<u>Satz</u> (Mayer-Vietoris-Sequenz)

Seien $U_1, U_2 \subset \mathbb{R}^n$ offen und $U = U_1 \cup U_2$. Dann existiert eine lange Kohomologiesequenz:

$$\dashrightarrow H^p(U) \xrightarrow{I^*} H^p(U_1) \oplus H^p(U_2) \xrightarrow{J^*} H^p(U_1 \cap U_2) \xrightarrow{\partial^*} H^{p+1}(U) \to \dots$$

<u>Folgerung</u>: Seien $U_1, U_2 \subset \mathbb{R}^n$ disjunkte offene Mengen. Dann gilt

$$I^* : H^p(U_1 \cup U_2) \xrightarrow{\simeq} H^p(U_1) \oplus H^p(U_2) \qquad (*)$$

ist ein Isomorphismus

<u>Beispiel</u>: $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ (punktierte Ebene)

$$U_1 := \mathbb{R}^2 \setminus \{ (x,y) \mid x \geq 0, y = 0 \}$$
$$U_2 := \mathbb{R}^2 \setminus \{ (x,y) \mid x \leq 0, y = 0 \}$$

U_1, U_2 sind sternförmig $\Rightarrow$ $H^p(U_1) = H^p(U_2) = 0$ für $p > 0$
$H^0(U_1) = H^0(U_2) = \mathbb{R}$

$$U_1 \cap U_2 = \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{R} = \mathbb{R}^2_+ \cup \mathbb{R}^2_-$$

$$\Rightarrow H^p(U_1 \cap U_2) = \begin{cases} 0 & \text{für } p > 0 \\ \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} & \text{für } p = 0 \end{cases} \quad \text{nach } (*)$$

$p > 0$, Mayer-Vietoris

$$\dots \to H^p(U_1) \oplus H^p(U_2) \xrightarrow{J^*} H^p(U_1 \cap U_2) \xrightarrow{\partial^*} H^{p+1}(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \to H^{p+1}(U_1) \oplus H^{p+1}(U_2) \to \dots$$

$\Rightarrow$ exakte Sequenz

$$0 \to H^p(U_1 \cap U_2) \xrightarrow{\partial^*} H^{p+1}(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \to 0$$

$\Rightarrow \quad H^q(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) = 0 \qquad$ für $\quad q \geq 2$

$p = 0$:

$$H^{-1}(U_1 \cap U_2) \to H^0(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \to H^0(U_1) \oplus H^0(U_2) \to$$
$$\to H^0(U_1 \cap U_2) \to H^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \to H^1(U_1) \oplus H^1(U_2) \to$$

man erhält die exakte Sequenz

$$0 \to \underset{\mathbb{R}}{\underset{\|}{H^0(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})}} \xrightarrow{I^0} \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \xrightarrow{\partial^0} \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \xrightarrow{\partial^*} H^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \to 0$$

I^0 ist injektiv $\quad \to \quad \operatorname{Im} I^0 \cong \mathbb{R}$

$\to \quad \operatorname{Ker} \partial^0 \cong \mathbb{R}$

$\to \quad \operatorname{Im} \partial^0 \cong \mathbb{R}$

ausserdem: $\quad \partial^*: H^0(U_1 \cap U_2) / \operatorname{Im} \partial_0 \cong H^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$

$$\Rightarrow H^p(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) = \begin{cases} 0 & \text{für } p \geq 2 \\ \mathbb{R} & \text{für } p = 1 \\ \mathbb{R} & \text{für } p = 0 \end{cases}$$

<u>Satz</u>. Sei $U = U_1 \cup \dots \cup U_r$ mit U_i offen und konvex. Dann ist $H^p(U)$ endlich-dimensional.

<u>Beweis</u>: Induktion nach r

$V = U_1 \cup \dots \cup U_{r-1}, \qquad U = V \cup U_r \qquad$ I.Vor: für $r-1$

$\to$ exakte Sequenz: $\quad H^{p-1}(V \cap U_r) \xrightarrow{\partial^*} H^p(U) \xrightarrow{I^*} H^p(V) \oplus H^p(U_r)$

$\Rightarrow \quad H^p(U) \cong \operatorname{Im} \partial^* \oplus \operatorname{Im} I^*$

I.Vor: Aussage für $H^*(V \cap U_r)$, $H^*(V)$, $H^*(U_r)$

$\Rightarrow$ auch für $H^*(U)$

i.A.: $f: V \to W$
$\to \operatorname{Im} f \cong V / \ker f$
$\to V \cong \ker f \oplus \operatorname{Im} f$

hier: $\ker I^* = \operatorname{Im} \partial^*$

Homotopie

Lemma: Seien $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offen, dann gilt:

(1) Jede stetige Abbildung $h: U \to V$ ist homotop zu einer glatten Abbildung

(2) Je zwei homotope Abbildungen sind auch glatt homotop, d.h. über eine glatte Homotopie

Satz: Seien $f, g : U \to V$ glatte, homotope Abbildungen. Dann sind die induzierten Kettenabbildungen

$$f^*, g^* : \Omega^*(V) \longrightarrow \Omega^*(U)$$

Ketten-homotop. Insbesondere $f^* = g^* : H^p(V) \longrightarrow H^p(U)$

Beweis: (vgl. Beweis des Lemmas von Poincaré)

$\omega \in \Omega^p(U \times \mathbb{R})$: $\quad \omega = \sum_I f_I(x,t)\, dx_I + \sum_J g_J(x,t)\, dt \wedge dx_J$

Sei $\varphi : U \longrightarrow U \times \mathbb{R}$ die Inklusion, d.h.

$\varphi(x) = \varphi_0(x) = (x, 0)$

$\Rightarrow \varphi^* \omega = \sum f_I(x,0)\, dx_I$ $\qquad$ da $\varphi^*\omega = \omega|_U$

$\varphi_1^* \omega = \sum_I f_I(x,1)\, dx_I$ $\qquad$ für $\varphi_1(x) = (x,1)$

$\exists \quad \hat{S}_p : \Omega^p(U \times \mathbb{R}) \longrightarrow \Omega^{p-1}(U)$

mit $\quad (d\,\hat{S}_p + \hat{S}_{p+1}\, d)\,\omega = \varphi_1^*\omega - \varphi_0^*\omega$

man betrachtet $\quad U \xrightarrow{\varphi_0} U \times \mathbb{R} \xrightarrow{F} V$, $\qquad$ F die Homotopie zwischen f und g

$\Rightarrow F \circ \varphi_0 = f, \quad F \circ \varphi_1 = g$

man definiert: $\quad S_p : \Omega^p(V) \longrightarrow \Omega^{p-1}(U)$

als $\quad S_p = \hat{S}_p \circ F^*$

Behauptung: $\quad dS_p + S_{p+1}\, d = g^* - f^*$

$$d \hat{S}_p F^* \omega + \hat{S}_{p+1} d F^* \omega$$
$$= \varphi_1^* F^* \omega - \varphi_0^* F^* \omega$$
$$= (F \circ \varphi_1)^* \omega - (F \circ \varphi_0)^* \omega = g^* \omega - f^* \omega$$

außerdem: $\underline{\hat{S}_{p+1} d F^* \omega = \hat{S}_{p+1} F^* d\omega} = S_{p+1} d \omega$

Sei $\varphi : U \to V$ stetig
$\to \exists f : U \to V$ glatt mit $\varphi \simeq f$
$\to f^* : H^p(V) \to H^p(U)$ ist unabhängig von der Wahl von f

<u>da</u> $\varphi \simeq f_1, \varphi \simeq f_2 \Rightarrow f_1 \simeq f_2, \quad f_1^* = f_2^*$ auf H^*

$\to$ man definiert $\varphi^* := f^* : H^p(V) \to H^p(U)$
wobei $f : U \to V$ eine glatte zu φ homotope Abbildung ist

<u>Satz</u>: Seien $U, V, W \subset \mathbb{R}^n$ offen dann gilt:

1. $\varphi_0, \varphi_1 : U \to V$ stetig, homotop
$\Rightarrow \varphi_0^* = \varphi_1^* : H^p(V) \to H^p(U)$

2. $\varphi : U \to V, \ \psi : V \to W$ stetig
$\Rightarrow (\psi \circ \varphi)^* = \varphi^* \circ \psi^*$ auf $H^*(W)$

3. Sei $\varphi : U \to V$ eine Homotopie-Äquivalenz, dann ist
$$\varphi^* : H^p(V) \to H^p(U)$$
ein Isomorphismus, d.h. $H^*(U)$ hängt nur vom Homotopietyp von U ab.

Folgerung 1 (Topologische Invarianz)

Ein Homöomorphismus $h: U \to V$ zwischen offenen Mengen in $\mathbb{R}^n$ induziert einen Isomorphismus

$$h^*: H^p(V) \longrightarrow H^p(U)$$

Folgerung 2: Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und kontrahierbar, dann gilt:

$$H^p(U) = \begin{cases} 0 & \text{für } p \geq 1 \\ \mathbb{R} & \text{für } p = 0 \end{cases}$$

Beweis: U kontrahierbar $\Leftrightarrow$ U ist homotopie-äquivalent zu einem Punkt

)

$\Rightarrow$

Satz Für $n \geq 2$ gilt.

$$H^p(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \cong \begin{cases} \mathbb{R} & \text{für } p = 0, n-1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Bemerkung: Offensichtlich gilt: $H^p(\mathbb{R} \setminus \{0\}) = \begin{cases} \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} & \text{für } p = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Folgerung: Für $n \neq m$ sind $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^m$ nicht homöomorph

Beweis: sei $h: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ ein Homöomorphismus, o.B.d.A. $h(0) = 0$

$\Rightarrow$ man erhält einen Homöomorphismus $\mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$

$\Rightarrow$ $H^p(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \cong H^p(\mathbb{R}^m \setminus \{0\})$ ↯