20. Vorlesung
29.06.10

Fortsetzung: Homologische Algebra

- **Kettenkomplex**: $A^* = (A^i, d^i)$, $i \in \mathbb{Z}$,
  A^i VR, $d^i: A^i \to A^{i+1}$ linear $d^{i+1} \circ d^i = 0$

Beispiel: $\Omega^*(U)$

- **Kettenabbildung**: $f: A^* \to B^*$
  mit: • $f: A^p \to B^p$ linear
  • $f \circ d_A = d_B \circ f$

- **kurze exakte Sequenz**: $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$
  dh • f injektiv, g surjektiv
  • $\operatorname{Im} f = \ker g$

- **Lemma**: Eine kurze exakte Sequenz von Kettenkomplexen
  $$0 \to A^* \xrightarrow{f} B^* \xrightarrow{g} C^* \to 0$$
  f, g Kettenabb.
  induziert eine exakte Sequenz in der Kohomologie:
  $$H^p(A^*) \xrightarrow{f^*} H^p(B^*) \xrightarrow{g^*} H^p(C^*)$$
  wobei: $f^*[a] = [f^p(a)]$ für $[a] \in H^p(A^*)$

Frage: Wann erhält man eine kurze exakte Sequenz?

Problem: $g^p: B^p \to C^p$ ist surjektiv, aber
i. A. $d_B b \neq 0$ selbst wenn $c = g^p(b)$ geschlossen ist

Ziel: Lange exakte Sequenz

Definition: Sei $0 \to A^* \xrightarrow{f} B^* \xrightarrow{g} C^* \to 0$ eine kurze exakte Sequenz von Kettenkomplexen. Man definiert den <u>Rand-Operator</u>

$$\underline{\partial^*}: H^p(C^*) \longrightarrow H^{p+1}(A^*)$$

als die lineare Abbildung gegeben durch:

$$\partial^*([c]) := \left[(f^{p+1})^{-1}\left(d_B^p \, (g^p)^{-1}(c) \right) \right] \qquad (*)$$

<u>zu zeigen bleibt</u>:
① $(*)$ ist unabhängig von c
② $(*)$ ist unabhängig von der Wahl von b in $(g^p)^{-1}(c)$
③ $g^p(b) = c$, $d_C c = 0 \Rightarrow d_B b \in \operatorname{Im} f^{p+1}$
④ $f^{p+1}(a) = d_B^p b \Rightarrow d_A a = 0$

<u>zu ②</u>: $g^p(b_1) = g^p(b_2) = c$, $f^{p+1}(a_1) = d_B b_1$, $f^{p+1}(a_2) = d_B b_2$

$$\Rightarrow [a_1] = [a_2] \in H^{p+1}(A^*)$$

$$\begin{tikzcd}
 & \arrow[d] & \arrow[d] & \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & A^{p-1} \arrow[r, "f^{p-1}"] \arrow[d, "d_A"] & B^{p-1} \arrow[r, "g^{p-1}"] \arrow[d, "d_B"] & C^{p-1} \arrow[r] \arrow[d, "d_C"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A^p \arrow[r, "f^p"] \arrow[d] & B^p \arrow[r, "g^p"] \arrow[d] & C^p \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & A^{p+1} \arrow[r, "f^{p+1}"] \arrow[d] & B^{p+1} \arrow[r, "g^{p+1}"] \arrow[d] & C^{p+1} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & \; & \; & \; &
\end{tikzcd}$$

<u>zu ①</u>: ÜA

<u>Bemerkung</u>: Man sieht gleich $\ker \partial^* = \operatorname{Im} g^*$, d.h. $\ker \partial^*$ ist genau die Obstruktion dagegen, dass g^* surjektiv ist, d.h.

$$\partial^* = 0 \Rightarrow \ker \partial^* = C^p \to g^* \text{ surjektiv}$$

zu ③: $g^{p+1} d_B(b) = d_C(g^p b) = d_C(c) = 0$

$\Rightarrow d_B(b) \in \ker g^{p+1} = \operatorname{Im} f^{p+1}$

zu ④: $f^{p+2} d_A(a) = d_B(f^{p+1} a) = d_B(d_B b) = 0$

$\Rightarrow d_A(a) = 0$ da f^{p+2} injektiv

zu ②: $b_1 - b_2 \in \ker g^p$

$\Rightarrow \exists a : b_1 - b_2 = f^p(a)$

$\Rightarrow d_B(b_1) - d_B(b_2) = d_B f^p(a) = f^{p+1}(d_A a)$

$= f^{p+1}(a_1 - a_2)$

$\Rightarrow a_1 = (f^{p+1})^{-1}(d_B b_1) = \underbrace{(f^{p+1})^{-1}(d_B b_2)}_{= a_2} + d_A a$

$\Rightarrow [a_1] = [a_2]$

<u>Lemma 1</u>: Die Sequenz $H^p(B^*) \xrightarrow{g^*} H^p(C^*) \xrightarrow{\partial^*} H^{p+1}(A^*)$ ist exakt.

<u>Beweis</u>: zz $\operatorname{Im} g^* = \ker \partial^*$

- $\partial^* g^*([b]) = \partial^*[g^p(b)] = [(f^{p+1})^{-1} d_B b] = 0$ da $d_B b$

$\Rightarrow \operatorname{Im} g^* \subset \ker \partial^*$

- $\partial^*[c] = 0$ zz. $[c] \in \operatorname{Im} g^*$

sei $b \in B^p$ mit $g^p(b) = c$, $a \in A^p$ mit

$d_B(b) = f^{p+1}(d^p a)$

$\Rightarrow d_B(b - f^p(a)) = 0$, $g^p(b - f^p(a)) = c$

$\Rightarrow g^*[b - f^p(a)] = [c]$

Lemma 2: Die Sequenz $H^p(C^*) \xrightarrow{\partial^*} H^{p+1}(A^*) \xrightarrow{f^*} H^{p+1}(B^*)$ ist exakt.

Beweis: zz $\operatorname{Im} \partial^* = \ker f^*$

- $f^* \partial^* [c] = [d_B(b)] = 0$ mit $g^p(b) = c$
- $f^*[a] = 0 \Rightarrow f^{p+1}(a) = d_B(b)$ für ein b
  $\Rightarrow d_C(g^p(b)) = g^{p+1}(f^{p+1}(a)) = 0$
  $\Rightarrow \partial^*[g^p(b)] = [a]$

Zusammenfassung: Lange exakte Homologie - Sequenz

Satz: Zu jeder kurzen exakten Sequenz von Kettenkomplexen
$$0 \to A^* \xrightarrow{f} B^* \xrightarrow{g} C^* \to 0$$
gehört die lange exakte Sequenz:
$$\cdots \to H^p(A^*) \xrightarrow{f^*} H^p(B^*) \xrightarrow{g^*} H^p(C^*) \xrightarrow{\partial^*} H^{p+1}(A^*) \xrightarrow{f^*} H^{p+1}(B^*) \to \cdots$$

Definition: Zwei Kettenabbildungen $f, g : A^* \to B^*$ heissen Ketten-homotop, falls lineare Abbildungen $s : A^p \to B^{p-1}$ existieren mit
$$d_B s + s d_A = f - g : A^p \to B^p \qquad \forall p$$

s: Kettenhomotopie

Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & A^{p-1} \arrow[r] \arrow[d, "f-g"] & A^p \arrow[r] \arrow[d, "f-g"] \arrow[dl] & A^{p+1} \arrow[r] \arrow[d, "f-g"] \arrow[dl] & {} \\
\cdots \arrow[r] & B^{p-1} \arrow[r] & B^p \arrow[r] & B^{p+1} \arrow[r] & {}
\end{tikzcd}$$

<u>Lemma 3:</u> Für zwei Ketten-homotope Abbildungen $f, g: A^* \to B^*$ gilt:

$$f^* = g^* : H^p(A^*) \longrightarrow H^p(B^*)$$

<u>Beweis.</u> $[a] \in H^p(A^*)$

$$\begin{aligned}(f^* - g^*)[a] &= [f^p(a) - g^p(a)] \\ &= [d_B s(a) + s\, d_A(a)] \qquad \text{da } d_A(a) = 0 \\ &= [d_B\, s(a)] \\ &= 0\end{aligned}$$

<u>Bemerkung.</u> Im Beweis des Poincaré-Lemmas wurde eine Kettenhomotopie zwischen Identität und der Nullabbildung konstruiert:

$$s^p : \Omega^p(U) \longrightarrow \Omega^{p-1}(U) \qquad p > 0$$

$$\Rightarrow \; id^* = 0^* : H^p(U) \to H^p(U)$$

$$\Rightarrow \; id = 0 \quad \text{auf } H^p(U),\; p > 0 \qquad \text{da } id^* = id,\; 0^* = 0$$

$$\Rightarrow \; H^p(U) = 0 \quad \text{für } p > 0$$

<u>Lemma 4:</u> Für Kettenkomplexe A^*, B^* gilt:

$$H^p(A^* \oplus B^*) = H^p(A^*) \oplus H^p(B^*)$$

<u>Beweis.</u>

$$\ker(d^p_{A \oplus B}) = \ker d^p_A \oplus \ker d^p_B$$

$$\operatorname{Im}(d^{p-1}_{A \oplus B}) = \operatorname{Im} d^{p-1}_A \oplus \operatorname{Im} d^{p-1}_A$$

Die Mayer-Vietoris-Sequenz

Ziel: Berechnung von $H^p(U_1 \cup U_2)$ aus $H^p(U_1)$, $H^p(U_2)$ und $H^p(U_1 \cap U_2)$.

Satz. Seien $U_1, U_2 \subset \mathbb{R}^n$ offen, $U := U_1 \cup U_2$. Seien

$$i_a : U_a \to U \quad \text{und} \quad j_a : U_1 \cap U_2 \to U_a$$

für $a = 1, 2$ die entsprechenden Inklusionen. Dann ist folgende Sequenz exakt:

$$0 \to \Omega^p(U) \xrightarrow{I^p} \Omega^p(U_1) \oplus \Omega^p(U_2) \xrightarrow{\partial^p} \Omega^p(U_1 \cap U_2) \to 0$$

wobei:

$$I^p(\omega) = (i_1^* \omega, \; i_2^* \omega)$$

$$\partial^p(\omega_1, \omega_2) = j_1^*(\omega_1) - j_2^*(\omega_2)$$

Bemerkung: Sei $j : U \to V$ eine Inklusion, dann ist $j^* \omega = \omega|_U$

Beweis: Sei $\varphi : V \to W$ glatt, $\omega = \sum_I f_I \, dx_I \in \Omega^p(W)$

$\Rightarrow \varphi^* \omega = \sum_I f_I \circ \varphi \; d\varphi_{i_1} \wedge \ldots \wedge d\varphi_{i_p}$

hier: φ Inklusion offener Mengen in $\mathbb{R}^n$: $\varphi_i(x) = x_i$

$\Rightarrow d\varphi_{i_1} \wedge \ldots \wedge d\varphi_{i_p} = dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p}$

$\Rightarrow \varphi^* \omega = \sum_I f_I \circ \varphi \; dx_I \qquad (*)$

① I^p ist injektiv

da $I^p(\omega) = 0 \Rightarrow i_1^* \omega = 0 = i_2^* \omega$

$\Rightarrow \omega|_{U_1} = 0 = \omega|_{U_2}$

$\Rightarrow \omega = 0$ auf U, da $U = U_1 \cup U_2$

② $\underline{\ker \partial^p = \operatorname{Im} I^p}$

da "$\supset$"

$$\partial^p \circ I^p(\omega) = j_2^* i_2^*(\omega) - j_1^* i_1(\omega) = j^*(\omega) - j^*(\omega) = 0$$

für $j : U_1 \cap U_2 \to U$, $j = i_1 j_1 = i_2 j_2$

"$\subset$"

$\omega_i \in \Omega^p(U_i)$ $i = 1, 2$ $\omega_1 = \sum f_I \, dx_I$, $\omega_2 = \sum g_I \, dx_I$

$\partial^p(\omega_1, \omega_2) = 0 \Rightarrow j_1^*(\omega_1) = j_2^*(\omega_2)$

d.h. $f_I = g_I$ auf $U_1 \cap U_2$

man definiert $h_I \in C^\infty(U)$ durch

$$h_I(x) = \begin{cases} f_I(x) & \text{für } x \in U_1 \\ g_I(x) & \text{für } x \in U_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow I^p\left(\sum h_I \, dx_I\right) = (\omega_1, \omega_2)$$

③ $\underline{\partial^p \text{ ist surjektiv}}$

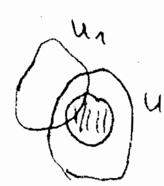
da sei (p_1, p_2) eine Zerlegung der Eins zu $\{U_1, U_2\}$

d.h.
- $\operatorname{supp}(p_i) \subset U_i$ $i = 1, 2$
- $p_i : U \to [0,1]$ glatt
- $p_1 + p_2 \equiv 1$

Sei $f : U_1 \cap U_2 \to \mathbb{R}$ glatt, man definiert Fortsetzungen

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x)\, p_2(x) & x \in U_1 \cap U_2 \\ 0 & x \in U_1 \setminus \operatorname{supp}(p_2) \end{cases} \quad \text{in } C^\infty(U_1)$$

$$f_2(x) = \begin{cases} -f(x)\, p_1(x) & x \in U_1 \cap U_2 \\ 0 & x \in U_2 \setminus \operatorname{supp}(p_1) \end{cases}$$



$\Rightarrow f_1 - f_2 \equiv 1$ auf $U_1 \cap U_2$

$\Rightarrow \omega = \sum f_I \, dx_I \in \Omega^p(U_1 \cap U_2)$

$\omega_1 := \sum f_{I,1} \, dx_I$, $\omega_2 := \sum f_{I,2} \, dx_I$