15. Vorlesung 08.06.10

Wiederholung: **Indexsatz von Poincaré – Hopf**

Sei M kompakt, v ein Vektorfeld auf M mit isolierten Nullstellen. Dann ist:

$$I(v) := \sum_{\substack{p \\ v(p)=0}} \operatorname{ind}_p(v)$$

eine topologische Invariante, die nicht von der Wahl des Vektorfeldes abhängt.

zur Definition des Index:

- $v : U \to \mathbb{R}^n$, $v(p_0) = 0$, p_0 isolierte

  $\operatorname{ind}_{p_0}(v) = \deg\left(\frac{v}{\|v\|} : \partial D_\varepsilon \to S^{n-1}\right)$ — D_ε kleine Kugel um

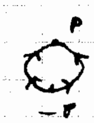
- v Vektorfeld auf M, $v(p_0) = 0$

  $\operatorname{ind}_{p_0}(v) = \operatorname{ind}_{h^{-1}(p_0)}(dh^{-1} \circ v \circ h)$

  (U, h) lokale Parametrisierung um p_0

Anwendung:

- auf S^m betrachtet man das Vektorfeld



  $$v(x) = p - \langle p, x\rangle \cdot x \quad , \quad p = (0, \dots, 0, 1)$$

  v hat zwei Nullstellen: p und $-p$

  mit $\operatorname{ind}_p(v) = (-1)^m$, $\operatorname{ind}_{-p}(v) = 1$ (ÜA

  $$\Rightarrow I = \begin{cases} 2 & m \equiv 0 \ (2) \\ 0 & m \equiv 1 \ (2) \end{cases}$$

  $\to$ auf S^{2m} kann es kein Vektorfeld ohne Nullstellen geben

- $\dim M \equiv 1 \ (2)$, $\partial M = \emptyset$

  $\Rightarrow I = 0$

  da: ersetzt man v durch $-v$, so folgt

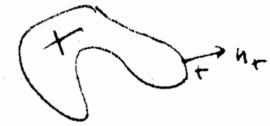
  $$\sum \operatorname{ind}_p(v) = (-1)^{\dim M} \sum \operatorname{ind}_p(v)$$

Bemerkung: $I = 0$, dann existiert ein Vektorfeld ohne Nullstellen (Hop

Beweis des Poincaré-Hopf-Indexsatzes

(↗ Milnor)

- $X^m \subset \mathbb{R}^m$ kompakt mit Rand



Gauß-Abbildung $\quad g : \partial X \longrightarrow S^{m-1}$

$g(x) = n_x \qquad$ äußerer Einheitsnormalenvektor

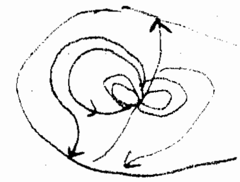
Lemma 1 (Hopf) Sei $v : X \longrightarrow \mathbb{R}^m$ ein Vektorfeld mit isolierten Nullstellen, v zeige nach außen auf ∂X. Dann gilt:

$$\sum_{\substack{p \\ v(p)=0}} \operatorname{ind}_p(v) = \deg(g)$$

Insbesondere hängt die Summe nicht von Vektorfeld ab.

Beispiel: v sei ein VF auf der Kugel D^m, das nach außen auf ∂D^m zeigt, dann gilt:

$$\sum \operatorname{ind}_p(v) = 1$$



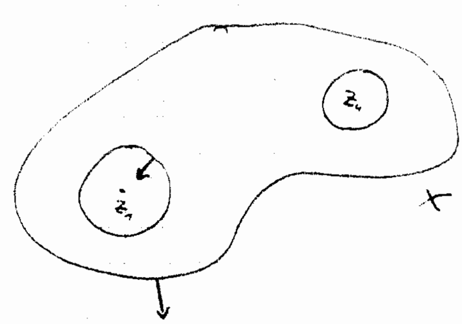
Beweis des Lemmas:

man entfernt um jede Nullstelle eine hinreichend kleine ε-Kugel und betrachtet das Vektorfeld: $\quad \bar{v} := \frac{v(x)}{\|v(x)\|}$

$\bar{X} = X \setminus \bigcup D_i \quad , \qquad D_i$ = kleine Kugel um Nullstelle z_i

$\Rightarrow \quad \deg(\bar{v}|_{\partial \bar{x}}) = 0 \quad , \qquad \bar{v}|_{\partial x}$ ist homotop zu g

$\Rightarrow \quad \deg(g) - \sum \operatorname{ind}_p(v) = 0 \quad , \qquad \operatorname{ind}_p(v) = \deg\left(\frac{v}{\|v\|}\right)$



Bemerkung: $\deg(g) = c \cdot \int_{\partial x} K \, dx$

$= \chi(X)$

für $\dim X = 2$

<u>Definition:</u> Das Vektorfeld v ist <u>nicht-entartet</u> in z, falls die lineare Abbildung

$$dv_z : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m \qquad v: U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$$

nicht-singulär ist, d.h. $\det(dv_z) \neq 0$.

<u>Bemerkung:</u> Sei z eine Nullstelle von v, und sei v nicht-entartet in z. Dann ist z eine isolierte Nullstelle

da: v ist lokaler Diffeomorphismus um z

man sagt nicht-entartete Nullstelle

<u>Lemma 1:</u> Sei z eine nicht-entartete Nullstelle. Dann gilt $\mathrm{ind}_z(v) = \pm 1$ je nach dem, ob $\det dv_z$ positiv oder negativ ist.

<u>Beweis:</u> z nicht-entartete Nullstelle, U_0 konvexe Umgebung von z (z.B. kleine Kugel) mit

$$v: U_0 \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m \quad \text{Diffeomorphismus}$$

oBdA: $z = 0$

Sei v orientierungs-erhaltend $\Rightarrow$ $v|_{U_0}$ ist isotop zur Identität (ohne das neue Nullstellen auftreten)

$\Rightarrow \mathrm{ind}_z(v) = 1$

Sei v orientierungs-umkehrend $\Rightarrow$ $v|_{U_0}$ ist isotop zu einer Spiegelung

$\Rightarrow \mathrm{ind}_z(v) = -1$

<u>ab jetzt:</u> w Vektorfeld auf $M \subset \mathbb{R}^k$, $w(z) = 0$

$dw_z : T_zM \longrightarrow \mathbb{R}^k \qquad w(z) \in T_zM$

genauer gilt: $dw_z : T_zM \longrightarrow T_zM$

(siehe Beweis von Lemma 3)

<u>Lemma 3</u>: Sei $D = \det(dw_z) \neq 0$, dann ist z eine isolierte Nullstelle und $\mathrm{ind}_z(w) = \pm 1$ je nach dem, ob D positiv oder negativ ist.

<u>Beweis</u>: • Sei $h: U \subset \mathbb{R}^m \to M$ eine lokale Parametrisierung um z

$t_i := dh_u(e_i) = \frac{\partial h}{\partial u_i}$ $\qquad h(u) = z,\quad e_1, \dots, e_n$ kanonische Basis

dh. $t_1, \dots, t_n$ ist eine Basis von $T_z M$

• $dw_z(t_i) = d(w \circ h)_u (e_i) = \frac{\partial w(h(u))}{\partial u_i}$ $\qquad w: M \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$

sei $v = \sum_j v_j e_j$ das Vektorfeld auf U zu w, dh

$v = dh^{-1} \circ w \circ h$

dh. $\quad w(h(u)) = dh_u(v) = \sum_j v_j t_j$

$\Rightarrow \quad dw_z(t_i) = \frac{\partial w(h(u))}{\partial u_i} = \sum_j \frac{\partial v_j}{\partial u_i} t_j + \sum v_j \cdot \frac{\partial t_j}{\partial u_i}$

$\Rightarrow \quad dw_z(t_i) = \sum \frac{\partial v_j}{\partial u_i} \cdot t_j$ $\qquad$ in der Nullstelle $u = h^{-1}(z)$ von

$\Rightarrow \quad dw_z: T_z M \to T_z M$ und $D = \det\left(\frac{\partial v_j}{\partial u_i}\right)$ $\qquad$ (Bild in T_z

$\Rightarrow \quad z$ ist eine isolierte Nullstelle und

$$\begin{aligned} \mathrm{ind}_z(w) &= \mathrm{ind}_u(dh^{-1} \circ w \circ h) \\ &= \mathrm{ind}_u(v) \\ &= \pm 1 \qquad \text{(nach Lemma 2)} \end{aligned}$$

je nach dem, ob D positiv oder negativ ist

- Sei $M \subset \mathbb{R}^k$ kompakte Mfk. ohne Rand

$N_\varepsilon := \{ x \in \mathbb{R}^k \mid \| x - y \| \leq \varepsilon$ für ein $y \in M \}$

<u>ε-Umgebung</u> von M in $\mathbb{R}^k$

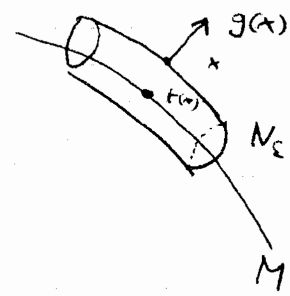
<u>Satz</u>: Sei v ein Vektorfeld auf M, das nur nicht-entartete Nullstellen. Dann gilt

$$I(v) = \sum_{\substack{p \\ v(p)=0}} \mathrm{ind}_p(v) = \deg(g : \partial N_\varepsilon \longrightarrow S^{k-1})$$

g Gauß-Abbildung

Insbesondere ist I unabhängig von der Wahl des Vektorfeldes v.

<u>Beweis</u>: • Sei $x \in N_\varepsilon$ und sei $r(x) \in M$ der Punkt mit minimalen Abstand



! $\Rightarrow$ $x - r(x) \perp T_{r(x)} M$

- Für ε klein genug ist $x \mapsto r(x)$ wohldefiniert und glatt

sei $\varphi(x) = \| x - r(x) \|^2$

$\rightarrow$ $\mathrm{grad}\, \varphi = 2 \, (x - r(x))$

$\rightarrow$ für $x \in \partial N_\varepsilon = \varphi^{-1}(\varepsilon^2)$ ist die äußere Normale gegeben als

$$g(x) = \frac{\mathrm{grad}\, \varphi}{\| \mathrm{grad}\, \varphi \|} = \frac{1}{\varepsilon} \, (x - r(x))$$

- v setzt sich fort auf N_ε :

$w(x) := (x - r(x)) + v(r(x))$

$\rightarrow$ w zeigt nach außen auf ∂N_ε <u>da</u>: $\langle w(x), g(x) \rangle = \varepsilon >$

Nullstellen von w = Nullstellen von v in M <u>da</u>: $x - r(x) \perp v($

- sei z Nullstelle von w : $dw_z(a) = dv_z(a) \quad \forall\, a \in T_z M$

$dw_z(b) = b \quad \forall\, b \in T_z M$

$\rightarrow$ $\det(dw_z) = \det(dv_z)$ $\Rightarrow$ $\mathrm{ind}_z(w) = \mathrm{ind}_z(v)$

$\rightarrow$ $I(v) = \sum \mathrm{ind}_p(v) = \deg(g)$ nach: Lemma 1

Bemerkungen zum vollständigen Beweis

① $I(V) = \chi(M)$

Morse-Theorie: Man konstruiert eine Funktion auf M, deren Gradienten-Vektorfeld nicht-entartet ist und dessen Index gleich der Euler-Charakteristik ist

② Beweis für Vektorfelder mit entarteten Nullstellen

- $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $v : U \to \mathbb{R}^n$

  $v(z) = 0$, $z \in U$ isolierte Nullstelle

  sei $\lambda : U \to [0,1]$, $z \in N_1 \subset N \subset U$

  $\lambda|_{N_1} \equiv 1$, $\lambda|_{U \setminus N} \equiv 0$

  y regulärer Wert von v, hinreichend klein

  $\Rightarrow v'(x) := v(x) - \lambda(x) \cdot y$

  ist ein nicht-entartetes Vektorfeld in N

  da
  - v' ist nicht entartet in N_1: $v' = v - y$

    $v'(x) = 0 \Rightarrow v(x) = y$

    $\Rightarrow dv$ ist nicht singulär in x

  !
  - y klein genug $\Rightarrow v'$ hat keine Nullstellen in $N \setminus N_1$

    $v'(x) = 0 \Rightarrow v(x) = \lambda(x) \cdot y$

$$\sum_{\substack{p \in N \\ v(p)=0}} \operatorname{ind}_p(v) = \deg\left(\tfrac{v}{\|v\|} : \partial N \to S^{m-1}\right)$$

$$= \sum_{\substack{p \in N \\ v'(p)=0}} \operatorname{ind}_p(v')$$

d.h. lokal kann man v durch ein nicht-entartetes Vektorfeld ersetzen, ohne die Indexsumme zu ändern

③ Beweis für Mfk mit Rand

hier: Probleme mit Regularität: N_ε, w nicht glatt