14. Vorlesung
02.06.10

# Vektorfelder und Euler-Charakteristik

Sei $U \subset \mathbb{R}^m$ offen, $v: U \to \mathbb{R}^m$ glattes Vektorfeld : $v(p) \in T_p\mathbb{R}^m \cong \mathbb{R}^m$

$v$ habe eine isolierte Nullstelle in $p_0$

$\varepsilon > 0$ klein mit $v(p) \neq 0$ für alle $p \in D_\varepsilon(p_0) = \{ q \in \mathbb{R}^m \mid \|q - p_0\| < \varepsilon$

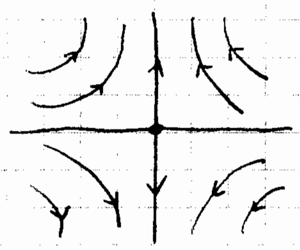
und
- $p \neq p_0$
- $D_\varepsilon(p_0) \subset U$

**Definition:** Der Index $\mathrm{ind}_{p_0}(v)$ von $v$ in $p_0$ ist der Grad der Abbildung

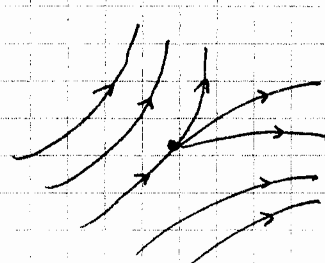
$$S^{m-1} := \partial D_\varepsilon(p_0) \longrightarrow S^{m-1}$$
$$p \longmapsto \frac{v(p)}{\|v(p)\|}$$

**Bemerkung:** Die Sphären erhalten die Randorientierung der entsprechenden Bälle.

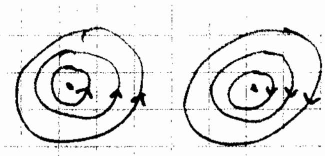
**Beispiele** $(m = 2)$ Man zeichnet die Flußlinien von $v$, d.h. die Lösungskurven der DGL $\dot{p} = v(p)$, $p = p(t)$



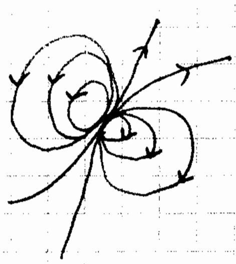
$-1$



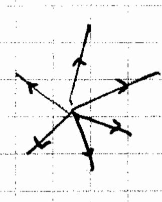
$0$



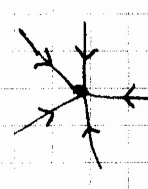
$+1$



$+2$



$+1$



$+1$

$(-1$ in ungerader Dimension$)$

allgemein: $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$, $z \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{N}$

- $V(z) = z^k \Rightarrow \operatorname{ind}_0(V) = k$
- $V(z) = \bar{z}^k \Rightarrow \operatorname{ind}_0(V) = -k$

Bemerkung: $m = 2$: $\operatorname{ind}_0(V)$ zählt wie oft der Vektor $V$ vollständig rotiert wenn man einen kleinen Kreis um 0 entgegen des Uhrzeigersinnes durchläuft.

Lemma 1: Der Index $\operatorname{ind}_{p_0}(V)$ ist invariant unter Diffeomorphismen, d.h. für einen Diffeomorphismus $f: U \to U'$ gilt:

$$\operatorname{ind}_{f(p_0)}(V') = \operatorname{ind}_{p_0}(V)$$

für $V' = df \cdot V \cdot f^{-1}$ d.h. $V'(p') = d_{f^{-1}(p')} f\,(V(f^{-1}(p')))$

Bemerkung: • Mit Lemma 1 läßt sich der Index von Vektorfeldern auf beliebigen Mfk. definieren:

$$\operatorname{ind}_p(V) := \operatorname{ind}_{\varphi^{-1}(p)}(d\varphi^{-1} \circ V \cdot \varphi)$$

für Parametrisierungen $\varphi: U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow M$.

• Der Beweis von Lemma 1 stützt sich auf Lemma 2:

Lemma 2: Jeder orientierungserhaltende Diffeomorphismus ist isotop zur Identität.

Beweis: $f: \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ Diffeomorphismus, oBdA $f(0) = 0$

man schreibt $f$ als:

$$f(x) = \sum_{j=1}^{m} x_j \cdot g_j(x)$$

da
$$\begin{aligned} f(x) - f(0) &= f(x) \\ &= \int_0^1 \frac{d}{dt} f(tx_1, \dots, tx_m)\, dt \\ &= \sum_i x_i \underbrace{\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx_1, \dots, tx_m)\, dt}_{=:\, g_i(x)} \end{aligned}$$

d.h. $f_i = \sum_j x_j \cdot g_{ij}$

$\rightarrow\ \partial_f(0) = (g_{ij}(0))$

Die Isotopie wird definiert durch.

$$F: \mathbb{R}^m \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

$$F(x,t) = \sum_{j=1}^{m} x_j \cdot g_j(tx) \qquad (\text{glatt in } x \text{ und } t$$

$$= \begin{cases} \dfrac{f(tx)}{t} & \text{für } 0 < t \leq 1 \\ J_f(0) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} & \end{cases}$$

da $d_0 f(x) = \lim_{t \to 0} \frac{f(t}{t}$

d.h. $f$ ist isotop zu der durch $J_f(0)$ gegebenen linearen Abbildung

$f$ orientierungserhaltend $\Rightarrow$ $d_0 f = J_f(0) \in GL_+(m, \mathbb{R}) = \{A \in M(m,\mathbb{R}) \mid \det A >$

$\Rightarrow$ $J_f(0)$ ist isotop zur Identität (*)

$\Rightarrow$ $f$ ist isotop zur Identität

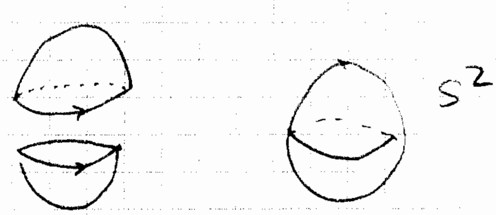
zu (*): $GL_+$ ist zus. und $Id \in GL_+$

$\Rightarrow$ es existiert ein Weg in $GL_+$ der jede Matrix mit Id verbindet, d.h. eine Isotopie

<u>Bemerkung</u>: Im Unterschied zu $\mathbb{R}^n$ existieren für viele Werte $n$ orientierungserhaltende Diffeomorphismen der $S^n$, die nicht isotop zur Identität sind.

Diese definieren durch Verklebung entlang des Äquators $S^n \subset S^{n+1}$ exotische diff.bare Strukturen auf $S^{n+1}$

zB exotische 7-Sphären (↗ Milnor)



Beweis von Lemma 1:

OBdA: $p_0 = f(p_0) = 0$, $U \subset \mathbb{R}^m$ konvex

1. Fall: $f$ sei orientierungserhaltend

(Lemma

$\Rightarrow$ es ex. eine Familie von Einbettungen $f_t : U \to \mathbb{R}^m$ mit:

$$f_0 = \mathrm{Id}, \quad f_1 = f, \quad f_t(0) = 0 \quad \forall t \in [0,1]$$

$V_t := df_t \circ V \circ f_t^{-1}$ Vektorfeld auf $f_t(U)$

Sei $\varepsilon > 0$ hinreichend klein mit $V_t \neq 0$ auf $D_\varepsilon \setminus \{0\}$ $\forall t$

$$\Rightarrow \quad (p,t) \mapsto \frac{V_t(p)}{\|V_t(p)\|}$$

definiert eine Homotopie von Abbildungen $S_\varepsilon^{m-1} \to S^{m-1}$

$\Rightarrow$ $\mathrm{ind}_{p_0}(V_0) = \mathrm{ind}_{p_0}(V_1)$ da Homotopieinvarianz des Abbildungsgrades

$\Rightarrow$ Aussage des Lemmas: $V_0 = V$, $V_1 = V'$

2. Fall: $f$ sei orientierungsumkehrend

Mit Hilfe von Fall 1 kann man sich auf den Fall eines speziellen orientierungsumkehrenden Diffeomorphismus beschränken, zB

$$f(x_1, \dots, x_m) = (-x_1, x_2, \dots, x_m) \qquad \text{Spiegelung}$$

$$\Rightarrow V' = df \circ V \circ f^{-1} = f \circ V \circ f$$

$$\Rightarrow \frac{V'}{\|V'\|} = f \circ \frac{V}{\|V\|} f$$ da $f$ linear und längenerhaltend

$$\Rightarrow \mathrm{ind}_{p_0}(V') = \deg\left(f \circ \frac{V}{\|V\|} f\right)$$

$$= \deg\left(\frac{V}{\|V\|}\right)$$

$$= \mathrm{ind}_{p_0}(V)$$

**Satz** (Poincaré - Hopf - Indexsatz)

Sei $M$ eine kompakte Mft., $v$ ein Vektorfeld auf $M$ mit isolierten Nullstellen. Falls $\partial M \neq \emptyset$, dann zeige $v$ in allen Randpunkten nach außen. Dann ist

$$I(v) := \sum_{\substack{p \in M \\ v(p)=0}} \operatorname{ind}_p(v)$$

eine topologische Invariante von $M$, die nicht von der Wahl des Vektorfeldes abhängt.

**Bemerkung:** Die topologische Invariante $I(v)$ heißt Euler-Charakteristik von $M$:

$$\chi(M) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \dim H^i_{dR}(M) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \operatorname{rank} H_i(M)$$

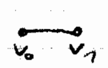
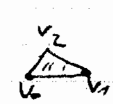
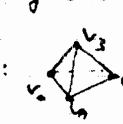
Für eine kompakte Fläche ohne Rand mit einer Triangulierung mit $e$ Ecken, $k$ Kanten und $f$ Dreiecksflächen gilt:

$$I(v) = \chi(M) = e - k + f$$

zB $\chi(S^2) = 2$

Der Beweis zeigt, dass $\chi(M)$ nicht von der gewählten Triangulierung abhängt.

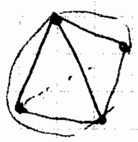
- $k$-Simplex $= \{ x = \lambda_1 v_0 + \dots + \lambda_k v_k \mid \sum \lambda_i = 1 \}$ $\quad v_0, \dots, v_k$ in allgemeiner L

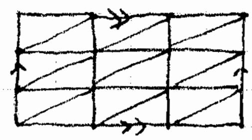
  0-Simplex: $\cdot v_0$, 1-Simplex: , 2-Simplex: , 3-Simplex: 

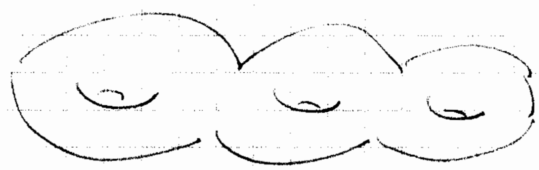
- Simplizialer Komplex = endliche "Vereinigung" von Simplizes in $\mathbb{R}^n$ mit:
  a) liegt ein Simplex in der Vereinigung so auch all seine Seiten
  b) schneiden sich zwei Simplizes, so tun sie es in einer Seite

- Triangulierung eines topologischen Raumes $X$ $\quad |K| \subset \mathbb{R}^n$ mit Teilraum-Top.

  $=$ Homöomorphismus $h: |K| \to X$
  wobei: $K$ ein Simplizialer Komplex, $|K|$ Vereinigung seiner Simplizes

Beispiele: •  $\chi(S^2) = 4 - 6 + 4 = 2$

•  $\chi(T^2) = 9 - 27 + 18 = 0$

allgemein:  $\Sigma_g = M^2$

$g$ = Anzahl der Löcher = Geschlecht

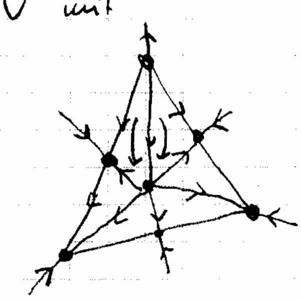
$\Rightarrow \chi(\Sigma_g) = 2 - 2g \qquad \Sigma_g = \underbrace{T^2 \# \dots \# T^2}_{g\text{-mal}}$

Klassifikation: Jede geschlossene orientierte Fläche ist homöomorph zu einem $\Sigma_g$.

$\Rightarrow$ Nur der Torus besitzt nullstellenfreie Vektorfelder

Bemerkung: • Jede Fläche besitzt eine Triangulierung

• Zu einer gegebenen Triangulierung von $M^2$ (mit $\partial M = \emptyset$) konstruiert man ein spezielles Vektorfeld $V$ mit



jede Ecke Nullstelle vom Index $+1$

jede Kante Nullstelle vom Index $-1$

jede Seite Nullstelle vom Index $+1$

$\Rightarrow I(V) = e - k + f$

• $\chi(M) = \sum (-1)^k$ Anzahl $k$-dim Seiten von $\mathcal{T}$, $\mathcal{T}$ Triangulierung von