Satz 1: Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ eine abgeschlossene Teilmenge mit $A \neq \mathbb{R}^n$. Dann gelten die folgenden Isomorphismen:

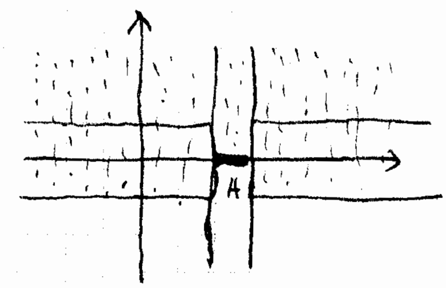
① $H^{p+1}(\mathbb{R}^{n+1} \setminus A) \cong H^p(\mathbb{R}^n \setminus A)$ für $p \geq 1$

② $H^1(\mathbb{R}^{n+1} \setminus A) \cong H^0(\mathbb{R}^n \setminus A)/_{\mathbb{R}\cdot 1}$

③ $H^0(\mathbb{R}^{n+1} \setminus A) \cong \mathbb{R}$ ($\mathbb{R}\cdot 1$ = konstante Funktionen)

Beweis: • man definiert offene Mengen in $\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$

$$U_1 = \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \cup (\mathbb{R}^n \setminus A) \times (-1,\infty)$$
$$U_2 = \mathbb{R}^n \times (-\infty,0) \cup (\mathbb{R}^n \setminus A) \times (-\infty,1)$$



$$\Rightarrow U_1 \cup U_2 = \mathbb{R}^{n+1} \setminus A$$
$$U_1 \cap U_2 = (\mathbb{R}^n \setminus A) \times (-1,1)$$

• Behauptung: U_1, U_2 sind kontrahierbar

da $\varphi : U_1 \to U_1$, $\varphi(x_1, \dots, x_{n+1}) = (x_1, \dots, x_n, x_{n+1}+1)$
die Strecken zwischen x und $\varphi(x)$, und zwischen $\varphi(x)$ und $(0,\dots,0,1)$ liegen ganz in U_1

$\Rightarrow \varphi \simeq \mathrm{Id}_{U_1}$, $\varphi \simeq \varphi_0$, $\varphi_0(x) = (0,\dots,0,1)$

Homotopie $f_1 \simeq f_2$: $F(x,t) = (1-t) f_1(x) + t f_2(x)$
(falls die Strecke zwischen $f_1(x)$ und $f_2(x)$ in U_1 liegt)

$$\rightarrow H^p(U_i) = \begin{cases} 0 & \text{für } p \geq 1 \\ \mathbb{R} & \text{für } p = 0 \end{cases}$$

für $i = 1,2$

- Sei $pr : U_1 \cap U_2 = (\mathbb{R}^n \setminus A) \times (-1,1) \longrightarrow \mathbb{R}^n \setminus A$ die Projektion.

d.h. $pr(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) = (x_1, \ldots, x_n, 0)$

und sei $i : \mathbb{R}^n \setminus A \longrightarrow U_1 \cap U_2$ die Inklusion.

d.h. $i(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_n, 0)$

$\rightarrow$ $pr \circ i = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n \setminus A}$, $i \circ pr = \mathrm{Id}_{U_1 \cap U_2}$

$\rightarrow$ pr ist eine Homotopieäquivalenz und es folgt die Isomorphie

$$pr^* : H^p(\mathbb{R}^n \setminus A) \xrightarrow{\sim} H^p(U_1 \cap U_2) \qquad \text{für alle } p$$

- Aus der Mayer-Vietoris-Sequenz folgt der Isomorphismus

$$\partial^* : H^p(U_1 \cap U_2) \xrightarrow{\sim} H^{p+1}(\mathbb{R}^{n+1} \setminus A) \qquad \text{für alle } p \geq 1$$

$$\Rightarrow H^{p+1}(\mathbb{R}^{n+1} \setminus A) \cong H^p(\mathbb{R}^n \setminus A) \qquad \text{für alle } p \geq 1$$

- Aus der Mayer-Vietoris-Sequenz erhält man die folgende exakte Sequenz:

$$0 \to H^0(\mathbb{R}^{n+1} \setminus A) \xrightarrow{I^*} H^0(U_1) \oplus H^0(U_2) \xrightarrow{J^*}$$

$$\hookrightarrow H^0(U_1 \cap U_2) \xrightarrow{\partial^*} H^1(\mathbb{R}^{n+1} \setminus A) \longrightarrow 0$$

. Elemente in $H^0(U_1) \oplus H^0(U_2)$ sind Paare (f, g) von Funktionen

$$f \in C^\infty(U_1),\ g \in C^\infty(U_2) \quad \text{mit } f \equiv a_1,\ g \equiv a_2$$

$\rightarrow$ $J^*(f, g) = a_1 - a_2$ auf $U_1 \cap U_2$

$\rightarrow$ $\ker \partial^* = \operatorname{Im} J^* = \mathbb{R} \cdot 1$ konstante Fkt. auf $U_1 \cap U_2$

$$\Rightarrow \quad H^1(\mathbb{R}^{n+1}\setminus A) \cong H^0(U_1\cap U_2)\,/_{\mathbb{R}\cdot 1}$$
$$\cong H^0(\mathbb{R}^n\setminus A)\,/_{\mathbb{R}\cdot 1}$$

- $\dim \operatorname{Im} I^* = \dim \operatorname{Ker} J^* = 1$

$\Rightarrow \quad H^0(\mathbb{R}^{n+1}\setminus A) \cong \mathbb{R}$ (da I^* injektiv)

<u>Folgerung 1</u>: Für $n \geq 2$ gilt der Isomorphismus

$$H^p(\mathbb{R}^n\setminus\{0\}) \cong \begin{cases} \mathbb{R} & \text{für } p = 0, n-1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

<u>Beweis</u>: Induktion nach n

I. A.: $n = 2$: schon gezeigt.

I. Vor: Aussage sei richtig für n

$H^p(\mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\}) \cong H^{p-1}(\mathbb{R}^n\setminus\{0\})$ für $p \geq 2$

(Satz 1 für $A = \{0\}$)

$$\cong \begin{cases} \mathbb{R} & \text{für } (p = 1),\ n = (n+1)-1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad n \geq 2$$

$H^1(\mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\}) \cong H^0(\mathbb{R}^n\setminus\{0\})\,/_{\mathbb{R}\cdot 1} = \mathbb{R}/_{\mathbb{R}} = 0$

$H^0(\mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\}) \cong \mathbb{R}$

($\mathbb{R}$ für $p-1 = n-1$
für $p = n$
$= (n+1)-$

<u>Folgerung 2:</u> Sei $R : \mathbb{R}^{n+1} \setminus A \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \setminus A$ der Diffeomorphismus definiert durch $R(x_1, \dots, x_{n+1}) = (x_1, \dots, x_n, -x_{n+1})$. Die induzierte lineare Abbildung

$$R^* : H^{p+1}(\mathbb{R}^{n+1} \setminus A) \longrightarrow H^{p+1}(\mathbb{R}^{n+1} \setminus A)$$

entspricht dann der Multiplikation mit -1.

<u>Beweis</u>: man hat folgende kommutative Diagramme, wobei die horizontalen Pfeile den Einschränkungen von R entsprechen

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^{n+1} \setminus A \arrow[r, "R"] & \mathbb{R}^{n+1} \setminus A \\
U_1 \arrow[u, "i_1"] \arrow[r, "R_1"] & U_2 \arrow[u, "i_2"] \\
U_1 \cap U_2 \arrow[u, "j_1"] \arrow[r, "R_0"] & U_1 \cap U_2 \arrow[u, "j_2"]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^{n+1} \setminus A \arrow[r, "R"] & \mathbb{R}^{n+1} \setminus A \\
U_2 \arrow[u, "i_2"] \arrow[r, "R_2"] & U_1 \arrow[u, "i_1"] \\
U_1 \cap U_2 \arrow[u, "j_2"] \arrow[r, "R_0"] & U_1 \cap U_2 \arrow[u, "j_1"]
\end{tikzcd}$$

aus dem Beweis von Satz 1 folgt:

$$\partial^* : H^p(U_1 \cap U_2) \longrightarrow H^{p+1}(\mathbb{R}^{n+1} \setminus A) \quad \text{ist surjektiv}$$

$\Rightarrow$ es genügt zu zeigen: $R^* \circ \partial^* [\omega] = -\partial^* [\omega]$
für eine beliebige Form $\omega \in \Omega^p(U_1 \cap U_2)$ mit $d\omega = 0$

schon gezeigt: $\partial : \Omega^p(U_1) \oplus \Omega^p(U_2) \longrightarrow \Omega^p(U_1 \cap U_2)$ ist surjektiv

$\Rightarrow \exists\, \omega_i \in \Omega^p(U_i)$ mit: $\omega = j_1^* \omega_1 - j_2^* \omega_2$ $\quad (*)$
$\quad {\scriptstyle i=1,2}$

$\Rightarrow \partial^* [\omega] = [\tau]$ mit: $\tau \in \Omega^{p+1}(\mathbb{R}^{n+1} \setminus A)$
$\qquad i_a^* \tau = d\omega_a \qquad a = 1,2$

d.h. $\partial^* [\omega] = [I^{-1}(d\omega_1, d\omega_2)]$ $\qquad I \mathrel{\hat=} f,\ \partial \mathrel{\hat=} g$

aus den kommutativen Diagrammen folgt:

- $- R_0^* \omega \overset{(*)}{=} R_0^* j_2^* (\omega_2) - R_0^* j_1^* (\omega_1) = j_1^* R_1^* (\omega_2) - j_2^* R_2^* (\omega_1)$
- $i_1^* (R^* \tau) = R_1^* i_2^* \tau = R_1^* (d\omega_2) = d R_1^* \omega_2$
- $i_2^* (R^* \tau) = R_2^* i_1^* \tau = R_2^* (d\omega_1) = d R_2^* \omega_1$

$\Rightarrow \quad \partial^* (- [R_0^* \omega]) = [R^* \tau]$

$\Rightarrow \quad \partial^* R_0^* [\omega] = - R_0^* \partial^* [\omega]$ da $\partial^* [\omega] = [\tau]$

Behauptung: $R_0^* = \mathrm{Id}$ auf $H^p (U_1 \cap U_2)$

da $pr : U_1 \cap U_2 \to \mathbb{R}^n \setminus A$ induziert einen Isomorphismus auf der Kohomologie

und $pr \circ R_0 = pr$

$\Rightarrow \quad pr^* = R_0^* \circ pr^* : H^p(\mathbb{R}^n \setminus A) \to H^p(U_1 \cap U_2) \to H^p(U_1 \cap U_2)$

$\Rightarrow \quad R_0^* = \mathrm{Id}$ auf $H^p(U_1 \cap U_2)$

$\Rightarrow \quad \partial^* [\omega] = - R^* \partial^* [\omega]$

Sei $A \in GL(n,\mathbb{R})$, $A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $x \mapsto Ax$ Isomorphismus

$\Rightarrow$ Diffeomorphismus $f_A : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

<u>Lemma</u>: Für jedes $n \geq 2$ ist die induzierte Abbildung

$$f_A^* : H^{n-1}(\mathbb{R}^n - \{0\}) \longrightarrow H^{n-1}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$$

gegeben durch Multiplikation mit $\dfrac{\det A}{|\det A|} \in \{\pm 1\}$

<u>Beweis</u>: $B := (I + c\,E_{r,s}) \cdot A$ — $E_{r,s}$ hat eine Eins in der r-ten Zeile und s-ten Spalte, sonst

d.h. B entsteht aus A, indem man zur r-ten Zeile das c-fache der s-ten Zeile addiert $\qquad \det A = \det B$

$\Rightarrow$ $f_A \simeq f_B$ durch $F(t,x) = (I + t \cdot c\,E_{rs}) \cdot Ax$ $\quad 0 \leq t \leq$

$\Rightarrow$ $f_A^* = f_B^*$ auf der Kohomologie

$\Rightarrow$ $f_A^* = f_D^*$ mit $D = \mathrm{diag}(1, \dots, 1, d)$
$d = \det A$ $\qquad$ (da $\det A = \det B$)

$\Rightarrow$ $f_A^* = f_{D_0}^*$ mit $D_0 = \mathrm{diag}\left(1, \dots, 1, \frac{d}{|d|}\right)$

$\Rightarrow$ Behauptung des Lemmas (nach Folgerung 2) $\qquad$ Homotopie: $F(t,x) = \mathrm{diag}\left(1, \dots, 1, \frac{|d|^t}{|d|} \cdot d\right)$

für $0 \leq t \leq 1$

<u>Beispiel</u>: $f : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ antipodale Abbildung

$f(x) = -x$

$\Rightarrow$ $A = -\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^{n+1}}$

$\Rightarrow$ $\det A = (-1)^{n+1}$

$\Rightarrow$ $f = f_A$ operiert durch Multiplikation mit $(-1)^{n+1}$ auf $H^n(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\})$