Die Fundamentalgruppe

- Sei X ein topologischer Raum

<u>Schleife</u> in X $=$ $\alpha : I \to X$ stetig mit $\alpha(0) = \alpha(1)$

<u>Produkt zweier Schleifen</u>

$$\alpha . \beta (s) = \begin{cases} \alpha(2s) & 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ \beta(2s-1) & \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

<u>Bem:</u>
- $\alpha . \beta$ ist wieder eine Schleife (stetig)
- Das Produkt definiert keine Gruppenstruktur auf der Menge der Schleifen in $\alpha(0)$ (mit Basispunkt $\alpha(0)$)

- X, Y topologische Räume, $g, f : X \to Y$ stetig

f, g <u>homotop</u> $\Leftrightarrow$ $\exists\, F : X \times I \to Y$ mit $F(x,0) = f(x)$, $F(x,1) = g(x)$

man schreibt $f \underset{F}{\simeq} g$

f, g <u>homotop bzgl.</u> $A \subset X$ $\Leftrightarrow$ $F(a,t) = f(a)$ $\forall a \in A,\ t \in I$

man schreibt $f \underset{F}{\simeq} g$ rel A (zB falls $f|_A = g|_A$)

<u>Lemma 1:</u> Homotopie bzgl. A ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Abbildungen $X \to Y$, die auf A übereinstimmen

<u>Lemma 2:</u>
- $f \underset{F}{\simeq} g$ rel A $\Rightarrow$ $hf \underset{hF}{\simeq} hg$ rel A
- $g \underset{G}{\simeq} h$ rel B $\Rightarrow$ $gf \underset{F}{\simeq} hf$ rel $f^{-1}B$

mit $F(x,t) = G(f(x),t)$

- Sei X ein topologischer Raum, $p \in X$ Basispunkt

man betrachtet die Menge der Schleifen mit Basispunkt p : Ω_p

$\alpha : I \to X, \quad \alpha(0) = p$

<u>Homotopieklasse</u> von α = Äquivalenzklasse der Homotopie bzgl $\{0,1\}$

man schreibt : $[\alpha]$

<u>Multiplikation von Homotopieklassen</u>: $[\alpha] \cdot [\beta] = [\alpha \cdot \beta]$ $(*)$

<u>Behauptung</u>: Die Multiplikation ist wohldefiniert

<u>dh</u> $\alpha \underset{F}{\simeq} \alpha', \ \beta \simeq \beta' \implies \alpha \cdot \beta \underset{H}{\simeq} \alpha' \beta'$ alles rel $\{0,1\}$

man definiert $H(s,t) = \begin{cases} F(2s,t) & 0 \le s \le \frac{1}{2} \\ G(2s-1,t) & \frac{1}{2} \le s \le 1 \end{cases}$

$\Rightarrow [\alpha' \cdot \beta'] = [\alpha \cdot \beta]$

<u>Satz</u>: Die Menge Ω_p mit der Multiplikation $(*)$ ist eine Gruppe.

Einselement = konstante Weg $e(s) = p \quad \forall s$

Inverses $[\alpha]^{-1} = [\alpha^{-1}]$ mit $\alpha^{-1}(t) = \alpha(1-t)$
dh. α wird in umgekehrter Richtung durchlaufen

man schreibt $\pi_1(X,p)$ = <u>Fundamentalgruppe</u> von X in p

<u>Satz</u>. Sei X wegzusammenhängend, dann sind $\pi_1(X,p)$ und $\pi_1(X,q)$ für je zwei Punkte $p,q \in X$ isomorph

<u>zum Beweis</u>: γ sei ein Weg von p nach q

man definiert:

$$\pi_1(X,p) \longrightarrow \pi_1(X,q)$$
$$[\alpha] \mapsto [\gamma^{-1} \cdot \alpha \cdot \gamma]$$

- Die Zuordnung $X \mapsto \pi_1(X,p)$ ist ein kovarianter Funktor

<u>Lemma</u>: Seien X, Y topologische Räume, $f: X \to Y$ stetig, $f(p)=q$.
Dann induziert f einen Gruppenhomomorphismus

$$f_*: \pi_1(X,p) \longrightarrow \pi_1(Y,q)$$
$$[\alpha] \mapsto [f\circ\alpha]$$

<u>Beweis</u>: $f\circ(\alpha\cdot\beta) = (f\circ\alpha)\cdot(f\circ\beta)$

$$\Rightarrow f_*([\alpha]\cdot[\beta]) = f_*([\alpha\cdot\beta]) = [f\circ\alpha\cdot\beta]$$
$$= [(f\circ\alpha)\cdot(f\circ\beta)] = [f\circ\alpha]\cdot[f\circ\beta]$$

<u>Satz</u>: $(g\circ f)_* = g_*\circ f_*$ $\qquad X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$

<u>Folgerung</u>: Seien X, Y zueinander homöomorphe weg zus. topologische Räume. Dann haben X, Y zueinander isomorphe Fundamentalgruppen.

<u>Anwendung</u>: X, Y weg zus. $\pi_1(X,p) \not\cong \pi_1(Y,q)$

$\Rightarrow$ X, Y sind nicht homöomorph

- <u>Beispiele</u>. $X \subset \mathbb{R}^n$ konvex

$\Rightarrow \pi_1(X,p) = \{e\}$

<u>da</u>: $\alpha, \beta: I \to X$

man definiert $F(t,s) = (1-s)\alpha(t) + s\,\beta(t)$

$\Rightarrow$ je zwei Abbildungen sind zueinander homotop, insbesondere sind alle Schleifen in p homotop zur konstanten Schleife p

<u>Definition</u>: Topologische Räume X mit $\pi_1(X,p) = \{e\}$, heißen <u>einfach-zusammenhängend</u>.

- <u>Satz</u>: $\pi_1(S^n) = \{e\}$ für $n \geq 2$

<u>allgemeiner</u>: $X = U \cup V$, mit U, V offen, einfach-zus, $U \cap V$ weg zus. Dann ist X einfach-zus.

↗ von Kampen ∇

• $S^1 \subset \mathbb{C}, \quad \gamma_n(t) = e^{2\pi n i t}$

<u>Satz</u>: Die Abbildung $\varphi : \mathbb{Z} \to \pi_1(S^1, 1)$ mit $\varphi(n) = [\gamma_n]$ definiert einen Isomorphismus von Gruppen.

• <u>Satz</u>: Eine Gruppe G wirke durch Homöomorphismen auf einem einfach-zus. topologischen Raum X. Jeder Punkt $x \in X$ habe eine Umgebung U mit $U \cap g(U) = \emptyset$ für alle $g \in G \setminus \{e\}$. Dann gilt

$$\pi_1(X/G) \cong G$$

• <u>Satz</u>: Seien X, Y weg-zus. topologische Räume. Dann gilt:

$$\pi_1(X \times Y) \cong \pi_1(X) \times \pi_1(Y)$$

<u>zum Beweis</u>: Basispunkte $x_0 \in X,\ y_0 \in Y,\ (x_0, y_0) \in X \times Y$

Projektionen: $p_1(x,y) = x, \quad p_2(x,y) = y$

$\Rightarrow$ Homomorphismen $(p_1)_* : \pi_1(X \times Y) \to \pi_1(X)$

$(p_2)_* : \pi_1(X \times Y) \to \pi_1(Y)$

$$\Rightarrow \quad \pi_1(X \times Y) \xrightarrow{\ \psi\ } \pi_1(X) \times \pi_1(Y) \qquad \text{Homomorphismus}$$

$$[\alpha] \mapsto ([p_1\alpha], [p_2\alpha])$$

ψ ist injektiv: $p_1\alpha \underset{F}{\simeq} e_{x_0},\ p_2\alpha \underset{G}{\simeq} e_{y_0} \Rightarrow \alpha \underset{H}{\simeq} e_{(x_0,y_0)}$

mit $H(s,t) = (F(s,t), G(s,t))$

ψ ist surjektiv: $[\beta] \in \pi_1(X),\ [\gamma] \in \pi_1(Y)$

man definiert $\alpha(s) = (\beta(s), \gamma(s))$

$\Rightarrow \psi([\alpha]) = ([\beta], [\gamma])$

<u>Anwendung</u>: • $\pi_1(T) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, \quad T = S^1 \times S^1$ Torus

• $\pi_1(S^n \times S^m) = \{e\}$ für $n, m \geq 2$

Bem.: Homotopie-Sequenz? Seifert-van Kampen Theorem

- **Definition:** Zwei topologische Räume X, Y heißen <u>homotopie-äquivalent</u>, falls Abbildungen $f: X \to Y$, $g: Y \to X$ existieren mit:

$$g \circ f \simeq \mathrm{Id}_X \, , \qquad f \circ g \simeq \mathrm{Id}_Y$$

man schreibt: $X \simeq Y$

Lemma: Die Relation $X \simeq Y$ ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge der topologischen Räume

Bemerkung: $X \simeq Y$ dann sagt man: X und Y haben den gleichen <u>Homotopietyp</u>

Beispiele:
- Homöomorphe Räume haben den gleichen Homotopietyp
- konvexe Mengen sind homotopie-äquivalent zu einem Punkt

Definition: Ein topologischer Raum heißt <u>kontrahierbar</u>, falls die Identität homotop zur konstanten Abbildung ist

Satz: (i) X ist kontrahierbar $\Leftrightarrow$ X hat den Homotopietyp eines Punktes

(ii) X kontrahierbar $\Rightarrow$ X einfach-zus.

(iii) Je zwei Abbildungen in einen kontrahierbaren Raum sind homotop

Satz: Zwei weg-zus. Räume mit dem gleichen Homotopietyp haben isomorphe Fundamentalgruppen.

$f \simeq g,\ f(p) =$
$\Rightarrow f_* = g_*$

Beispiel: $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ hat den Homotopietyp von S^{n-1}
(aber nicht homöomorph)

da: • $f: S^{n-1} \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ Inklusion
• $g: \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to S^{n-1}$, $g(x) = \frac{x}{\|x\|}$

$$\Rightarrow g \circ f = \mathrm{Id}_{S^{n-1}} \, , \qquad f \circ g \underset{F}{\simeq} \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}}$$

$$F(x,t) = (1-t)x + t \cdot \frac{x}{\|x\|}$$