Beispiel: Sei $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine glatte Funktion,
$W \subset \mathbb{C}$ kompakte 2-dim. Mfk. mit Rand

Frage: Hat p Nullstellen in W?

Antwort: Die Abbildung p habe keine Nullstellen auf ∂W. Hat $\frac{p}{|p|} : \partial W \to S^1$ einen mod-2-Abbildungsgrad ungleich Null, dann besitzt p Nullstellen in W.

Beweis: Annahme p habe keine Nullstellen in W, dann setzt sich die Abbildung $\frac{p}{|p|}$ auf ganz W fort und der mod-2-Abbildungsgrad ist Null.

d.h. die Lösbarkeit der Gleichung $p(z)=0$ kann man bestimmen, in dem man zählt, wie oft $p(z)$ in eine gegebene Richtung zeigt, während z den Rand von W durchläuft

Anwendung: Jedes komplexe Polynom ungeraden Grades hat eine Nullstelle

Beweis: $p(z) = z^m + a_1 z^{m-1} + \dots + a_m$

- man definiert: $p_t(z) = t\,p(z) + (1-t)\,z^m = z^m + t\,(a_1 z^{m-1} + \dots + a_m)$

  p_t ist eine Homotopie zwischen p und z^m

- es ex. ein hinreichend großer Kreis, auf dem kein p_t eine Nullstelle hat $\qquad$ Kreis $= \partial W$

  da $\dfrac{p_t(z)}{z^m} = 1 + t\left(a_1 \cdot \frac{1}{z} + \dots + a_m \cdot \frac{1}{z^m}\right) \xrightarrow[\text{für } z \to \infty]{} 1$

- $\Rightarrow \dfrac{p_t}{|p_t|} : \partial W \to S^1$ ist für alle t definiert

$\Rightarrow \deg_2\left(\dfrac{p_t}{|p_t|}\right) = \deg_2\left(\dfrac{p_0}{|p_0|}\right) = m \mod 2$ $\qquad$ da $p_0(z) = z^m$

$\Rightarrow \deg_2\left(\dfrac{p_t}{|p_t|}\right) = 1$ $\qquad$ da $\deg p \equiv 1\ (2)$

$\Rightarrow p$ hat eine Nullstelle

Windungszahl und der Satz von Borsuk - Ulam

Sei X kompakt und ohne Rand (man sagt: X ist geschlossen)

$\dim X = n-1$

$f: X \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $\quad z \notin f(X)$ $\qquad$ zB $f: S^1 \to \mathbb{R}^2$ geschlossene Kurve

man definiert $\quad \sigma_z : X \longrightarrow S^{n-1}$

$$\sigma_z(x) = \frac{f(x) - z}{\| f(x) - z \|}$$

Definition: Die Windungszahl mod 2 von f um z ist:

$$W_2(f, z) := \deg_2(\sigma_z) \in \mathbb{Z}_2$$

(ein Maß dafür, wie oft sich f um z "wickelt")

Lemma 1: Sei X der Rand einer kompakten Mfk. W und sei $F: W \longrightarrow \mathbb{R}^n$ eine glatte Fortsetzung von $f: X \to \mathbb{R}^n$. Sei $z \in \mathbb{R}^n$ ein regulärer Wert von F, der nicht im Bild von f liegt. Dann gilt $\qquad X = \partial W$

$$W_2(f, z) = \# F^{-1}(z) \mod 2$$

Beweis: (i) z liege nicht im Bild von F

$\Rightarrow$ σ_z besitzt eine glatte Fortsetzung zu $\quad W \longrightarrow S^{n-1}$

$$x \mapsto \frac{F(x) - z}{\| F(x) - z \|}$$

$\Rightarrow$ $\deg_2(\sigma_z) = 0$ $\qquad$ (siehe oben)

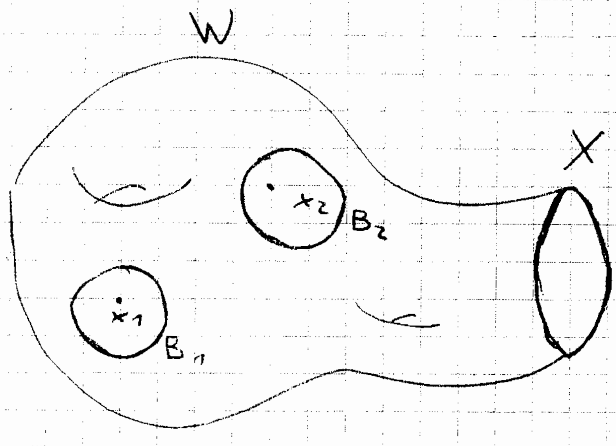
$\Rightarrow$ $W_2(f, z) = \# F^{-1}(z) \equiv 0 \mod 2$

(ii) Sei $F^{-1}(z) = \{ x_1, \dots, x_e \}$, $\qquad$ (endlich, da X kompakt)

seien $B_1, \dots, B_e$ disjunkte Bälle um $x_1, \dots, x_e$

dh. B_i ist das Bild eines Balles in $\mathbb{R}^n$, $i = 1, \dots, e$, unter einer lokalen Parametrisierung von W

außerdem: $\quad B_i \cap \partial W = \emptyset \qquad i = 1, \dots, e$



$W' := W \setminus \bigcup_{i=1}^{\ell} B_i$

$f_i := F|_{\partial B_i} \qquad i = 1, \dots, \ell$

man wendet (i) an auf die Mfk $X \cup \partial B_1 \cup \dots \cup \partial B_\ell$

$\overset{(i)}{\Rightarrow} \quad W_2(f, z) = \sum_{i=1}^{\ell} W_2(f_i, z)$

(iii) z ist regulärer Wert von $F : W \to \mathbb{R}^n$, $\dim W = n$

$\Rightarrow$ F ist ein lokaler Diffeomorphismus um x_i

$\Rightarrow$ die Abbildung $\partial B_i \longrightarrow S^{n-1}$

$$x \longmapsto \frac{f_i(x) - z}{\| f_i(x) - z \|}, \qquad f_i = F|_{\partial B_i}$$

ist bijektiv für B_i hinreichend klein

$\Rightarrow \deg_2(f_i, z) = 1$

$\overset{(ii)}{\Rightarrow} \quad W_2(f, z) \equiv \ell \equiv \# F^{-1}(z) \mod 2$

(10)

Satz: Sei $f: S^n \to S^n$ eine glatte Abbildung mit $f(x) = -f(-x)$ für alle $x \in S^n$. Dann gilt:

$$\deg_2(f) = 1$$

(d.h. f überführt antipodale Punkte antipodale Punkte)

Beweis: (Induktion über n)

IA: $n = 1$ (ÜA)

IVor: Der Satz gelte für Abb. $S^{n-1} \to S^{n-1}$

$S^{n-1} :=$ Äquator in S^n $\quad (x_{n+1} = 0)$ $\quad S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$

$g := f|_{S^{n-1}}$ $\quad f: S^n \to S^n$ mit $f(x) = -f(-x)$

man wählt einen regulären Wert $y \in S^n$ für f und g (Sard)

d.h. $y \notin g(S^{n-1})$ (aus Dimensionsgründen)

$\deg_2(f) = \# f^{-1}(y) \mod 2$

es gilt: $\# f^{-1}(y) = \frac{1}{2} \# f^{-1}(\mathbb{R}y)$ $\quad$ da $f(x) = y \Rightarrow f(-x) = -y \in \mathbb{R}$

- sei $f_+ := f|_{D^n_+}$ $\quad D^n_+ = \{x \in S^n \mid x_{n+1} \geq 0\}$ $=$ obere Halbkugel

$\Rightarrow \deg_2(f) = \# f_+^{-1}(\mathbb{R}y) \mod 2$

- Sei $\pi: S^n \to \mathbb{R}y^\perp$ die orthogonale Projektion

nach I.Vor. hat $\bar{g} := \frac{\pi \circ g}{\|\pi \circ g\|} : S^{n-1} \to S^{n-1}$ $\quad \deg_2(\bar{g}) = 1$

$\Rightarrow w_2(\pi \circ g, 0) = 1$ (nach Definition)

- $\pi \circ g$ setzt sich fort zu $\pi \circ f_+ : D^n_+ \to \mathbb{R}^n$

Lemma 1 $f := \pi \circ g$ $\quad \Rightarrow \# (\pi \circ f_+)^{-1}(0) \equiv 1 \mod 2$ $\quad$ aber: $\pi \circ f_+^{-1}(0) = f_+^{-1}(\mathbb{R}y)$

$\Rightarrow \deg_2(f) = 1$ $\quad$ da $\deg_2(f) = \# f_+^{-1}(\mathbb{R}y)$

Folgerung 1: Sei $f : S^k \to \mathbb{R}^{k+1} \setminus \{0\}$ mit $f(-x) = -f(x)$ für alle $x \in S^k$. Dann schneidet f jede Gerade durch Null wenigstens einmal.

Beweis: Annahme $\mathbb{R}y$ ist eine Gerade, die von f nicht geschnitten wird $\Rightarrow$ $w_2(f, 0) = \frac{1}{2} \# f^{-1}(\mathbb{R}y) = 0$

(man wählt y : $y \in \mathbb{R}^{k+1} \setminus f(S^k)$ $\Rightarrow y$ regulärer We… ex. da $f(S^k)$ ke…

Folgerung 2 (Borsuk-Ulam-Theorem)

Sei $f : S^n \to \mathbb{R}^n$ eine diff.bare Abbildung. Dann gibt es ein $x \in S^n$ mit $f(x) = f(-x)$.

Beweis: Annahme: Es existiert kein $x \in S^n$ mit $f(x) = f(-x)$

$\Rightarrow$ man definiert
$$g : S^n \to S^{n-1} \subset S^n$$
$$x \mapsto \frac{f(x) - f(-x)}{\| f(x) - f(-x) \|}$$

$\Rightarrow g(-x) = -g(x)$ für alle $x \in S^n$, $g : S^n \to S^n$

mit: $\deg_2(g) = 0$ $\lightning$ zum Satz g nicht surjektiv

Bemerkung: Eine andere Formulierung des Borsuk-Ulam-Theorems:

Sei $f : S^k \to \mathbb{R}^{k+1}$ mit $0 \notin f(S^k)$ und $f(x) = -f(-x)$ für alle $x \in S^k$. Dann ist $w_2(f, 0) = 1$.

Folgerung 3: Sei $f : S^k \to \mathbb{R}^k$ mit $f(x) = -f(-x)$ für alle $x \in S^k$. Dann existiert ein $x \in S^k$ mit $f(x) = 0$

Beweis: nach Folgerung 2 ex. ein x_0 mit $f(x_0) = f(-x_0)$

$$\Rightarrow f(x_0) = f(-x_0) = -f(x_0) \Rightarrow f(x_0) = 0$$

Bemerkung:
- Statt für $f : S^k \to \mathbb{R}^k$ kann man die Folgerungen auch für $f_1, \dots, f_k : S^k \to \mathbb{R}$ formulieren
- Auf der Erde (gedacht als S^2) gibt es immer zwei antipodale Punkte mit gleicher Temperatur und gleichem Druck.

Bemerkungen zum Borsuk-Ulam-Theorem

- Alle Aussagen gelten auch für stetige Abbildungen.
- Folgende Aussagen sind äquivalent zum Borsuk-Ulam-Theorem:

(1) Sei $U_1, \dots, U_{n+1}$ eine Überdeckung von S^n durch $n+1$ offene Mengen, dann enthält mindestens eine Menge ein Paar antipodaler Punkte

(2) Für jede Abbildung $f: S^n \to \mathbb{R}^n$ existiert ein $x \in S^n$ mit $f(x) = f(-x)$

(3) Für jede Abbildung $f: S^n \to \mathbb{R}^n$ mit $f(-x) = -f(x)$ für alle $x \in S^n$ existiert ein $x \in S^n$ mit $f(x) = 0$

(4) Es existiert keine Abbildung $f: S^n \to S^{n-1}$ mit $f(-x) = -f(x)$ $\forall x$.

(5) Es existiert keine Abbildung $f: B^n \to S^{n-1}$ mit $f(-x) = -f(x)$ $\forall x \in S^{n-1}$

(6) (1) mit abgeschlossenen Mengen

(7) Eine Abbildung $f: S^n \to S^n$ mit $f(-x) = -f(x)$ $\forall x$ ist nicht homotop zur konstanten Abbildung

- (1), (7) wurden von Lyusternik und Shnirelman bewiesen
- (2) $\Rightarrow$ (7): $\quad S^n = \bigcup_{i=1}^{n+1} F_i$, $F_i \subset S^n$ abgeschlossen

man definiert: $f: S^n \to \mathbb{R}^n$

$$f(x) = (\operatorname{dist}(x, F_1), \dots, \operatorname{dist}(x, F_n))$$

$$\Rightarrow \exists\, x \in S^n : \; f(x) = f(-x) = y$$

a) $\exists\, i : y_i = 0 \quad \Rightarrow \quad x$ und $-x$ liegen in F_i

b) $\forall\, i : y_i \neq 0 \quad \Rightarrow \quad x$ und $-x$ liegen in F_{n+1}

(7) $\Rightarrow$ (4): Fakt: Es ex. abgeschlossene Mengen $F_i \subset S^{n-1}$, $i = 1, \dots, n+1$, so dass kein F_i ein paar antipodale Punkte enthält

da man betrachtet n-Simplex $\Delta_n \subset \mathbb{R}^n$ mit $0 \in \Delta_n$ und projeziert die Seiten von 0 auf S^{n-1}

$$\Delta_n = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid x = \textstyle\sum_i t_i v_i \,,\, 0 \le t_i \le 1,\, \sum_i t_i = 1 \}$$

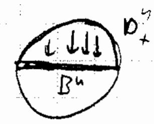
Sei $f : S^n \longrightarrow S^{n-1}$ mit $f(-x) = -f(x)$

$\rightarrow$ $f^{-1}(F_1), \dots, f^{-1}(F_{n+1})$ ist eine Überdeckung von S^n, durch abgeschlossene Mengen, die keine antipodalen Punkte enthalten.

Bem: Standard-Simplex: $\{ x \in \mathbb{R}^n \mid x_i \ge 0, \sum x_i \le 1 \}$ man hat $n+1$ Seiten

(4) $\Leftrightarrow$ (5): $\pi : (x_1, \dots, x_{n+1}) \longmapsto (x_1, \dots x_n)$

π ist ein Homöomorphismus $D^n_+ \to B^n$



- $f : S^n \to S^{n-1}$ mit $f(-x) = -f(x)$ $\forall x$

$\rightarrow$ $g : B^n \to S^{n-1}$ $g(x) = f(\pi^{-1}(x))$ mit $g(-x) = -g(x)$ für $x \in S^{n-1}$

- $g : B^n \to S^{n-1}$ $g(-x) = -g(x)$ $\forall x \in S^{n-1}$

$\rightarrow$ $f(x) := g(\pi(x))$

(4) $\Rightarrow$ (3): Annahme $f : S^n \to \mathbb{R}^n$, $f(-x) = -f(x)$ $\forall x$

$f(x) \neq 0$

$\Rightarrow$ $g : S^n \to S^{n-1}$ definiert durch $g(x) = \dfrac{f(x)}{\| f(x) \|}$

mit $g(-x) = -g(x)$ $\lightning$

(3) $\Rightarrow$ (4) $f : S^n \to S^{n-1}$ mit $f(-x) = -f(x)$

$\rightarrow$ $f : S^n \to \mathbb{R}^n$ mit $f(-x) = -f(x)$ und $f(x) \neq$

- Der Brouer-Fixpunktsatz folgt aus (5):

  da: $f : B^n \to B^n$ ohne Fixpunkte

  $\Rightarrow \exists\, g : B^n \to S^{n-1}$ mit $g|_{S^{n-1}} = \mathrm{Id}$

  $\Rightarrow g : B^n \to S^{n-1}$ mit $g(-x) = -g(x) \quad \forall x \in S^{n-1}$ $\lightning$

- <u>Schinken-Sandwich-Theorem</u>

  Seien $A_1, \dots, A_n \subset \mathbb{R}^n$ offene beschränkte Mengen. Dann existiert eine Hyperebene $H \subset \mathbb{R}^n$, die $A_1, \dots, A_n$ gleichzeitig in je zwei volumengleiche Teile zerlegt.

<u>Beweis</u>: für $n = 3$ $\quad A, B, C \subset \mathbb{R}^3$

oBdA $\quad A, B, C \subset S^2$

$H_{x,t}$ sei die Ebene orthogonal zu x und durch $t \cdot x$

<u>es gilt</u>: $\quad H_{-x,-t} = H_{x,t}$

A liegt zwischen $H_{x,1}$ und $H_{x,-1}$ $\qquad$ (α = Mittelw... aller mögl...)

$\exists\, \alpha : S^2 \to \mathbb{R}$ stetig mit $H_{x,\alpha(x)}$ zerlege A in zwei volumengleiche Teile

analog definiert man β für B und γ für C

<u>es gilt</u>: $\quad \alpha(-x) = -\alpha(x), \quad \beta(-x) = -\beta(x), \quad \gamma(-x) = -\gamma(x)$

man definiert: $\quad f : S^2 \to \mathbb{R}^2$

$$f(x) = (\alpha(x) - \beta(x), \alpha(x) - \gamma(x))$$

$\Rightarrow f(-x) = -f(x) \quad \forall x \in S^2$

$\Rightarrow \exists\, x_0 \in S^2 : \quad f(x_0) = 0 \quad$ dh $\quad \alpha(x_0) = \beta(x_0) = \gamma(x_0)$

$\Rightarrow$ Die Ebene $H_{x_0, \alpha(x_0)}$ teilt A, B, C jeweils in volumengleiche Hälften.