Orientierung von Mannigfaltigkeiten

Sei V ein reeller VR, $\dim V = n$

<u>Orientierung von V</u> = Äquivalenzklasse von geordneten Basen $b = \{v_1, \dots, v_n\}$

wobei $b \sim b' \Leftrightarrow \det(T) > 0$

mit $T: V \to V$, $T(v_i) = v_i'$
$b' = (v_1', \dots, v_n')$

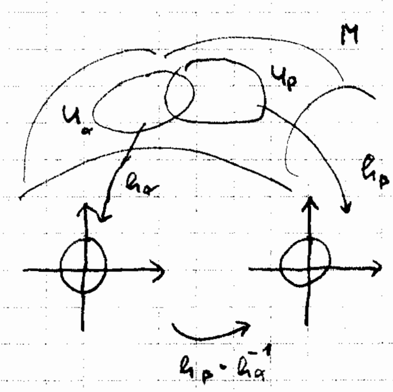
<u>Bemerkungen</u>:
- Es gibt genau zwei Orientierungen auf V
- Für $\dim V = 0$ ist eine Orientierung einfach die Wahl eines Vorzeichens ± 1
- $V = \mathbb{R}^n$ hat eine Standard-Orientierung gegeben durch die kanonische Basis: $(1, 0, \dots 0), \dots, (0, \dots, 0, 1)$

<u>Definition</u>: Eine <u>Orientierung</u> auf einer Mft. M ist eine Auswahl von Orientierungen auf T_xM mit:

$\forall x \in M \ \exists$ Umgebung U, Diffeomorphismus $h: U \to h(U) \subset \mathbb{R}^n$ oder so dass für alle $y \in U$ der Isomorphismus $dh_y: T_yM \to \mathbb{R}^n$ die Orientierung von T_yM in die Standard-Orientierung überführt

dh. es existiert ein Atlas $\mathcal{A} = \{ (U_\alpha, h_\alpha) \mid \alpha \in I \}$ mit

$$\det J(h_\beta \circ h_\alpha^{-1}) > 0 \qquad \forall \alpha, \beta \in I$$



Kartenwechsel

<u>Beispiel</u>:
- $X = TM$ ist orientierbar, dh. besitzt eine Orientierung
- Das Möbiusband ist nicht orientierbar

Bemerkungen:

- Eine zus., orientierbare Mfk. hat genau zwei Orientierungen

  da Menge der Punkte, in der zwei gegebene Orientierungen übereinstimmen bzw nicht übereinstimmen ist offen

- Produkt-Orientierung: M, N orientiert

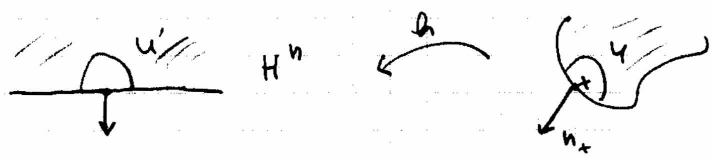
  $$T_{(p,q)} M\times N \cong T_pM \oplus T_qN$$

  Orientierung von $T_{(p,q)} M\times N$ = Orientierung von T_pM gefolgt von der Orientierung von T_qN

- Rand-Orientierung: Eine orientierte Mfk. mit Rand M besitzt eine induzierte Orientierung auf ∂M

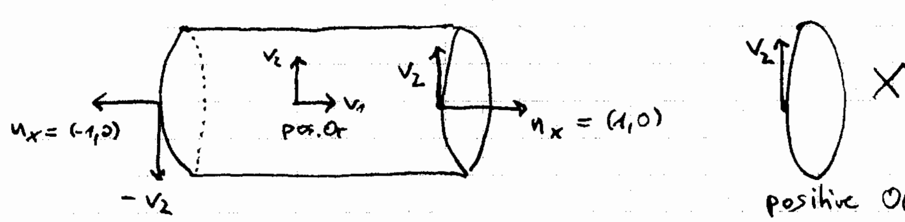
  Orientierung von T_pM, $p\in\partial M$
  = äußere Normale gefolgt von Orientierung von $T_p\partial M$

Beispiel:

- 

  äußere Normale

- $M = I\times X$ $\qquad \partial M = \{0\}\times X \cup \{1\}\times X$



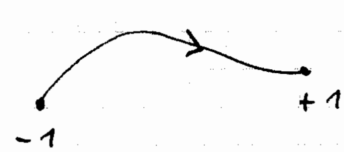
positive Orientierung

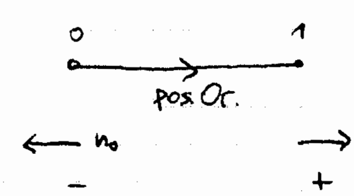
d.h. die Randkomponente $\{0\}\times X$ erhält die umgekehrte Orientierung, man schreibt:

$$\partial M = \{1\}\times X - \{0\}\times X$$

($-X$ = Mfk. X mit umgekehrter

- $\dim M = 1 \Rightarrow \dim \partial M = 0$





Der ganzzahlige Abbildungsgrad

Definition: Seien M, N orientierte Mft., M kompakt ohne Rand, N zus. und $\dim M = \dim N$. Sei $x \in M$ regulär für $f: M \to N$

$$\operatorname{sign} d_x f := \begin{cases} 1 & \text{falls } d_x f : T_xM \to T_{f(x)}N \text{ or. erhaltend} \\ -1 & \text{" — " or. umkehrend ist} \end{cases}$$

Sei $y \in N$ ein regulärer Wert von f. Der ganzzahlige Abbildungsgrad von f ist definiert als:

$$\deg f = \deg(f, y) = \sum_{x \in f^{-1}(y)} \operatorname{sign} d_x f \quad \in \mathbb{Z}$$

Bemerkung: Wie im mod-2-Fall ist die Summe endlich und $y \mapsto \deg(f, y)$ ist lokal-konstant auf der Menge der regulären Werte

Satz: Die ganze Zahl $\deg(f, y)$ hängt nicht von der Wahl des regulären Wertes y ab. Homotope Abbildungen haben gleichen Abbildungsgrad.

Beweis:

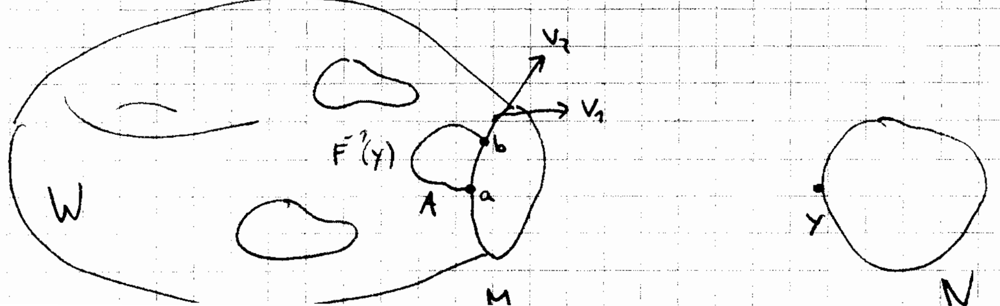
(1) M sei orientierter Rand einer kompakten, or. Mft. W: $M = \partial W$
f setze sich fort zu einer Abbildung $F: W \to N$: $f = F|_M$
Dann gilt:

$$\deg(f, y) = 0 \quad \text{für jeden regulären Wert } y \text{ von } f$$

Beweis von (1): OBdA ist y auch für F regulär (siehe oben, $\deg(f,y)$ lokal k.)

$\to$ $F^{-1}(y)$ ist kompakte, 1-dim Mft. mit Rand

$$\partial F^{-1}(y) = F^{-1}(y) \cap \partial W = f^{-1}(y)$$



Sei $A \subset F^{-1}(y)$ ein Bogen mit $\partial A = \{a, b\} \subset M$

Die Orientierungen von W und N bestimmen eine Orientierung von A:

$x \in A$, $v_1, \dots, v_{m+1}$ sei positive Basis von $T_x W$, v_1 tangential zu A

v_1 bestimmt die positive Orientierung von $T_x A$

$\Leftrightarrow \{ d_x F(v_2), \dots, d_x F(v_{m+1}) \}$ ist positive Basis von $T_{F(x)} N$
$F(x) = y$

$v_1(x) :=$ positive Einheitstangentialvektor an A in $x \in A$

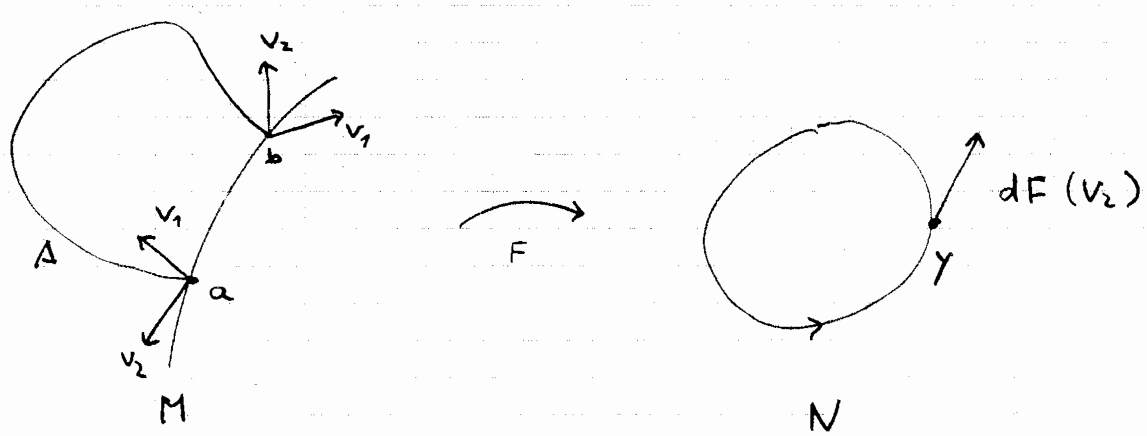
$\Rightarrow$ v_1 ist eine glatte Funktion in x, v_1 zeigt nach innen an genau einem Randpunkt (z.B. a) und nach außen in anderen

$\Rightarrow$ $\operatorname{sign} d_a f = -1$, $\operatorname{sign} d_b f = 1$

da in b definieren $v_2, \dots, v_{m+1}$ die positive Randorientierung von $M = \partial W$, in a die negative

$$\Rightarrow \deg(f, y) = \sum_{A \subset F^{-1}(y)} (\operatorname{sign} d_a f + \operatorname{sign} d_b f)$$

$$= 0$$



(2) Sei y regulärer Wert von f und g, dann gilt:

$$\deg(f,y) = \deg(g,y)$$

<u>Beweis von (2):</u> $\partial([0,1]\times M) = \{1\}\times M - \{0\}\times M$

$F: [0,1]\times M \to N$ sei die Homotopie $f \simeq g$

$$\overset{(1)}{\Rightarrow} \quad 0 = \deg\left(F\big|_{\partial([0,1]\times M)}, y\right) = \deg(g,y) - \deg(f,y)$$

(3) Seien y, z reguläre Werte von $f: M \to N$,

sei $h: N \to N$ ein Diffeomorphismus, isotop zu Id_N mit $h(y) = z$

$\Rightarrow$ h erhält die Orientierung

$$\deg(f,y) = \deg(h\circ f, h(y)) \qquad h(y) = z$$

$$\overset{(2)}{=} \deg(f,z) \qquad \text{da } f \simeq h\circ f$$

<u>Beispiele:</u> (i) $f: S^1 \to S^1 \subset \mathbb{C}$, $z \mapsto z^k$, $k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow \deg f = k$

analog für $S^2 \to S^2 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$

(ii) $f: M \to N$, $f(x) = n_0 \quad \forall x$ konstante Abbildung

$\Rightarrow \deg f = 0$

(iii) $f: M \to M$ Diffeomorphismus

$\Rightarrow \deg f = \pm 1$ je nachdem, ob f die Orientierung erhält oder umkehrt

$\Rightarrow$ Ein orientierungsumkehrender Diffeomorphismus auf einer geschlossenen Mfk. ist nicht homotop zur Identität.

(iv) $r_i : S^n \longrightarrow S^n$ Spiegelung

$r_i\,(x_1, \dots, x_{n+1}) = (x_1, \dots, -x_i, \dots, x_{n+1})$

$\Rightarrow$ r_i ist ein orientierungs-umkehrender Diffeomorphismus

$\Rightarrow$ Die Antipoden-Abbildung $\alpha : S^n \to S^n$, $\alpha(x) = -x$, hat den Grad $(-1)^{n+1}$

da: $\alpha(x) = r_1 \circ \dots \circ r_{n+1}(x)$

$\rightarrow$ Für $n \equiv 0\,(2)$ ist die Antipoden-Abbildung nicht homotop zur Identität

(konnte mit mod-2-Grad nicht gezeigt werden

Anwendung: (Satz vom Igel)

S^n besitzt ein Vektorfeld ohne Nullstellen genau dann, wenn n ungerade ist.

Beweis: Vektorfeld auf $M \subset \mathbb{R}^N$ = glatte Abbildung $v : M \to \mathbb{R}$ mit

$v(x) \in T_x M \quad \forall x \in$

Vektorfeld auf $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ = glatte Abbildung $v : S^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ mit

$\langle v(x), x \rangle = 0 \quad \forall x \in S^n$

(1) auf S^{2n-1} definiert man

$v(x) = i \cdot x = (-x_2, x_1, -x_4, x_3, \dots, -x_{2n}, x_{2n-1})$ $\quad S^{2n-1} \subset \mathbb{R}^{2n} \cong \mathbb{C}^n$

(2) v sei Vektorfeld ohne Nullstellen auf S^n, o.B.d.A $\|v(x)\| = 1$

man definiert: $F : [0,1] \times S^n \longrightarrow S^n$

$F(t,x) = \cos(\pi t) \cdot x + \sin(\pi t) \cdot v(x)$

$\Rightarrow$ $F(0,x) = x$, $F(1,x) = -x$, $\|F(t,x)\| = 1$

$\Rightarrow$ F ist Homotopie zwischen α und Id_{S^n}, d.h. $n \equiv 1\,(2)$

Bemerkung: • α ist homotop zu Id_{S^n} für $n \equiv 1\,(2)$ (nach (1) + (2))

• (Hopf): $f, g : M^n \to S^n$, M zus.

f, g homotop $\Longleftrightarrow$ $\deg(f) = \deg(g)$