DeRham - Kohomologie

Motivation: Sei $f: U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ glatt, U offen. $f = (f_1, f_2)$
Gesucht ist ein $F: U \to \mathbb{R}$ mit:

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = f_1 \,, \quad \frac{\partial F}{\partial x_2} = f_2 \qquad (**)$$

da: $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} = \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_1}$ folgt $\dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} = \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}$ $\quad (*)$

dh $(*)$ ist notwendig für die Existenz von F

Frage: Ist $(*)$ auch hinreichend?

Beispiel: $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

mit $f(x_1, x_2) := \left(\dfrac{-x_2}{x_1^2 + x_2^2} \,, \dfrac{x_1}{x_1^2 + x_2^2} \right)$

$\Rightarrow$ f erfüllt $(*)$, aber es ex kein $F: \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ mit $(**)$

da: Annahme F existiert

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi} \frac{d}{d\theta} F(\cos\theta, \sin\theta)\, d\theta = F(1,0) - F(1,0) = 0$$

aber: $\dfrac{d}{d\theta} F(\cos\theta, \sin\theta) = \dfrac{\partial F}{\partial x_1} \cdot (-\sin\theta) + \dfrac{\partial F}{\partial x_2} \cos\theta$

$$= -f_1(\cos\theta, \sin\theta) \cdot \sin\theta + f_2(\cos\theta, \sin\theta) \cdot \cos\theta$$

$$= 1$$

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi} \frac{d}{d\theta} F(\cos\theta, \sin\theta)\, d\theta = 2\pi \neq 0 \quad ↯$$

Definition: Eine Menge $X \subset \mathbb{R}^n$ heißt sternförmig bzgl $x_0 \in X$ falls für alle $x \in X$ die Strecke von x nach x_0 ganz in X liegt, dh.

$$\{ t x_0 + (1-t)x \mid t \in [0,1] \} \subset X$$

Satz 1: Sei $U \subset \mathbb{R}^2$ sternförmig, dann existiert zu jeder Funktion $f = (f_1, f_2) : U \to \mathbb{R}^2$ mit $(*)$ eine Funktion F, die $(**)$ erfüllt.

Beweis: oBdA. $x_0 = 0$. dh $tx \in X$ für alle $t \in [0,1]$

$$F(x_1, x_2) := \int_0^1 [x_1 \, f_1(tx_1, tx_2) + x_2 \, f_2(tx_1, tx_2)] \, dt$$

$$\Rightarrow \frac{\partial F}{\partial x_1} = f_1, \quad \frac{\partial F}{\partial x_2} = f_2$$

Bemerkung: Die Existenz der Funktion F hängt von der Topologie von U ab.

Bezeichng: $C^\infty(U, \mathbb{R}^k) = \{ f : U \to \mathbb{R}^k \text{ glatt} \}$, $U \subset \mathbb{R}^2$

man definiert

- $\operatorname{grad} : C^\infty(U, \mathbb{R}) \longrightarrow C^\infty(U, \mathbb{R}^2)$

  $\operatorname{grad}(\varphi) = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \right)$

- $\operatorname{rot} : C^\infty(U, \mathbb{R}^2) \longrightarrow C^\infty(U, \mathbb{R})$

  $\operatorname{rot}(\varphi_1, \varphi_2) = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1}$

Lemma: • $\operatorname{rot} \circ \operatorname{grad} = 0$ dh $\operatorname{im}(\operatorname{grad}) \subset \ker(\operatorname{rot})$

rot, grad sind lineare Abbildung

man definiert: $H^1(U) = \ker(\mathrm{rot}) / \mathrm{im}(\mathrm{grad})$

$= \{ q + \mathrm{im}(\mathrm{grad}) \mid q \in \ker(\mathrm{rot}) \}$

Bemerkung:
- $\ker(\mathrm{rot})$, $\mathrm{im}(\mathrm{grad})$ sind i.A. unendlich-dim
  $H^1(U)$ ist i.A. endlich-dim
- Satz 1: $U \subset \mathbb{R}^2$ sternförmig $\Rightarrow H^1(U) = 0$

  Beispiel: $H^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \neq 0$

  tatsächlich: $H^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{x_1, \dots, x_k\}) \cong \mathbb{R}^k$

man definiert: $H^0(U) = \ker(\mathrm{grad})$ — auch für $f: U \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$, $\mathrm{grad}(f) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_k}\right)$

Satz 2: Eine offene Menge $U \subseteq \mathbb{R}^k$ ist zusammenhängend genau dann, wenn

$$H^0(U) = \mathbb{R}.$$

Beweis:
- $\mathrm{grad}(f) = 0 \Rightarrow f$ ist lokal konstant
- U zus. $\Rightarrow$ jede lokal-konstante Funktion ist konstant

  da $x_0 \in U$, $U_0 := \{x \in U \mid f(x) = f(x_0)\} = f^{-1}(f(x_0))$

  ist abgeschlossen (f stetig) und offen (f lokal konstant)

  $\Rightarrow U = U_0$ d.h. f ist konstant

  $\Rightarrow H^0(U) = \mathbb{R}$
- U nicht zus. $\Rightarrow \exists f: U \to \{0,1\}$ glatt und surj.

  $\Rightarrow f$ ist lokal-konstant, aber nicht konstant

  $\Rightarrow \mathrm{grad}(f) = 0$

  $\Rightarrow \dim H^0(U) > 1$

Bemerkung: $\dim H^0(U)$ ist die Anzahl der Zs.komponenten von U

nun: $U \subset \mathbb{R}^3$ offen

<u>man definiert</u>

$$\mathrm{grad}: \mathcal{C}^\infty(U, \mathbb{R}) \to \mathcal{C}^\infty(U, \mathbb{R}^3)$$
$$\mathrm{rot}: \mathcal{C}^\infty(U, \mathbb{R}^3) \to \mathcal{C}^\infty(U, \mathbb{R}^3)$$
$$\mathrm{div}: \mathcal{C}^\infty(U, \mathbb{R}^3) \to \mathcal{C}^\infty(U, \mathbb{R})$$

durch:

$$\mathrm{grad}(f) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3}\right)$$

$$\mathrm{rot}(f_1, f_2, f_3) = \left(\frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3}, \frac{\partial f_1}{\partial x_3} - \frac{\partial f_3}{\partial x_1}, \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right)$$

$$\mathrm{div}(f_1, f_2, f_3) = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \frac{\partial f_3}{\partial x_3}$$

<u>Lemma</u>:
- $\mathrm{rot} \circ \mathrm{grad} = 0$
- $\mathrm{div} \circ \mathrm{rot} = 0$

<u>man definiert</u>: $H^0(U)$, $H^1(U)$ wie oben

$$H^2(U) = \ker(\mathrm{div}) / \mathrm{im}(\mathrm{rot})$$

<u>Satz 3</u>: Sei $U \subset \mathbb{R}^3$ offen und sternförmig dann gilt

$$H^0(U) = \mathbb{R}, \quad H^1(U) = 0, \quad H^2(U) = 0$$

<u>Bemerkung</u>: z.B. $H^1(U), H^2(U)$ ungleich Null für $U = \mathbb{R}^3 \setminus S^1$

$$S^1 = \{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 = 1, \ x_3 = 0 \}$$

Äußere Algebra

Sei V ein reeller Vektorraum

$$\Lambda^k V = \{ f : \underbrace{V \times \dots \times V}_{k-\text{mal}} \to \mathbb{R} \mid k\text{-multilinear und alternierend} \}$$

<u>Lemma:</u>
- $\Lambda^k V = 0$ für $k > \dim V$
- $\dim \Lambda^k V = \binom{n}{k}$ für $\dim V = n$

<u>Beispiel:</u>
- $\Lambda^1 V = V^*$ $\qquad\Lambda^0 V = \mathbb{R}$
- $\Lambda^n V = \mathbb{R}$, $\det \in \Lambda^n V$

<u>Dach-Produkt:</u> $\wedge : \Lambda^p V \times \Lambda^q V \longrightarrow \Lambda^{p+q} V$

$$(\omega_1 \wedge \omega_2)(v_1, \dots, v_{p+q}) = \sum \operatorname{sign}(\sigma)\, \omega_1(v_{\sigma(1)} \dots)\, \omega_2(v_{\sigma(p+1)} \dots$$

<u>Beispiel:</u> $\lambda_1 \wedge \lambda_2 (v_1, v_2) = \lambda_1(v_1)\lambda_2(v_2) - \lambda_1(v_2)\lambda_1(v_1)$

<u>Lemma:</u>
1. $\alpha \wedge \beta = (-1)^{k \cdot l} \beta \wedge \alpha$ für $\alpha \in \Lambda^k, \beta \in \Lambda^l$
2. $(x\alpha + y\beta) \wedge \gamma = x\, \alpha \wedge \gamma + y\, \beta \wedge \gamma$
3. $(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma = \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)$

<u>Folgerung:</u> $\omega \wedge \omega = 0$ für $\omega \in \Lambda^{2k+1} V$

<u>Bezeichnung:</u> $\Lambda^* V = \mathbb{R} \oplus V^* \oplus \dots \oplus \Lambda^n V$

ist die äußere Algebra

genauer:

Lemma: Seien $\omega_1, \dots, \omega_p \in V^*$, dann gilt:

$$(\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_p)(v_1, \dots, v_p) = \det(\omega_i(v_j))$$

Folgerung: $\omega_1, \dots, \omega_p \in V^*$ sind genau dann linear unabhängig, wenn gilt:

$$\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_p \neq 0$$

Satz 4: Sei $e_1, \dots, e_n$ ein Basis von V mit dualer Basis $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$, dann ist

$$\{ \varepsilon_{i_1} \wedge \dots \wedge \varepsilon_{i_k} \mid i_1 < \dots < i_k \}$$

eine Basis von $\Lambda^k V$.

Verhalten bei Abbildungen: Sei $f: V \to W$ eine lineare Abbildung

man definiert

$$f^* = \Lambda^k(f) : \Lambda^k W \to \Lambda^k V$$

$$f^*\omega(v_1, \dots, v_k) = \omega(f(v_1), \dots, f(v_k))$$

pull-back

Lemma: ① $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$

② $f^*(\alpha \wedge \beta) = (f^*\alpha) \wedge (f^*\beta)$

③ $\det(f) = f^* : \Lambda^n V \to \Lambda^n V$, $\quad \dim V = n$

Bemerkung:
- $V \mapsto \Lambda^k(V)$ ist ein kontravarianter Funktor
- $\det(f - \lambda \mathrm{Id}) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \, \mathrm{tr}(\Lambda^{n-i}(f)) \, t^i$

$$= (-1)^n t^n + (-1)^{n-1} \mathrm{tr}(f) \pm \dots + \det(f$$