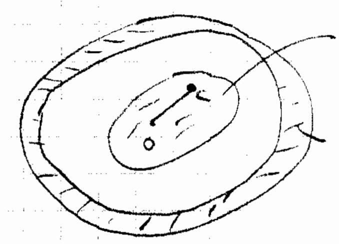
b) $F(x,t) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,\ \|x\| \geq 1,$

c) $F(0,1) = c$ für ein vorgegebenes c mit $\|c\| < 1$

man wählt $\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow [0,1]$ glatt mit $\operatorname{supp}(\varphi) \subset K_1$

Sei $t \mapsto F(x,t) = f_t(x)$ die eindeutige Lösung der DGL:

$$\frac{dx_i}{dt} = c_i \, \varphi(x_1, \dots x_n) \qquad i = 1, \dots, n$$



mit Anfangswert $f_0(x) = x$ und $c = (c_1, \dots, c_n)$ beliebig vorgegeben.

(Fluß eines Vektorfelds)

Nach Picard-Lindelöf existiert die Lösung $f_t(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$ und ist glatt in x und t, und

$$f_{s+t}(x) = f_s(f_t(x)) \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n,\ t, s \in \mathbb{R}$$

da $s \mapsto f_s(f_t(x))$ und $s \mapsto f_{s+t}(x)$ sind beides Lösungen der DGL mit dem Anfangswert $f_t(x)$ für $s = 0$

$\Rightarrow \quad f_{-t} = f_t^{-1}$ $\quad$ d.h. $f_t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ist für alle t ein Diffeomorphismus, und F ist damit eine Isotopie

$\Rightarrow \quad F$ ist die gesuchte Isotopie:

$F(0,1) = f_1(0) = c$ $\quad$ da $f_t(x) = x + t \cdot c$ im Bereich, wo $\varphi \equiv 1$ ist

$f_t(x) = x$ im Bereich, wo $\varphi \equiv 0$ ist

(ii) Übertragung auf die Mfk.:

Seien $y, z \in X \setminus \partial X$

man definiert eine Äquivalenzrelation: $y \sim z$

$\Leftrightarrow$ es ex. eine Isotopie von X (Identität auf eine Umgebung von ∂X), die y auf z abbildet

(man sagt: y ist zu z isotop)

nach (i) sind die Äquivalenzklassen offene Mengen in $X \setminus \partial X$

da jeder Punkt y in $X \setminus \partial X$ besitzt eine Umgebung diffeomorph zu $\mathbb{R}^n$, in einem kleinen Ball um y ist nach (i) jeder Punkt äquivalent zu y

$\Rightarrow$ $X \setminus \partial X$ ist die disjunkte Vereinigung offener Isotopieklassen

! $\Rightarrow$ $X \setminus \partial X$ besteht aus genau einer Äquivalenzklasse

da: X zus. $\rightarrow$ $X \setminus \partial X$ zus. $\Rightarrow$ es ex. keine Zerlegung in verschiedene disjunkte offene Mengen

$\Rightarrow$ zu je zwei Punkten $y, z \in X \setminus \partial X$ existiert ein Diffeomorphismus $h: X \to X$, isotop zu Id_X und mit $h(y) = z$.

<u>Satz</u>: Sei X eine kompakte Mfk. ohne Rand, Y zus., $\dim X = \dim Y$, sei $f: X \to Y$ glatt mit regulären Werten $y, z \in Y$. Dann gilt

$$\# f^{-1}(y) \equiv \# f^{-1}(z) \mod 2$$

Die Restklasse $[\# f^{-1}(y)] \in \mathbb{Z}_2$ heißt der <u>Abbildungsgrad mod 2</u> von f. Er hängt nur von der (glatten) Homotopieklasse von f ab.

man schreibt $\deg_2(f)$

! <u>Bemerkung</u>: Sei $f: X \to Y$ eine glatte Abbildung zwischen Mfk. mit Rand, $f(p) = q$ für $p \in X \setminus \partial X$ und $q \in \partial Y$ (zB $\partial X = \emptyset$)

$\rightarrow$ q kann kein regulärer Wert für f sein

Beweis des Satzes

(i) Sei $h: X \to X$ ein Diffeomorphismus, isotop zu Id_X und mit $h(y) = z$ (Homogenitäts Lemma)

$\Rightarrow$ • z ist reguläres Wert von $h \circ f$

• $h \circ f \simeq f$ da $F(x,t) := H(f(x), t)$, $H(x,0) = x$, $H(x,1) = h(x)$

$\Rightarrow \# (h \circ f)^{-1}(z) \equiv \# f^{-1}(z) \mod 2$ (Homotopie-Lemma)

$\qquad \| $

$\# f^{-1}(y)$

da h Diffeom.: $(h \circ f)^{-1}(z) = f^{-1}(h^{-1}(z)) = f^{-1}(y)$

$\Rightarrow \# f^{-1}(y) \equiv \# f^{-1}(z) \mod 2$

(ii) $\deg_2 f := [\# f^{-1}(y)] \in \mathbb{Z}_2$

Seien $f, g: X \to Y$ glatt homotop

$\Rightarrow \exists\, y \in Y$ reguläre Wert für f und g (Sard)

$\Rightarrow \deg_2 f = [\# f^{-1}(y)] = [\# g^{-1}(y)]$ (Homotopie-Lemma)

$= \deg_2 g$

d.h. $\deg_2 f$ ist eine Homotopie invariante

Beispiel: • $c: X \to X$ sei die konstante Abbildung, $c(x) = x_0$ $\forall x \in$

$\Rightarrow \deg_2 c = 0$ (man nimmt $x \neq x_0 \to x$ ist regulär und $f^{-1}(x) = \emptyset$)

• $\deg_2 \mathrm{Id}_X = 1$

$\Rightarrow$ Die Abbildung Id_X für eine kompakte Mft. X ohne Rand ist nicht homotop zur konstanten Abbildung c

<u>Anwendung</u>: Es gibt keine glatte Retraktion $\bar{K}_1^n \longrightarrow S^{n-1}$

<u>da</u> Annahme: $f: \bar{K}_1^n \to S^{n-1}$ sei glatte Retraktion

dh $f|_{S^{n-1}} = \mathrm{Id}$

man definiert: $F: S^{n-1} \times I \longrightarrow S^{n-1}$

$F(x,t) = f(t \cdot x)$

$\Rightarrow$ F ist eine Homotopie zwischen der konstanten Abbildung $x \mapsto f(0)$ und der Identität $\mathrm{Id}_{S^{n-1}}$.

<u>Beispiel</u>: $f: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = z^n$ (S^1 wird durch f n-mal um S^1 gewickelt)

$\rightarrow \deg_2 f \equiv n \mod 2$

<u>Satz</u>: Sei $f: X \to Y$ wie oben, $X = \partial W$. Es existiere eine glatte Abbildung $F: W \to Y$ mit $F|_X = f$, dh. f lasse sich glatt auf W fortsetzen. Dann gilt $\deg_2 f = 0$

<u>Beweis</u>: $\dim X = \dim Y \Rightarrow F^{-1}(y)$ ist kompakte 1-dim. Mft. mit Rand, dh. hat eine gerade Anzahl von Randpunkten

$\Rightarrow f^{-1}(y)$ besteht aus einer geraden Anzahl von Punkten (falls y regulärer Wert für f und F)

Falls y_0 regulärer Wert von f aber nicht für F ist, nutzt man wieder, dass $\deg_2 f$ konstant ist in einer Umgebung von y_0. Dann wählt man dort einen regulären Wert y für F und hat.

$$\deg_2 f = \# f^{-1}(y_0) \equiv \# f^{-1}(y) \equiv 0 \mod 2$$