Beispiel: ① Sei $\gamma : (a,b) \to U$ eine glatte Kurve in U

$\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$, $U \subset \mathbb{R}^n$ ~~offen~~ $f_i \in C^\infty(U)$

$\omega = f_1 \, dx_1 + \dots + f_n \, dx_n$

man schreibt dx_i für ε_i, dx_I für $dx_{i_1} \wedge \dots$

$$\Rightarrow \gamma^*(\omega) = (f_1 \circ \gamma)\gamma^*(dx_1) + \dots + (f_n \circ \gamma)\gamma^*(dx_n)$$
$$= (f_1 \circ \gamma) d\gamma_1 + \dots + (f_n \circ \gamma) d\gamma_n$$
$$= ((f_1 \circ \gamma)\dot\gamma_1 + \dots + (f_n \circ \gamma)\dot\gamma_n)\, dt$$
$$= \langle f(\gamma(t)), \dot\gamma(t) \rangle$$

auf $\mathbb{R}$

$\left(\exists_f \; d\gamma_i = f \cdot dt \right.$
$\Rightarrow f = d\gamma_i\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) = \frac{d}{dt}\big|_{t_0} \gamma_i =$

$$\int_\gamma \omega = \int_a^b \gamma^*(\omega) = \int_a^b \langle f(\gamma(t)), \dot\gamma(t) \rangle dt$$

= Energie des Vektorfeldes f entlang γ

② $f : U_1 \to U_2$ glatt, $U_1, U_2 \subset \mathbb{R}^n$ offen

$$\Rightarrow f^* dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n = \det(d_x f)\, dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$$

③ $\varphi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, $\varphi(x,t) = \psi(t)x$

$$\Rightarrow \varphi^*(dx_i) = x_i \dot\psi(t)\, dt + \psi(t)\, dx_i$$

da $\varphi^*(dx_i)\frac{d}{dt} = dx_i\left(d\varphi\left(\frac{d}{dt}\right)\right) = dx_i\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right) = dx_i(\dot\psi(t)x) = x_i \dot\psi(t)$

$\varphi^*(dx_i)e_k = dx_i(d\varphi(e_k)) = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} = \psi(t)$ für $i=k$ sonst 0

ÜA: grad, rot, div $\hat{=}$ d^0, d^1, d^2

Bemerkung: Sei $f: U_1 \to U_2$ glatt, dann induziert f eine lineare Abbildung

$$f^*: H^p(U_2) \longrightarrow H^p(U_1)$$

mit $$f^*[\omega] := [f^*\omega]$$

wohldefiniert: $$f^*(\omega + d\eta) = f^*\omega + f^*d\eta = f^*\omega + d f^*\eta$$

Lemma: Die Abbildung $f^*: H^*(U_2) \to H^*(U_1)$ ist ein Homomorphismus graduierter Algebren, d.h.

$$f^*([\omega_1]\cdot[\omega_2]) = (f^*[\omega_1])\cdot(f^*[\omega_2])$$

Satz (Lemma von Poincaré)

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ sternförmig und offen, dann gilt $H^0(U) = \mathbb{R}$ und für $p > 0$:

$$H^p(U) = 0$$

Beweis: oBdA U sternförmig bzgl. $0 \in \mathbb{R}^n$

zu konstruieren ist ein Operator $S_p: \Omega^p(U) \longrightarrow \Omega^{p-1}(U)$

mit

$$\left.\begin{array}{ll} \cdot\ d S_p + S_{p+1} d = \mathrm{id}, & p > 0 \\ \cdot\ S_1 d = \mathrm{id} - e, & e(\omega) = \omega(0),\ \omega \in \Omega^0(U) \end{array}\right\} (*)$$

aus $(*)$ folgt die Behauptung: $\cdot\ d\omega = 0$, $\omega \in \Omega^p(U)$ $p>0$

$$\Rightarrow d S_p \omega = \omega$$

$$\Rightarrow [\omega] = 0$$

$\cdot\ d\omega = 0$, $\omega \in \Omega^0(U)$

$$\Rightarrow \omega - \omega(0) = S_1 d\omega = 0$$

$\Rightarrow \omega$ ist konstant

• man konstruiert $\hat{S}_p : \Omega^p(U \times \mathbb{R}) \longrightarrow \Omega^{p-1}(U)$

$\omega \in \Omega^p(U \times \mathbb{R}) \Rightarrow \quad \omega = \sum_I f_I(x,t)\, dx_I + \sum_J g_J(x,t)\, dt \wedge dx_J$

$\hat{S}_p(\omega) := \sum_J \left(\int_0^1 g_J(x,t)\, dt \right) dx_J$

$$d\hat{S}_p(\omega) + \hat{S}_{p+1} d\omega = \sum_{J,i} \left(\int_0^1 \frac{\partial g_J(x,t)}{\partial x_i} \right) dx_i \wedge dx_J \qquad (*)$$

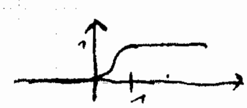
$$+ \sum_I \left(\int_0^1 \frac{\partial f_I(x,t)}{\partial t}\, dt \right) dx_I - \sum_{J,i} \left(\int_0^1 \frac{\partial g_J}{\partial x_i}\, dt \right) dx_i \wedge dx_J$$

$$= \sum_I \left(\int_0^1 \frac{\partial f_I(x,t)}{\partial t}\, dt \right) dx_I \qquad \left(d\omega = \dots \frac{\partial f_I}{\partial t} dt \wedge dx_I + \frac{\partial g_J}{\partial x_i} dx_i \wedge dt \right.$$

$$= \sum_I f_I(x,1)\, dx_I - \sum f_I(x,0)\, dx_I$$

• sei $\varphi : U \times \mathbb{R} \longrightarrow U$ definiert durch $\varphi(x,t) = \psi(t) \cdot x$

und ψ glatt mit $\psi(t) = 0 \quad \forall t \leq 0$
$\psi(t) = 1 \quad \forall t \geq 1$
$0 \leq \psi(t) \leq 1$



ψ

$S_p(\omega) := \hat{S}_p(\varphi^* \omega)$ (man wendet (*) auf $\varphi^* \omega$ an)

• sei $\omega = \sum h_I\, dx_I$

$$\Rightarrow \varphi^* \omega = \sum h_I\, \varphi^*(dx_I) \qquad I = (i_1, \dots, i_k)$$

$$= \sum h_I(\psi(t) \cdot x)\, (\varphi^* dx_{i_1}) \wedge \dots \wedge (\varphi^* dx_{i_k})$$

$$= \sum h_I(\psi(t) \cdot x)\, (d\psi \cdot x_{i_1} + \psi(t)\, dx_{i_1}) \wedge \dots \qquad (d\psi = \dot{\psi}$$

$$= \sum \bar{f}_I(x,t)\, dx_I + \sum_J g_J(x,t)\, dt \wedge dx_J$$

mit $\bar{f}_I(x,t) = h_I(\psi(t) \cdot x) \cdot \psi(t)^p$

$$\Rightarrow d S_p(\omega) + S_{p+1} d\omega = \sum_I \left(h_I(\psi(1) x)\, \psi(1)^p - h_I(\psi(0) x)\, \psi(0)^p \right.$$

$$= \sum_I h_I(x)\, dx_I \qquad p > 0$$

$$(= \omega(x) - \omega(0) \qquad \text{für } p = 0)$$

Homologie von Kettenkomplexen

- exakte Sequenz von Vektorräumen: (Sequenz = Folge)

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

mit
- A, B, C Vektorräume, f, g lineare Abbildungen
- $\operatorname{Im} f = \operatorname{Ker} g$

Bemerkung:
- $A \xrightarrow{f} B \to 0$ ist exakt $\Leftrightarrow$ f ist surjektiv
- $0 \to A \to B$ ist exakt $\Leftrightarrow$ f ist injektiv

- Definition: Ein Kettenkomplex ist eine Folge von Vektorräumen $A^* = \{A^i, d^i\}$

$$\cdots \to A^{i-1} \xrightarrow{d^{i-1}} A^i \xrightarrow{d^i} A^{i+1} \longrightarrow \cdots \qquad (*)$$

mit $d^{i+1} \circ d^i = 0$

exakt falls: $\ker d^i = \operatorname{Im} d^{i-1}$

- kurze exakte Sequenz: $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$

äquivalent: f injektiv, g surjektiv, $\operatorname{Im} f = \ker g$

es folgt: $C \cong B / \operatorname{Im} f = \operatorname{Coker}(f)$ Kokern

Bemerkung:
- $A^* = \{A^i, d^i\}$ lange exakte Sequenz
  $\to$ kurze exakte Sequenz: $0 \to \operatorname{Im} d^{i-1} \to A^i \to \operatorname{Im} d^i \to 0$
- $A^{i-1} / \operatorname{Im} d^{i-2} \cong A^{i-1} / \operatorname{Ker} d^{i-1} \xrightarrow[d^{i-1}]{\sim} \operatorname{Im} d^{i-1}$

(nützlich für Berechnungen)

(falls $\dim < \infty$)
- $0 \to A \to B \to C \to 0$ kurze exakte Sequenz $\Rightarrow$ $B \cong A \oplus C$

(

Definition: • Die $p$te Kohomologie eines Kettenkomplexes ist definiert als

$$H^p(A^*) = \operatorname{Ker} d^p \big/ \operatorname{Im} d^{p-1} \qquad A^* = (A^i, d^i)$$

$\operatorname{Ker} d^p$ = Menge der p-Zyklen

$\operatorname{Im} d^{p-1}$ = Menge der p-Ränder

$H^p(A^*)$ = Menge der Kohomologie-Klassen

• Eine Ketten-Abbildung $f: A^* \to B^*$ ist eine Familie von Abbildungen $f^p: A^p \to B^p$ mit:

$$d_B^p \circ f^p = f^{p+1} \circ d_A^p$$

d.h.

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & A^{p-1} \arrow[r, "d_A^{p-1}"] \arrow[d, "f^{p-1}"] & A^p \arrow[r, "d_A^p"] \arrow[d, "f^p"] & A^{p+1} \arrow[r] \arrow[d, "f^{p+1}"] & {} \\
\cdots \arrow[r] & B^{p-1} \arrow[r, "d_B^{p-1}"'] & B^p \arrow[r, "d_B^p"'] & B^{p+1} \arrow[r] & {}
\end{tikzcd}$$

ist ein kommutati Diagramm

Lemma: Eine Kettenabbildung $f: A^* \to B^*$ induziert eine lineare Abbildung

$$f^*: H^p(A^*) \to H^p(B^*)$$

Beweis. $a \in A^p$, $d^p a = 0$, $[a] = a + \operatorname{Im} d^{p-1}$

man definiert: $\quad f^*([a]) = [f^p(a)]$

• $d_B^p f^p(a) = f^{p+1} d_A^p(a) = f^{p+1}(0) = 0$

d.h. auch $f^p(a)$ ist ein Zykel

• $[a_1] = [a_2] \Rightarrow a_1 - a_2 \in \operatorname{Im} d_A^{p-1}$

$\Rightarrow f^p(a_1 - a_2) = f^p d_A^{p-1}(x) = d_B^{p-1} f^{p-1}(x)$

$\Rightarrow f^p(a_1) - f^p(a_2) \in \operatorname{Im} d_B^{p-1}$

$\Rightarrow [f^p(a_1)] = [f^p(a_2)]$ d.h. f^* ist wohl definiert

<u>kurze exakte Sequenz von Kettenkomplexen</u>:

$$0 \to A^* \xrightarrow{f} B^* \xrightarrow{g} C^* \to 0$$

= f, g sind Kettenabbildungen, so dass

$$0 \to A^p \xrightarrow{f} B^p \to C^p \to 0$$

für alle p eine kurze exakte Sequenz von VR ist

<u>Lemma:</u> Eine kurze exakte Sequenz von Kettenkomplexen induziert eine exakte Sequenz:

$$H^p(A^*) \xrightarrow{f^*} H^p(B^*) \xrightarrow{g^*} H^p(C^*)$$

<u>Beweis:</u> • $g^p \circ f^p = 0$

$\Rightarrow g^* f^* [a] = g^* (f^p(a)) = (g^p(f^p(a))) = 0 \quad \forall [a] \in H^p$

• Umkehrung: $[b] \in H^p(B^*)$ mit $g^*[b] = 0$

$\Rightarrow g^p(b) = d_C^{p-1}(c)$

$\exists\, b_1 \in B^{p-1} : g^{p-1}(b_1) = c$ da g surjektiv

$\Rightarrow g^p(b - d_B^{p-1}(b_1)) = 0$ da Kettenabb.

$\Rightarrow \exists\, a \in A^p : f^p(a) = b - d_B^{p-1}(b_1)$

<u>zz</u> $d_A^p(a) = 0$

f^{p+1} injektiv $\Rightarrow$ g.zz. $f^{p+1}(d_A^p(a)) = 0$

$f^{p+1}(d_A^p(a)) \underset{\text{Kettenabb}}{=} d_B^p(f^p(a)) = d_B^p(b - d_B^{p-1}(b_1)) = 0$ $\quad d_B^2 = 0$, $d_B b = 0$

$\Rightarrow [a] \in H^p(A)$ und $f^*[a] = [b - d_B^{p-1}(b_1)]$
$= [b]$

$\Rightarrow \operatorname{Im} f^* = \ker g^*$

<u>dh</u> die Folge ist exakt