De Rham-Kohomologie

$U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $e_1, \dots, e_n$ kanonische Basis, $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ duale Basis

Definition: Eine <u>Differentialform</u> vom Grad p (kurz <u>p-Form</u>) ist eine glatte Abbildung

$$\omega : U \longrightarrow \Lambda^p \mathbb{R}^n$$

man schreibt: $\underline{\underline{\Omega^p(U)}}$ = Raum der p-Formen auf U

$$\Omega^0(U) = C^\infty(U)$$

<u>Ziel:</u> Fortsetzung des Differentials auf p-Formen

Sei $\omega : U \longrightarrow \Lambda^p \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^{\binom{n}{p}}$ betrachtet als Abbildung

$\Rightarrow$ $d_x\omega : \mathbb{R}^n \longrightarrow \Lambda^p \mathbb{R}^n$ linear (das übliche Differential)

mit: $(d_x\omega)(e_i) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \omega(x + te_i) = \frac{\partial \omega}{\partial x_i}(x)$ (**)

$\omega = \sum_I \omega_I \; \varepsilon_I$ wobei $I = (i_1, \dots i_p)$, $\varepsilon_I = \varepsilon_{i_1} \wedge \dots \wedge \varepsilon_{i_p}$

$\omega_I \in C^\infty(U)$

$\rightarrow$ $d_x\omega = \sum_I \frac{\partial \omega_I}{\partial x_i}(x) \; \varepsilon_I$

<u>dh</u> $x \longmapsto d_x\omega$ ist eine glatte Funktion auf U mit Werten i. $\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \Lambda^p \mathbb{R}^n)$

<u>Definition.</u> Das <u>äußere Differential</u> $\underline{d}: \Omega^p(U) \longrightarrow \Omega^{p+1}(U)$ ist der lineare Operator

$$d_x\omega\,(v_1, \dots, v_{p+1}) := \sum_{i=1}^{p+1} (-1)^{e-1} d_x\omega(v_e)(v_1, \dots \hat{v_e} \dots v_{p+1})$$

$\wedge$ = wird weggelassen

<u>Bemerkung</u>: $d_x\omega = \sum \varepsilon_i \wedge d_x\omega(e_i)$ (*

<u>da</u> $(\lambda \wedge \alpha)(v_1, \dots, v_{p+1}) =$

Folgerung: $d_x \omega \in \Lambda^{p+1} \mathbb{R}^n$ (nach (*))

Beispiel: • Sei $x_i : U \longrightarrow \mathbb{R}$ die i-te Koordinatenprojektion

man schreibt: $\varepsilon_i = dx_i$

$\Rightarrow$ $dx_i \in \Omega^1(U)$

ist die konstante Abbildung $x \mapsto \varepsilon_i$ (nach (**))

• Sei $f \in \Omega^0(U)$

$\Rightarrow$ $d_x f(v) = \frac{\partial f}{\partial x_1} v_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} v_n = \langle \operatorname{grad} f, v \rangle$

für $v = (v_1, \dots, v_n)$

dh $df = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \varepsilon_i = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$

Lemma 1: Sei $\omega = f \cdot \varepsilon_I$ für $f \in C^\infty(U)$, dann gilt:

$$d_x \omega = d_x f \wedge \varepsilon_I$$

Beweis: • $(d_x \omega) v = (d_x f)(v) \varepsilon_I = \langle \operatorname{grad} f, v \rangle \varepsilon_I$ als Abb

$= (d_x f)(v) \, \varepsilon_I$

• $(d_x \omega)(v_1, \dots, v_{p+1}) = \sum_{k=1}^{p+1} (-1)^{k-1} (d_x f)(v_k) \, \varepsilon_I (v_1 \dots \hat{v}_k \dots v_{p+1})$

$= (d_x f \wedge \varepsilon_I)(v_1 \dots, v_{p+1})$

oder: $d_x \omega = \sum_i \varepsilon_i \wedge (d_x \omega) e_i$

$= \sum_i \varepsilon_i \wedge (d_x f)(e_i) \, \varepsilon_I$

$= d_x f \wedge \varepsilon_I$

$\boxed{d\omega = \sum_i \frac{\partial \omega_I}{\partial x_i} \varepsilon_i}$

Bemerkung: $\varepsilon_k \wedge \varepsilon_I = 0$ für $k \in I$

$\varepsilon_k \wedge \varepsilon_I = (-1)^r \varepsilon_J$ für $k \notin I$, $J = (i_1 \dots i_r \, k \dots i$

Lemma 2: $d^2 = 0$ als Komposition $\Omega^p(U) \to \Omega^{p+1}(U) \to \Omega^{p+2}(U)$

Beweis: Sei $\omega = f\, \varepsilon_I$ oBdA

$$\Rightarrow d\omega = df \wedge \varepsilon_I = \frac{\partial f}{\partial x_1} e_1 \wedge \varepsilon_I + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} e_n \wedge \varepsilon_I$$

$$\Rightarrow d^2\omega = \sum_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \varepsilon_i \wedge (\varepsilon_j \wedge \varepsilon_I)$$

$$= \sum_{i<j} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \right) \varepsilon_i \wedge \varepsilon_j \wedge \varepsilon_I = 0$$

Bemerkung: Die lineare Algebra überträgt sich:

$$(\omega_1 \wedge \omega_2)(x) := \omega_1(x) \wedge \omega_2(x)$$

d.h. $\wedge : \Omega^p(U) \times \Omega^q(U) \longrightarrow \Omega^{p+q}(U)$ bilinear

und: $(f\omega_1) \wedge \omega_2 = f\, \omega_1 \wedge \omega_2 = \omega_1 \wedge (f\omega_2)$

für $f \in \Omega^0(U)$

Lemma 3: Für $\omega_1 \in \Omega^p(U)$ und $\omega_2 \in \Omega^q(U)$ gilt:

$$d(\omega_1 \wedge \omega_2) = d\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^p \omega_1 \wedge d\omega_2$$

Beweis: oBdA $\omega_1 = f\, \varepsilon_I$, $\omega_2 = g\, \varepsilon_J$

$\Rightarrow \omega_1 \wedge \omega_2 = fg\, \varepsilon_I \wedge \varepsilon_J$ $\quad I = (i_1, \dots, i_p)$, $J = (j_1, \dots, j_q)$

$$\Rightarrow d(\omega_1 \wedge \omega_2) = d(f \cdot g) \wedge \varepsilon_I \wedge \varepsilon_J$$

$$= (df\, g + f\, dg) \wedge \varepsilon_I \wedge \varepsilon_J$$

$$= df \cdot g \wedge \varepsilon_I \wedge \varepsilon_J + f\, dg \wedge \varepsilon_I \wedge \varepsilon_J$$

$$= df \wedge \varepsilon_I \wedge g\, \varepsilon_J + (-1)^p f\, \varepsilon_I \wedge dg \wedge \varepsilon_J$$

$$= d\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^p \omega_1 \wedge d\omega_2$$

→ $\Omega^*(U)$ ist eine anti-kommutative Algebra mit einem Differential

$$d: \Omega^*(U) \longrightarrow \Omega^{*+1}(U)$$

mit: (i) $d \circ d = 0$ (ii) d ist eine Derivation

man sagt: $(\Omega^*(U), d)$ ist eine kommutative DGA (differential graded algebra)

= deRham-Komplex von U

<u>Satz 1</u>: Es gibt genau einen linearen Operator
$$d: \Omega^p(U) \longrightarrow \Omega^{p+1}(U)$$

mit: (i) $df = \frac{\partial f}{\partial x_1}\varepsilon_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\varepsilon_n$ für $f \in \Omega^0(U)$

(ii) $d^2 = 0$

(iii) $d(\omega_1 \wedge \omega_2) = d\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^p \omega_1 \wedge \omega_2,\quad \omega_1 \in \Omega^p($

<u>Definition</u>: Die p-te <u>deRham-Kohomologie-Gruppe</u> ist definiert als Quotienten-Vektorraum

$$\underline{\underline{H^p(U)}} = \frac{\ker(d: \Omega^p(U) \to \Omega^{p+1}(U))}{\operatorname{im}(d: \Omega^{p-1}(U) \to \Omega^p(U))}$$

<u>Bemerkungen</u>:

- $H^0(U) = \ker(d: C^\infty(U) \to \Omega^1(U)) =$ lokal-konstante Abbildungen auf
- $H^p(U) = 0$ für $p < 0$
- $p, q \in U$, $p \sim q$ falls eine stetige Kurve $\alpha: I \to U$ existiert mit $\alpha(0) = p$, $\alpha(1) = q$

→ $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation

Zusammenhangskomponenten von U = Äquivalenzklassen von U

= max. nicht-leere Teilmengen, die sich nicht nicht-trivial als Vereinigung von zwei offenen disjunkten Mengen schreibt

<u>Lemma 4:</u> $\dim H^0(U) =$ Anzahl der Zusammenhangskomponenten von U

<u>Beweis:</u> zz $H^0(U) =$ Raum der Funktionen $f: U \to \mathbb{R}$, die konstant auf jeder Zus. komponente sind

$f: U \to \mathbb{R}$ lokal-konstant $\Rightarrow$ U ist disjunkte Vereinigung der offenen Mengen $f^{-1}(c)$

$\Rightarrow$ f ist konstant auf Zus.komp.

<u>Definition:</u>

- <u>geschlossene Formen</u> = Formen in $\ker d$
- <u>exakte Formen</u> = Formen im Bild von d

<u>Bemerkung:</u>

- $H^p(U)$ misst die Abweichung geschlossener p-Formen exakt zu sein, d.h.

  $$H^p(U) = 0 \Rightarrow \text{jede geschlossene } p\text{-Form ist auch exakt}$$
- exakte Formen sind geschlossen
- geschlossene Formen definieren Kohomologieklassen:

  $d\omega = 0, \quad \omega \in \Omega^p(U)$

  $\Rightarrow [\omega] = \omega + d(\Omega^{p-1}(U)) \in H^p(U)$
- $[\omega_1] = [\omega_2] \Leftrightarrow \omega_1 - \omega_2 = d\eta$ für irgendein η
- $\dim H^p(U) < \infty$ i.A., im Unterschied zu $\Omega^p(U)$
- Das Dachprodukt definiert ein bilineares, assoziatives und anti-kommutatives Produkt

  $$H^p(U) \times H^q(U) \longrightarrow H^{p+q}(U)$$

  $$([\omega_1], [\omega_2]) \mapsto [\omega_1]\cdot[\omega_2] := [\omega_1 \wedge \omega_2]$$

  wohldefiniert da: $d\omega_1 = 0 = d\omega_2$

  $$(\omega_1 + d\eta_1) \wedge (\omega_2 + d\eta_2) = \omega_1\wedge\omega_2 + \omega_1 \wedge d\eta_2 + d\eta_1 \wedge \omega_2 + d\eta_1 \wedge d\eta_2$$

  $$= \omega_1 \wedge \omega_2 + d(\eta_1\, d\eta_2 + \eta_1 \wedge \omega_2 + (-1)^p \omega_1 \wedge \eta_2)$$

Ziel: Die Zuordnung $U \mapsto H^p(U)$ ist ein kontravarianter Funktor

Definition. Seien $U_1 \subset \mathbb{R}^n$, $U_2 \subset \mathbb{R}^m$ offene Mengen, $f: U_1 \to U_2$ glatt

$$\Rightarrow \quad f^*: \Omega^p(U_2) \longrightarrow \Omega^p(U_1)$$

$$(f^*\omega)_x(v_1, \ldots, v_p) = \omega_{f(x)}(df(v_1), \ldots, df(v_p))$$

$$f^*\omega = \omega \circ f \qquad \text{für} \qquad \omega \in \Omega^0(U) = C^\infty(U)$$

Bemerkung:

- $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$
- $\mathrm{Id}_U^* = \mathrm{Id}_{\Omega^p(U)}$
- Sei $i: U_1 \hookrightarrow U_2$ die Inklusionsabbildung,

  $\Rightarrow \quad i^*\omega = \omega \circ i = \omega|_{U_1}$ Einschränkung auf U_1

Beispiel: $\varepsilon_i \in \Omega^1(U_2)$, $f: U_1 \to U_2$ $\quad f = (f_1, \ldots, f_n)$

$$f^*\varepsilon_i = \sum \frac{\partial f_i}{\partial x_k}\, \varepsilon_k = df_i$$

da: $\displaystyle df_x(e_k) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f(x+te_k) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (f_1(x+te_k), \ldots, f_n(x+te_k))$

$$= \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_k}, \ldots, \frac{\partial f_n}{\partial x_k}\right)$$

$$\rightarrow \quad (f^*\varepsilon_i)(e_k) = \varepsilon_i\,(df(e_k)) = \frac{\partial f_i}{\partial x_k}$$

$$\Rightarrow \quad f^*\varepsilon_i = \sum \frac{\partial f_i}{\partial x_k}\, \varepsilon_k$$

Satz 2:

(i) $f^*(\alpha \wedge \beta) = (f^*\alpha) \wedge (f^*\beta)$

(ii) $d f^*\omega = f^* d\omega$

(iii) $f^*(\omega) = \omega \circ f \qquad$ für $\quad \omega \in \Omega^0(U)$

Die pull-back Abbildung $f^*: \Omega^p(U_2) \longrightarrow \Omega^p(U_1)$ ist durch (i), (ii), (iii) eindeutig bestimmt.